statystyka matematyczna - ćwiczenia
matematyka finansowa 2 rok
lista 8

1. Rozkład prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y), gdzie X - roczny dochód w tys. zł i Y - lata nauki, podany został w poniższej tablicy:

	8	12	16
10	0,09	0,04	0,01
20	0,08	0,17	0,02
30	0,07	0,14	0,13
40	0,02	0,04	0,08
50	0,01	0,02	0,08

   a) Wyznaczyć rozkład brzegowy zmiennej losowej X i Y.
   b) Policzyć $P(X = 10/Y = 8)$ i $P(X = 10/Y = 16)$.
   c) Policzyć $P(X = 50/Y = 8)$ i $P(X = 50/Y = 16)$.
   d) Odpowiedzieć na pytanie, czy warto się uczyć.

2. Rozkład prawdopodobieństw liczby treningów drużyny piłkarskiej w ciągu tygodnia (X) i liczby meczów wygranych w sezonie (Y) zawiera tablica:

	0	1	2	3
1	0,04	0,04	0,00	0,00
2	0,00	0,12	0,12	0,16
3	0,00	0,04	0,18	0,30

   a) Znaleźć rozkłady brzegowe i dystrybuanty zmiennej X i Y.
   b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że drużyna wygra w sezonie przynajmniej jeden mecz.
   c) Obliczyć prawdopodobieństwo, że trenując trzy razy w tygodniu drużyna wygrała w sezonie trzy mecze.
   d) Obliczyć prawdopodobieństwo, że drużyna trenowała więcej niż dwa razy w tygodniu, jeśli wiadomo, że wygrała dwa mecze.
   e) Obliczyć prawdopodobieństwo, że drużyna trenowała nie więcej niż dwa razy w tygodniu.
   f) Obliczyć kowariancję zmiennych X i Y.

3. Wektor (X, Y) ma rozkład dany w następującej tabeli:

	-1	0	1
1	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$

   a) Wyznaczyć rozkłady brzegowe zmiennych X i Y.
   b) Sprawdzić, czy zmienne X i Y są niezależne.
   c) Wyznaczyć rozkład warunkowy zmiennej Y przy warunku $X = -1$.
   d) Obliczyć $E(X|Y = 2)$.

4. Rozkład wektora (U, W) jest dany w następującej tabeli:

	-1	0	2
-1	$\frac{1}{24}$	c	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$

   a) Znaleźć stałą c.
   b) Sprawdzić, czy zmienne U i W są niezależne.
   c) Wyznaczyć rozkład warunkowy zmiennej U przy warunku $W = 0$.
   d) Obliczyć $\text{cov}(X, Y)$.

5. W pudełku jest 10 losów. Jeden z nich wygrywa 100 zł, dwa wygrywają 1 zł, a pozostałe są puste. Ciągniemy kolejno i bez zwrotu dwa losy. Niech X oznacza wygraną przypadającą na pierwszy wyciągnięty los, a Y wygraną przypadającą na drugi los. Obliczyć:
   a) rozkład wektora (X, Y);
   b) $E(X|Y = 0)$;
   c) $\mathrm{cov}(X, Y)$.

6. Dana jest funkcja
$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{dla } 0 < x < 1 \text{ i } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{dla p.p.} \end{cases}.$$
   a) Sprawdzić, czy f jest gęstością dwuwymiarowego wektora losowego (X, Y).
   b) Wyznaczyć rozkład warunkowy (dystrybuantę i gęstość) X przy warunku $Y = \frac{1}{2}$.
   c) Obliczyć $E(X)$ i $E(Y)$.

7. Dana jest funkcja
$$f(x,y) = \begin{cases} cxy & \text{dla } 0 \le x \le 1 \text{ i } 0 \le y \le x \\ 0 & \text{dla p.p.} \end{cases}.$$
   a) Dobrać stałą c tak, aby funkcja f była gęstością pewnego wektora losowego (X, Y).
   Obliczyć
   b) $P(X > \frac{1}{2})$;
   c) $E(Y|X = \frac{1}{2})$;
   d) $\mathrm{cov}(X, Y)$.

