

statystyka matematyczna - ćwiczenia
matematyka finansowa 2 rok
lista 6

1. Cecha X ma w zbiorowości generalnej rozkład $N(m, 4)$. Na podstawie czteroelementowej próby należy zweryfikować hipotezę H_0 , że wartość przeciętna jest równa 10, wobec hipotezy H_1 , że wartość przeciętna wynosi 15. Przyjmujemy taką regułę postępowania, że hipotezę H_0 odrzucamy, gdy \bar{X} obliczona na podstawie próby przyjmuje wartość większą od 13. Obliczyć prawdopodobieństwo popełnienia błędów I i II rodzaju.
2. W urnie jest 7 kul, w tym Q białych i pozostałe czarne. W celu zweryfikowania hipotezy $H_0 : Q = 3$ wobec $H_1 : Q = 5$ losuje się bez zwracania 2 kule i odrzuca się H_0 , jeśli obydwie są białe. Obliczyć prawdopodobieństwa popełnienia błędów I i II rodzaju.
3. Rozwiązać poprzednie zadanie przy założeniu, że losowanie odbywa się ze zwracaniem.
4. Hipotezę, że wariancja w rozkładzie normalnym wynosi 80, odrzuca się, gdy wartość wariancji policzona na podstawie trzelementowej próby jest mniejsza od 4 lub większa od 240. Obliczyć prawdopodobieństwa popełnienia błędów I i II rodzaju.
5. Cecha X ma rozkład wykładniczy o gęstości postaci $f(x) = \frac{1}{Q} \exp(-\frac{x}{Q})$ dla $x \geq 0$. Na podstawie jednoelementowej próby weryfikujemy hipotezę $H_0 : Q = 1$ przeciwko $H_1 : Q = 10$. Hipotezę H_0 odrzucamy, gdy wartość cechy w próbie jest większa od 2. Obliczyć prawdopodobieństwa błędów I i II rodzaju.
6. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}$, $x \in (0, 1)$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Postawiono hipotezę $H : \theta = 1$ przeciw hipotezie $K : \theta = 2$. Ustalono liczbę $0 < c < 1$. Hipotezę H należy odrzucić, jeśli $X > c$; w przeciwnym razie hipotezę H należy przyjąć. Obliczyć:
 - a) prawdopodobieństwo błędów I i II rodzaju;
 - b) moc testu;
 - c) wartość c , przy której suma prawdopodobieństw błędów jest najmniejsza.
7. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}$, $x \in (0, \theta)$, gdzie θ jest nieznanym parametrem. Niech c będzie ustaloną dodatnią liczbą. Test polega na tym, że jeśli $X \geq c$, to należy przyjąć hipotezę $K : \theta = 4$, a gdy $X < c$, należy przyjąć hipotezę $H : \theta = 2$. Obliczyć:
 - a) prawdopodobieństwo błędów I i II rodzaju (α i β);
 - b) moc testu;
 - c) β , gdy $\alpha = 0.05$.
8. Czas pracy pewnego rodzaju baterii ma rozkład $N(m, 70)$. Na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ zweryfikować hipotezę, że przeciętny czas pracy tego typu baterii wynosi ponad 500 godz., jeśli dla 16 losowo wybranych baterii otrzymano $\bar{X} = 560$ godz.
9. Zakłada się, że „długość życia” opon samochodowych ma rozkład normalny. Producent twierdzi, że wartość przeciętna tej charakterystyki jest równa 50 tys. km. Na podstawie 100 losowo wybranych opon otrzymano $\bar{X} = 45$ tys. km i $s = 8$ tys. km. Czy na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ można uważać, że producent ma rację?
10. W zakładzie A dla losowo wybranych 10 pracowników otrzymano średni wiek 32 lata i odchylenie standardowe $s = 4$ lata. Czy można uważać (przy założeniu, że wiek pracowników ma rozkład normalny) że przeciętny wiek pracownika w tym zakładzie jest istotnie wyższy od 30 lat? Poziom istotności $\alpha = 0,05$.
11. W celu sprawdzenia, czy po dokonaniu usprawnienia w silniku samochodowym zmalało zużycie paliwa, przeprowadzono jazdy próbne i otrzymano następujące wyniki:
przed usprawnieniem: 5.7, 6.5, 6.1, 5.5, 5.0, 6.1, 6.2, 5.9 (l/100 km);
po usprawnieniu: 4.9, 5.0, 4.7, 5.0, 5.0, 4.0 (l/100 km).
Założmy, że zużycia paliwa są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych o równych wariancjach. Na poziomie istotności $\alpha = 0,1$ zweryfikować hipotezę o jednakowym średnim zużyciu paliwa przed i po zmianie, przeciwko hipotezie mówiącej o mniejszym zużyciu paliwa po przeróbkach.

