

statystyka matematyczna - ćwiczenia
matematyka finansowa 2 rok
lista 4

1. Udowodnić, że wariancja z próby $\tilde{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ jest obciążonym estymatorem wariancji populacji $D^2(X)$.
2. Wykonano n niezależnych doświadczeń według schematu Bernoulliego, przy czym p - oznacza prawdopodobieństwo sukcesu. Sprawdzić, czy częstość pojawienia się sukcesu w takich doświadczeniach jest estymatorem zgodnym i nieobciążonym prawdopodobieństwa p .
3. Obserwacje X_1, X_2, X_3 są niezależne i pochodzą z rozkładu Poissona z parametrem m . Sprawdzić, czy estymatory parametru m :
$$Q_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \quad \text{i} \quad Q_2 = \frac{2X_1 + 2X_2 + X_3}{5}$$
są nieobciążone. Który z nich jest obarczony mniejszym błędem szacunku?
4. Niech X i Y będą takimi niezależnymi zmiennymi losowymi, że $E(X) = 1, E(Y) = 3, D^2(X) = D^2(Y) = \sigma^2$. Dla jakiej stałej c statystyka $cX^2 + (1 - c)Y^2$ jest nieobciążonym estymatorem parametru σ^2 ?
5. T_1 i T_2 są nieobciążonymi i niezależnymi estymatorami parametru θ oraz $D^2(T_i) = \sigma_i^2$ dla $i = 1, 2$.
 - a) Sprawdzić, czy statystyka $T = aT_1 + (1 - a)T_2$ jest nieobciążonym estymatorem parametru θ dla każdego $a \in \mathcal{R}$.
 - b) Wyznaczyć tę wartość a , przy której wariancja estymatora T jest najmniejsza.
6. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie dwumianowym z parametrami p i n ($0 < p < 1, n \in \mathcal{N}$). Dla jakiej wartości c statystyka $T = c(X/n)(1 - X/n)$ jest estymatorem nieobciążonym parametru $\theta = p(1 - p)$?
7. Zmienne losowe X_1, \dots, X_n mają wartość oczekiwaną zero i wariancję σ^2 oraz $\text{cov}(X_i, X_j) = \sigma^2/n$ dla każdego $i \neq j$. Niech \bar{X}_n oznacza średnią arytmetyczną ze zmiennych X_1, \dots, X_n . Wyznaczyć taką stałą c , dla której statystyka $T = c \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ jest estymatorem nieobciążonym parametru σ^2 .
8. Zmienne losowe X_1, \dots, X_n mają rozkład o tej samej wartości przeciętnej $E(X_i) = \mu$ i wariancjach $D^2(X_i) = \sigma_i^2, i = 1, \dots, n$. Wykazać, że estymatory postaci $T = \frac{a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ są przy wszelkich rzeczywistych a_i spełniających warunek $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$ nieobciążonymi estymatorami parametru μ .
9. Niech populacja generalna ma rozkład normalny $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Za pomocą metody momentów wyznaczyć estymatory parametrów m i σ^2 .
10. Niech badana cecha X ma rozkład gamma z nieznanymi obu parametrami o gęstości:

$$f(x; p, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\beta x} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$$

Na podstawie n -elementowej próby prostej, pobranej z populacji, w której cecha X ma dany rozkład, wyznaczyć metodą momentów estymatory \tilde{p} i $\tilde{\beta}$ parametrów p i β .

11. Populacja generalna ma rozkład zero-jedynkowy z parametrem p . Na podstawie n -elementowej próby prostej oszacować metodą największej wiarygodności parametr p .
12. Populacja generalna ma rozkład $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Stosując metodę największej wiarygodności, wyznaczyć estymatory parametrów m i σ^2 .
13. Populacja generalna ma rozkład Rayleigha określony funkcją gęstości ($\lambda > 0$):

$$f(x) = \begin{cases} 2\lambda x \exp(-\lambda x^2) & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$$

Wyznaczyć estymator parametru λ tego rozkładu.

14. Metodą największej wiarygodności na podstawie n -elementowej próby prostej znaleźć estymator parametru p rozkładu geometrycznego o funkcji prawdopodobieństwa

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} \quad , \quad k \in \mathcal{N}.$$

15. Dana jest n -elementowa próba prosta X_1, \dots, X_n pochodząca z rozkładu Poissona z parametrem λ . Znaleźć estymator największej wiarygodności prawdopodobieństwa $P(X_1 = 0)$.

16. Próba prosta X_1, \dots, X_n pochodzi z rozkładu o gęstości

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & \text{dla } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{dla p.p.} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Wyznaczyć estymator największej wiarygodności parametru θ .