

ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 9

1. Niech zmienna losowa X posiada rozkład równomierny na odcinku (a, b) . Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Y = AX + B$, $A, B \in R$, $A \neq 0$.
2. X jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$. Znaleźć dystrybuantę i gęstość następujących zmiennych losowych
 - $Y = aX + b$ gdzie $a, b \in R \wedge a \neq 0$;
 - $Y = 2X^2 - 1$;
 - $Y = -\ln(1 - X)$;
3. X ma rozkład wykładniczy ze współczynnikiem $\lambda > 0$. Znaleźć gęstość rozkładu:
 - $Y = X^3$;
 - $Y = 5X - 1$;
 - $Y = 3X + 2$;
4. X ma rozkład normalny $N(0, 1)$. Jaki rozkład ma zmienna $Y = aX + b$ gdzie $a, b \in R, a > 0$?
5. Zmienna losowa X ma gęstość $f(x)$. Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej $Y = \phi(X)$ przy założeniu, że odwzorowanie ϕ jest wzajemnie jednoznaczne i różniczkowalne.
6. Dystrybuanta F zmiennej losowej X jest funkcją ciągłą dla dowolnej liczby rzeczywistej. Czy stąd wynika, że jej gęstość f jest również funkcją ciągłą? W przypadku i odpowiedzi pozytywnej przeprowadzić dowód, zaś w przypadku negatywnej podać kontrprzykład.
7. Niech F będzie dystrybuantą ciągłej zmiennej losowej X . Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Y = F(X)$, przy założeniu, że istnieje funkcja odwrotna do $y = F(x)$.
8. Dana jest zmienna losowa $X \in N(0, 1)$. Określamy zmienną losową $Y = X^2$. Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej Y .
9. Zmienna losowa ma rozkład równomierny na odcinku $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Y = \cos X$.
10. X jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$. Znaleźć dystrybuantę i gęstość następujących zmiennych losowych $Y = \max\{X, 1 - X\}$.
11. Zmienna losowa X ma rozkład geometryczny z parametrem p . Jaki rozkład ma zmienna losowa $Y = (-1)^X$?
12. X ma rozkład wykładniczy ze współczynnikiem $\lambda > 0$. Znaleźć gęstość rozkładu:
 - $Y = \{X\}$, gdzie $\{X\} = X - [X]$ oznacza część ułamkową;
 - $Y(\omega) = k^2$, gdy $k \leq X(\omega) < k + 1, k = 0, 1, 2, \dots$;
13. W tabeli opłat sieci pewnej komórkowej można przeczytać, że rozmowa kosztuje 0,20 groszy za minutę, przy czym tak zwane impulsy są naliczane co minutę. Zakładamy, że czas trwania rozmowy ma rozkład wykładniczy z parametrem 1, co oznacza, że rozmowa średnio trwa minutę. Ile średnio płacimy za rozmowę?
14. Zmienna losowa Y określona jest wzorem $Y = \begin{cases} \sqrt{X} & \text{dla } X \geq 0 \\ \sqrt{-X} & \text{dla } X < 0 \end{cases}$. Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej Y jeśli $X \in N(0, 1)$.
15. Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład symetryczny, jeśli zmienna $-X$ posiada ten sam rozkład. Wyrazić własność symetryczności ciągłej zmiennej losowej za pomocą jej dystrybuanty oraz gęstości.

zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. X jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$. Znaleźć dystrybuantę i gęstość następujących zmiennych losowych
 - $Y = -\ln X$;

• $Y = X^k, k \in N;$

2. X jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0,1]$. Znaleźć dystrybuantę i gęstość następujących zmiennej losowej $Y = \min\{X, 1 - X\}$.
3. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 3]$. Znaleźć rozkłady zmiennych losowych $Y = \min(X, X^2)$, $Z = \max(2, X)$. Czy są to rozkłady ciągłe?
4. X ma rozkład $N(0, 1)$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Y = e^X$.
5. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 2]$. Niech $Z = X^2 - 1$. Wyznaczyć rozkład Z . Czy jest to rozkład ciągły? Znaleźć takie t_0 , że $P(Z < t_0) = \frac{1}{10}$.
6. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[-1, 2]$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Y = |X|$.