8. Wektor (X, Y) służy do opisu stóp zwrotu dwóch projektów inwestycyjnych i ma gęstość
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{43}(x^2 + xy + 2y^2) & \text{dla } 0 \le x \le 3 \text{ i } 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{dla p.p.} \end{cases}$$
(przez stopę zwrotu projektu rozumiemy dochód przypadający na jednostkę zainwestowanego kapitału). Obliczyć:
   a) brzegowe rozkłady zmiennych (X) i (Y);
   b) przeciętną stopę zwrotu z drugiego projektu, jeśli w pierwszym projekcie stopa zwrotu równa się 1,5.

9. W pewnym badaniu ankietowym przeprowadzonym wśród studentów uczelni warszawskich zanotowano m.in. wysokość miesięcznych wydatków na utrzymanie i miejsce pochodzenia studenta. Dla wylosowanej grupy 1000 studentów otrzymano następujące dane:

	Wieś	Miasta do 50 tys. mieszkańców	Miasta powyżej 50 tys. mieszkańców	$n_{i.}$
200-400	40	100	20	160
400-600	90	250	30	370
600-800	100	120	150	370
800-1000	20	30	50	100
$n_{.j}$	250	500	250	1000

Sprawdzić, czy występuje zależność wydatków na cele kulturalne (X) od miejsca pochodzenia (Y). Obliczyć wartość współczynnika V Cramera.

10. W przedsiębiorstwie A wprowadzono eksperymentalnie do produkcji nowe urządzenie i obserwowano jego pracę przez 100 dni, dokonując pomiarów liczby braków produkowanych detali (x_i - liczba sztuk/dzień) i liczby awarii automatu (y_j - liczba awarii/dzień). Uzyskano następujące wyniki:

	0-5	6-11	Razem
0-4	7	12	19
5-9	12	44	56
10-14	17	8	25
Razem	36	64	100

Określić siłę zależności liczby braków (X) i liczby awarii automatu (Y), stosując współczynnik zbieżności V Cramera. Jaka jest jego interpretacja?

11. Istnieje przypuszczenie, że częste infekcje górnych dróg oddechowych zależą od liczby wypalanych dziennie papierosów. W pewnym mieście przeprowadzono odpowiednie badania, otrzymując poniższe dane:

	0	1-5	6-10	11-20	21 i więcej	Razem
Nie choruje	14	3	-	-	-	17
Choruje rzadko	20	42	9	2	1	74
Choruje często	6	15	39	49	57	166
Razem	40	60	48	51	58	257

Sprawdzić, czy prawdziwe jest powyższe przypuszczenie, stosując test niezależności chi-kwadrat i przyjmując poziom istotności 0,02. Jaka jest siła tego związku?

12. Na I roku studiów dziennych wyniki egzaminów w sesji letniej kształtowały się następująco:

	Ndst	Dst	Dobry	B.dobry
Kobiety	28	22	32	18
Mężczyźni	34	30	36	10

Zbadać, czy rozkład stopni zależy od płci. Założyć poziom istotności $\alpha = 0,01$.

13. Poniższa tablica przedstawia dwuwymiarowy rozkład czasu pisania pracy kontrolnej i ocen uzyskanych z tej pracy w grupie 25 studentów:

	50-60	60-70	70-80	80-90	$n_{i.}$
2	2	0	0	2	4
2,5	0	1	0	2	3
3	0	0	1	6	7
3,5	0	1	2	1	4
4	1	0	1	2	4
4,5	0	0	1	0	1
5	0	0	0	2	2
$n_{.j}$	3	2	5	15	25

Wyznaczyć:

a) średnie i wariancje dla rozkładów brzegowych zmiennych X i Y;

b) średnie i wariancje dla rozkładów warunkowych zmiennych X i Y;

c) kowariancję dla rozkładu łącznego;

d) współczynnik korelacji ocen uzyskanych z pracy i czasu pisania pracy;

e) wskaźnik krzywoliniowości zależności ocen od czasu pisania pracy;

f) wskaźnik korelacyjny ocen z pracy względem czasu jej pisania;

g) określić kształt zależności ocen uzyskanych przez badanych studentów od czasu pisania pracy w oparciu o empiryczną krzywa regresji ocen względem czasu pisania.