ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 7

1. Przeznaczona do odbioru partia towaru zawiera jednakową liczbę sztuk I, II i III gatunku. Niech $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ oznaczają zdarzenia elementarne w doświadczeniu polegającym na wylosowaniu z tej partii towaru sztuki odpowiednio I, II, III gatunku. Zmienne losowe X, Y określamy w sposób następujący:

$$X(\omega_1) = 2,\ X(\omega_2) = 1,\ X(\omega_3) = 0$$

$$Y(\omega_1) = 0,\ Y(\omega_2) = 1,\ Y(\omega_3) = 2$$

   Porównać rozkłady zmiennych losowych X, Y. Wyznaczyć ich dystrybuanty. Czy zmienne losowe X i Y są równe?

2. Z pęku n kluczy wybierany jest jeden i pasowany do zamka. Klucz, który nie pasuje jest odkładany, a z pozostałych jest losowany kolejny klucz. Wartością zmiennej losowej X jest numer tej próby, w której klucz pasuje do zamka. Wiadomo, że tylko jeden klucz otwiera zamek. Wyznaczyć rozkład X.

3. Rzucamy pięcioma symetrycznymi monetami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych orłów. Podać rozkład zmiennej losowej.

4. Dane są 4 urny i 3 kule. Rozmieszczamy kule w urnach. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości pustych urn. Obliczyć rozkład zmiennej losowej.

5. Losujemy n - krotnie (ze zwracaniem) liczbę spośród liczb od 1 do N. X największa spośród liczb uzyskanych w losowaniu. Obliczyć rozkład zmiennej losowej.

6. Dany jest odcinek $\langle 0, L\rangle$ i punkt r należący do tego odcinka. Z odcinka losujemy dwa punkty x_1, x_2. Zmienna losowa X przyjmuje wartość 1, gdy punkt r znajduje się miedzy wylosowanymi punktami oraz 0 w przeciwnym wypadku. Podać rozkład X.

7. Oblicz wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennej losowej X o rozkładzie:
   a) równomierny na zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$;
   b) Bernoulliego z parametrami n, p;
   c) Poissona z parametrem λ;
   d) geometryczny z parametrem p.

8. Udowodnij, że jeśli zmienna losowa X ma rozkład dyskretny, dla której $E(X^2) < +\infty$, to istnieje $D^2(X)$ oraz:
   a) $D^2(X) \geq 0$;
   b) $D^2(aX) = a^2 D^2(X)$;
   c) $D^2(X + a) = D^2(X)$;
   d) $D^2(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna losowa X jest z prawdopodobieństwem 1 stała.

9. Udowodnić, że jeśli X jest zmienną losową przyjmującą wartości całkowite nieujemne, to $E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$.

10. Obliczyć, korzystając z zadania 9, wartość oczekiwaną zmiennej losowej o rozkładzie geometrycznym (przyjmującej wartości $1, 2, \ldots$).

11. Podać przykład zmiennej losowej, dla której nie istenieje wartość oczekiwana.

12. Wyznaczyć dwa pierwsze momenty zmiennej losowej $Y = 2^{-X}$, jeśli $X \sim$ Bernoullie(n, p).

zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$ losujemy bez zwracania dwie liczby. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X przyjmującej wartości równe
   a) minimum z wylosowanych liczb;
   b) maksimum z wylosowanych liczb;
   c) sumie wylosowanych liczb.

2. Rzucamy dwoma kostkami i symetryczną monetą, na której znajdują się liczby -1,1. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe sumie liczby wypadłej na monecie i wartości bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek. Podać rozkład zmiennej losowej.

3. Niech $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$, $P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$ dla $\omega = 0, 1, 2, 3$. Definiujemy dwie zmienne losowe $X(\omega) = \sin \frac{\pi\omega}{2}$ oraz $Y(\omega) = \cos \frac{\pi\omega}{2}$. Znaleźć rozkłady i dystrybuanty zmiennych losowych X i Y. Obliczyć $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\})$.

4. Z talii 52 kart wyciągamy 6 i takiemu losowaniu przypisujemy liczbę pików. Znaleźć rozkład określonej w ten sposób zmiennej losowej.

5. Funkcja

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{4}, & -1 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & 2 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4. \end{cases}$$

jest dystrybuantą zmiennej losowej X. Wtedy (odpowiedzieć *tak* lub *nie*):

a) $P(X \leq 2) > P(X > 2)$;

b) $W_X = \{-1, 1, 2, 3\}$;

c) $P(X = 3) = \frac{7}{8}$;

d) $P(X^2 - 1 = 0) = \frac{1}{2}$.