12. Przyjęto, że stopy zwrotu z inwestycji A i B są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym z tą samą wariancją. Poprzednie stopy zwrotu były równe (w %):
 A : 10, 15, 0, 1, 12, 7, 7, 8, 11, 12, 11, 14, 11, 8, 3, -2, 2.
 B : 20, -10, 5, 9, -3, -12, -5, 1, 1, 6, 5, 16.
 Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$, zweryfikować hipotezę, że oczekiwane stopy zwrotu z obu inwestycji są jednakowe przeciwko hipotezie, że oczekiwana stopa zwrotu inwestycji B jest większa.
13. Miesięczne wydatki na żywność w przeliczeniu na jedną osobę w gospodarstwach pracowniczych (w PLN) mają rozkład normalny. Na podstawie badania 400 losowo wybranych gospodarstw stwierdzono, że średnie wydatki w tej grupie wynoszą 250 PLN ze współczynnikiem zmienności równym 40%.
- Czy na podstawie poniższych danych, zakładając prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju na poziomie 0.05, można uznać, że średnie wydatki na żywność ogółu gospodarstw przekraczają 240 PLN?
 - Przy jakim poziomie istotności podjęta decyzja weryfikacyjna ulegnie zmianie?
14. Rozkład tygodniowego czasu poświęconego na naukę poza uczelnią studentów I roku studiów dziennych SGH jest rozkładem $N(m, 5)$, natomiast w rozkładzie normalnym tygodniowego czasu studentów II roku odchylenie standardowe wynosi 6 godz. Pobrano niezależnie 10-elementową próbę studentów I roku oraz 24-elementową studentów II roku; średnie w tych próbach wynosiły odpowiednio: 20 godz. oraz 15 godz.
- Czy na poziomie istotności 0.1, można przyjąć, iż średni czas nauki poza uczelnią ogółu studentów I roku jest wyższy niż na roku II?
 - Do jakiego przedziału liczbowego powinny należeć wartości odpowiedniej statystyki, aby nie było podstaw do odrzucenia weryfikowanej hipotezy?
15. W wyniku badania zmian poziomu płac pracowników firmy Intraco w Warszawie w latach 1993-1994 otrzymano następujące dane dla 50 losowo wybranych pracowników w każdym roku:
- 1993: $\bar{X}=398$ PLN, $s=118,7$ PLN, $n=50$,
 1994: $\bar{X}=654$ PLN, $s=213,5$ PLN, $n=50$.
 Czy na podstawie powyższych wyników można mówić o wzroście poziomu płac ogółu pracowników Intraco w 1994 r. W porównaniu z rokiem 1993?
16. Wiadomo, że rozkład wyników pomiaru głębokości morza w pewnym rejonie jest normalny z odchyleniem standardowym 5 m. Dokonano 5 niezależnych pomiarów głębokości morza w pewnym rejonie i otrzymano następujące wyniki (w m): 862, 870, 876, 866, 871.
- Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że średnia głębokość morza w tym rejonie równa jest 870 m.
 - W innym rejonie rozkład wyników pomiaru głębokości morza jest $N(m, 10)$. Dla 10 niezależnych pomiarów otrzymano $\bar{X}=865$ m. Czy można uważać, że przeciętna głębokość morza w obu rejonach jest jednakowa? Poziom istotności $\alpha = 0.01$.
17. Stalowe obręcze produkowane są na dwóch maszynach: A i B . Kontroler jakości uważa, że obręcze produkowane przez maszynę A mają średnicę istotnie większą od średnicy obręczy produkowanych przez maszynę B . Zakładamy, że rozkłady średnic obręczy dla maszyn A i B są: $N(m_1, \sigma_1)$ i $N(m_2, \sigma_2)$ oraz $\sigma_1 = \sigma_2$. Sprawdzić, czy kontroler jakości ma rację, jeśli dla 10 losowo wybranych obręczy z maszyny A otrzymano $\bar{X}_1=1.051$ i $s_1^2=0.000397$, a dla 15 obręczy z maszyny B mamy $\bar{X}_2=1.036$ i $s_2^2=0.00021$. Poziom istotności $\alpha = 0.01$.
18. W zakładzie A otrzymano następujące informacje o 16 pracownikach:
- | Wiek pracowników | 20-24 | 24-28 | 28-32 | 32-36 |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|
| Liczba pracowników | 4 | 6 | 4 | 2 |
- Czy można uważać (zakładając, że wiek ma rozkład normalny), że wariancja wieku jest większa niż 10, na poziomie istotności $\alpha = 0,05$?
19. Tygodniowe wydatki na żywność mają rozkład normalny. Uważa się, że wartość przeciętna tych wydatków jest wyższa niż 40 zł.
- Zweryfikować prawdziwość tego sądu na poziomie istotności $\alpha = 0,01$, jeśli dla 10 losowo wybranych rodzin otrzymano $\bar{X}=48$ zł i $s=10,8$ zł.

