zadania 5 listopada 2013

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - σ-ciało zbiorów borelowskich, tj. najmniejsze σ-ciało zawierające przedziały typu $(-\infty, a)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

1. Pokazać, że przedziały $[a,b), [a,b], (a,b], (a,b), (-\infty,a], (a,\infty), [a,\infty)$ oraz $\{a\}$ są borelowskie.

   rozwiązanie:
   Wystarczy zapisać powyższe zbiory następująco i skorzystać z warunków lub własności σ-ciała:

   a) $[a,\infty) = \mathbb{R} \setminus (-\infty, a)$;
   b) $(-\infty, a] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty, a + \frac{1}{n})$;
   c) $(a,\infty) = \mathbb{R} \setminus (-\infty, a]$;
   d) $[a,b) = [a,\infty) \setminus [b,\infty)$;
   e) $[a,b] = (-\infty,b] \cap [a,\infty)$;
   f) $(a,b] = (-\infty,b] \cap (a,\infty)$;
   g) $(a,b) = (-\infty,b) \cap (a,\infty)$;
   h) $\{a\} = (-\infty,a] \cap [a,\infty)$.

2. Ile osób powinna liczyć grupa, aby prawdopodobieństwo zdarzenia, że znajdą się w niej co najmniej dwie osoby obchodzące urodziny tego samego dnia było większe od $\frac{1}{2}$?

   rozwiązanie:
   Przyjmijmy pewne upraszczające założenia:

   - rok ma 365 dni;
   - wybrana osoba obchodzi urodziny każdego dnia z jednakowym prawdopodobieństwem.

   Niech k oznacza liczbę osób. Wtedy zdarzenia elementarne są wariacjami k-elementowymi ze zbioru 365-elementowego. Zatem

   $$\bar{\bar{\Omega}} = 365^k.$$

   Niech A - oznacza zdarzenie polegające na tym, że co najmniej dwie osoby w grupie obchodzą urodziny tego samego dnia; wtedy A' - jest zdarzeniem polegającym na tym, że żadne dwie osoby w grupie nie obchodzą urodzin tego samego dnia. Zauważmy, że

   $$\bar{\bar{A}}' = V_{365}^k = \frac{365!}{(365-k)!} = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-k+1).$$

   Wtedy

   $$P(A') = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-k+1)}{365^k}$$

   Podejście nieeleganckie.
   Prawdopodobieństwo zdarzenia A' można zapisać następująco

   $$P(A') = \prod_{j=1}^{k} \frac{365-j+1}{365} = \frac{365-k+1}{365} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} \frac{365-j+1}{365}$$

   i wykorzystując arkusz kalkulacyjny policzyć wartości tego prawdopodobieństwa dla kolejnych wartości k, otrzymując

k	1	2	...	20	21	22	23	...
$P(A')$	1	0,9973	...	0,5886	0,5563	0,5243	0,4927	...

Widzimy zatem, że dla $k \geq 23$

$$P(A) = 1 - P(A') \geq \frac{1}{2}.$$

Rozwiązanie eleganckie. Zacznijmy udowodnienia pomocniczego lematu

Lemat 1 *Dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność*

$$1 + x \leq e^x.$$

uzasadnienie:
Rozważmy funkcję $f(x) = e^x - 1 - x$. Funkcja ta jest ciągła w $\mathbb{R}$. Liczmy jej pochodną

$$f'(x) = e^x - 1,$$

stąd

$$f'(x) = 0 \iff x = 0.$$

Ponadto łatwo sprawdzić, że

$$f'(x) > 0 \iff x > 0$$

oraz

$$f'(x) < 0 \iff x < 0.$$

Wnioskujemy stąd, że funkcja $f(x)$ w punkcie $x = 0$ posiada minimum globalne. Zatem dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$f(x) \geq f(0) = 0,$$

co równoważne jest nierówności

$$e^x \geq 1 + x.$$

Wyrażając prawdopodobieństwo zdarzenia A' następująco

$$P(A') = (1 - \frac{1}{365})(1 - \frac{2}{365}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{k-1}{365})$$

czynniki występujące w powyższym iloczynie możemy ograniczyć z góry wykorzystując nierówność podaną w Lemacie 1, tj.

$$\begin{aligned} P(A') &\leq e^{-\frac{1}{365}} \cdot e^{-\frac{2}{365}} \cdot \ldots \cdot e^{-\frac{k-1}{365}} \\ &= e^{-\frac{1+2+\ldots+(k-1)}{365}} \\ &= e^{-\frac{k(k-1)}{730}}. \end{aligned}$$

Interesują nas te wartości k, dla których $P(A) \geq \frac{1}{2}$ lub równoważnie, dla których $P(A') < \frac{1}{2}$. Będzie tak, gdy

$$e^{-\frac{k(k-1)}{730}} < \frac{1}{2}.$$

Logarytmując stronami powyższą nierówność otrzymujemy

$$-k(k-1) < -730 \ln 2.$$

Pozostaje nam zatem znaleźć naturalne rozwiązania nierówności kwadratowej

$$k^2 - k - 730 \ln 2 > 0$$

Odp: $k \geq 23$.