

ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa  
matematyka, III rok  
lista 8

1. Z kwadratu o boku  $a$  losowany jest punkt. Wartością zmiennej losowej  $X$  jest odległość od najbliższego boku. Wyznaczyć rozkład  $X$ .
2. Z okręgu o promieniu 1 losujemy dwa punkty  $P, Q$ . Wartością zmiennej losowej jest długość mniejszego łuku. Wyznaczyć rozkład  $X$ .
3. Asia i Basia umówiły się między 16:00 a 17:00 w centrum miasta. Niech zmienna losowa  $X$  oznacza czas oczekiwania osoby, która przyszła pierwsza, na drugą. Wyznaczyć rozkład tej zmiennej losowej.
4. Z kwadratu  $[0, 1]^2$  losujemy punkt  $(x, y)$ . Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe sumie współrzędnych wylosowanego punktu. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej  $X$ .
5. Czy można dobrać stałe  $a, b$  tak aby funkcja  $F(x) = a \arctan x + b$  była dystrybuantą pewnego rozkładu? Jeśli tak, to je podać wraz z uzasadnieniem.
6. Wyznaczyć zbiór wszystkich trójek  $a, b$  i  $c$ , dla których funkcja

$$F(t) = \begin{cases} at^2, & t < 0, \\ bt + c, & 0 \leq t < 2, \\ 1, & t \geq 2 \end{cases}$$

jest

- a) dystrybuantą zmiennej losowej,
  - b) dystrybuantą zmiennej losowej o rozkładzie dyskretnym,
  - c) dystrybuantą zmiennej losowej o rozkładzie ciągłym.
7. Dana jest gęstość określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & x \notin \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \end{cases}.$$

Nie licząc całki podać ile wynosi prawdopodobieństwo w punkcie  $\frac{\pi}{4}$ . Odpowiedź uzasadnij.

8. Dana jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} a(l^2 - x^2)^{-0.5} & |x| < l \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}.$$

Określić parametr  $a$ , tak aby funkcja była gęstością, obliczyć dystrybuantę i  $P(\{0 \leq X < 1\})$ .

9. Czy można dobrać parametr  $a$  tak, aby podane funkcje były gęstościami pewnego rozkładu zmiennej losowej? Odpowiedź uzasadnij. W przypadku odpowiedzi pozytywnej policzyć ich dystrybuanty.

- a)  $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in \langle 0, 4 \rangle \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle 0, 4 \rangle \end{cases};$
- b)  $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in \langle -1, 4 \rangle \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle -1, 4 \rangle \end{cases};$
- c)  $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{dla } x \in \langle 0, 3 \rangle \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle 0, 3 \rangle \end{cases};$
- d)  $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x \cdot (2 - x) & \text{dla } x \in \langle 0, a \rangle \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle 0, a \rangle \end{cases};$

10. Funkcje  $f_i, i = 1, 2, 3$  są gęstościami rozkładów jednostajnych na odcinkach  $(i - 1, i)$ . Wtedy są gęstościami także funkcje (odpowiedzieć *tak* lub *nie*):

- a)  $f_1 + f_2 + f_3,$
- b)  $f_2 \cdot f_3,$
- c)  $|f_3 - f_1|,$
- d)  $\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2,$

e)  $\max(f_1, f_2)$ .

11. Wiemy, że zmienna losowa  $X$  ma rozkład wykładniczy z parametrem  $\lambda > 0$  i  $P(X < 2) = \frac{3}{4}$ . Obliczyć  $\lambda$ .

12. Zmienna losowa ma rozkład  $N(0,1)$ . Oblicz prawdopodobieństwo

- $P(\{X > 0\})$
- $P(\{X > 2\})$
- $P(\{|X| < 1\})$
- $P(\{|X| > 1\})$
- $P(\{0 < X < 3\})$
- $P(\{-1 < X < 3\})$

13. Zmienna losowa ma rozkład  $N(1,2)$ . Oblicz prawdopodobieństwo

- $P(\{|X| > 3\})$
- $P(\{X^2 \leq \frac{3}{4} + X\})$

**zadania do samodzielnego rozwiązania:**

1. Dane są dwa koła współśrodkowe o promieniach 1 i 2. Z większego koła losujemy punkt. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od mniejszego z okręgów. Podać rozkład zmiennej losowej.
2. Z odcinka  $[0, 1]$  losujemy dwie liczby. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej  $X$  przyjmującej wartości równe
  - a) minimum z wylosowanych liczb;
  - b) maksimum z wylosowanych liczb;
  - c) sumie wylosowanych liczb.
3. Dla jakiego  $a$  funkcja  $f(x) = (ax - 1)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$  jest gęstością rozkładu zmiennej losowej?
4. Waga osoby w pewnej grupie osób opisana jest (w kg) rozkładem normalnym  $N(75,16)$ .
  - a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba waży więcej niż 83 kg?
  - b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba waży nie więcej niż 79 kg?
  - c) Jaka jest frakcja osób mających wagę pomiędzy 71 a 80 kg?
  - d) Wyznaczyć wartość wagi której nie przekracza 80% badanej grupy.