b) Czy na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ można uważać, że odchylenie standardowe wydatków wynosi 9 zł?

20. W dwóch firmach przewozowych badano odległości przejazdów i otrzymano:

dla firmy A: wielkość próby - 15 przewozów i odchylenie standardowe z próby - 158 km,

dla firmy B: wielkość próby - 10 przewozów i odchylenie standardowe z próby - 283 km.

Czy można na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ uważać, że wariancje odległości przewozów w obu firmach są takie same?

21. Badano zawartość nikotyny w dwóch gatunkach papierosów. W próbie liczącej 50 papierosów gatunku A zaobserwowano średnią arytmetyczną zawartości nikotyny $\bar{X}_1=23,8$ mg przy odchyleniu standardowym $s_1=1,2$ mg. W próbie liczącej 40 papierosów gatunku B zaobserwowano: $\bar{X}_2=24,1$ mg, $s_2=1,4$ mg.

a) Czy można uważać, na poziomie istotności 0,05, że przeciętna zawartość nikotyny w papierosach gatunku A jest niższa niż w papierosach gatunku B?

b) Na poziomie istotności $\alpha = 0,01$ zweryfikować hipotezę, że wariancje zawartości nikotyny w obu gatunkach papierosów są jednakowe.

22. Badając odruchy warunkowe u psa otrzymano następujące ilości śliny wydzielającej się przy bodźcu: 0,76; 0,54; 0,65; 0,40; 0,27; 0,65; 0,16, natomiast przy drugim bodźcu otrzymano: 0,32; 0,40; 0,20; 0,09; 0,38; 0,50; 0,15; 0,28. Na poziomie istotności 0,05 zweryfikować hipotezę, że przy drugim bodźcu ilość wydzielającej się śliny psa jest mniejsza zakładając, że badana cecha ma rozkład normalny. Jaką hipotezę należy najpierw zweryfikować?

23. Pomiary prędkości samochodów osobowych na pewnym odcinku autostrady dały wyniki:

Prędkość w $\frac{\text{km}}{\text{godz.}}$	Liczba samochodów
poniżej 80	7
80 - 90	30
90 - 100	40
100 - 110	69
110 - 120	48
powyżej 120	6

Na poziomie istotności $\alpha = 0,01$ zweryfikowano hipotezę, że ponad 55% samochodów na tym odcinku jedzie z prędkością przynajmniej 100 $\frac{\text{km}}{\text{godz.}}$. Jaka będzie decyzja, gdy $\alpha = 0,1$?

24. W ciągu 100 dni obserwowano liczbę awarii w sieci wodno-kanalizacyjnej w pewnym rejonie miasta i otrzymano:

Liczba awarii	0	1	2	3	4	5
Liczba dni	13	30	25	15	10	7

Czy można uważać, że mniej niż 60% obserwacji to takie dni, kiedy zarejestrowano przynajmniej 2 awarie? Poziom istotności $\alpha = 0,1$.

25. Zbadano wiek pracowników w dwóch przedsiębiorstwach A i B i otrzymano:

Wiek pracownika	20-30	30-40	40-50	50-60
Liczba pracowników w A	10	20	40	30
Liczba pracowników w B	10	30	45	15

Na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ zweryfikować hipotezę, że odsetek pracowników w wieku 40-50 lat w obydwu przedsiębiorstwach jest taki sam.