rachunek prawdopodobieństwa - zadania

ogólna definicja prawdopodobieństwa, własności - 6.10.2012

1. **(d, 1pkt)** Udowodnić twierdzenie 2 tj. własności prawdopodobieństwa (W1)-(W7).
2. Niech $\Omega = [0,1]$ oraz niech Σ będzie pewną σ-algebrą podzbiorów odcinka $[0,1]$. Udowodnić, że funkcja
$$P(A) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad \frac{1}{2} \in A \\ 0 & \text{gdy} \quad \frac{1}{2} \notin A \end{cases}$$
określona na zbiorach $A \in \Sigma$ spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa.
3. Pokazać, że jeśli $P(A) = 0,7$ i $P(B) = 0,8$, to $P(A \cap B) \geq 0,5$.
4. Zdarzenia A i B są rozłączne oraz $A \cup B = \Omega$. Wiedząc, że $P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{16}$, oblicz $P(A)$ i $P(B)$.
5. Czy prawdą jest, że w dowolnej przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P) dla dowolnego $A \in \Sigma$ zachodzi równoważność
$$P(A) = 0 \iff A = \emptyset.$$
6. **(d, 1pkt/2)** Dane są $P(A') = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ i $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Obliczyć $P(B'), P(A \cap B')$ i $P(B \setminus A)$.
7. Dane są $P(A' \cap B') = \frac{1}{2}, P(A') = \frac{2}{3}$, ponadto $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Obliczyć $P(B)$ i $P(A' \cap B)$.
8. Niech $\Omega = \{\omega_n, n = 1, 2, \ldots\}, \Sigma = 2^\Omega$. Weźmy ciąg $p_n = c3^{-n}, n = 1, 2, \ldots$. Dobrać stałą c tak, aby ciąg (p_n) określał prawdopodobieństwo P na Σ tak, że $P(\{\omega_n\}) = p_n$. Obliczyć $P(\{\omega_3, \ldots, \omega_9\})$.
9. Jan i Piotr chodzą na wykład z analizy matematycznej. Jan chodzi na co drugi wykład, Piotr opuszcza 10% wykładów, natomiast na 45% wykładów są obecni obaj. Obliczyć prawdopodobieństwo, że
   a) choć jeden z nich jest na wykładzie,
   b) dokładnie jeden z nich jest na wykładzie,
   c) żaden z nich nie jest na wykładzie.
10. Wykazać, że jeśli $P(A) + P(B) > 1$, to A i B nie mogą się wykluczać.
11. Niech $P(A) = x, P(B) = x^2$. Wiadomo, że oba zdarzenia się wykluczają, ale jedno z nich musi zajść. Obliczyć x.
12. Rzucamy niesymetryczną sześcienną kostką. Szóstka wypada z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$, a pozostałe liczby mają równe szanse wypadnięcia. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wypadnie nieparzysta liczba oczek.
13. **(d, 1pkt/3)** Niech P_1 i P_2 będą prawdopodobieństwami określonymi na σ-ciele Σ podzbiorów Ω. Udowodnić, że funkcja
$$P(A) = \frac{1}{3}P_1(A) + \frac{2}{3}P_2(A)$$
spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa.

klasyczna definicja prawdopodobieństwa

14. Rzucamy 3 razy monetą. Opisać przestrzeń probabilistyczną odpowiadającą temu doświadczeniu (co to są Ω, Σ, P?).
15. Dziesięć książek ustawiono losowo na jednej półce. Obliczyć prawdopodobieństwo, że trzy określone książki znajdą się obok siebie.
16. **(d, 1pkt/4)** Cyfry $0, 1, 2, \ldots, 9$ ustawiono losowo. Jakie jest prawdopodobieństwo, że
   a) między 0 i 1 znajduje się dokładnie pięć cyfr?
   b) $7, 8$ i 9 będą stały obok siebie?
17. Mamy $2n$ kartek ponumerowanych liczbami od 1 do $2n$ oraz $2n$ podobnie ponumerowanych kopert. Wkładamy losowo po jednej kartce do każdej koperty. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma liczby na kopercie i na znajdującej się w niej kartce jest dla każdej koperty parzysta?

18. **(d, 1pkt/5)** Mamy pięć odcinków, których długości równe są odpowiednio 1,3,5,7,9. Obliczyć prawdopodobieństwo, że z trzech odcinków wziętych losowo można zbudowac trójkąt.

19. Obliczyć prawdopodobieństwo, że dwa losowo wybrane wierzchołki sześcianu jednostkowego będą odległe o więcej niż 1.

20. Z talii 52 kart losujemy 7 kart bez zwracania. Obliczyć prawdopodobieństwo, że

    a) dokładnie trzy karty będą pikami;
    b) co najmniej dwie karty będą kierami;
    c) co najwyżej pięć kart będzie treflami;
    d) dwie karty będą kierami, trzy treflami, jedna - karo i jedna - pik.

21. Z 52 kart wylosowano 6. Jaka jest szansa, że wśród wylosowanych kart będą karty czerwone i czarne?

22. Ze zbioru X, gdzie $X = \{1, \ldots, n\}, (n \geq 2)$, losujemy kolejno dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pierwsza z wylosowanych liczb jest większa od drugiej.

23. Ze zbioru liczb od 1 do 10 wybieramy kolejno dwie (bez zwracania) i od pierwszej odejmujemy drugą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ich różnica będzie większa od 2.

24. W zbiorze $2n$ osób ($n \geq 1$) wyróżniono dwie. Czy bardziej prawdopodobne jest, że siadając losowo wokół stołu przy którym jest $2n$ miejsc, wyróżnione osoby znajdą się obok siebie, czy na przeciw?

25. Rok liczy 365 dni. Obliczyć prawdopodobieństwo, że 3 losowo wybrane panie

    a) urodziły się tego samego dnia;
    b) pierwsza w styczniu, druga w marcu, trzecia w drugim półroczu.

26. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania sumy 10 oczek przy równoczesnym rzucie trzema kostkami.

27. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że

    a) suma wyrzuconych oczek jest liczbą parzystą;
    b) iloczyn wyrzuconych oczek jest liczbą nieparzystą.

28. Rzucamy n kostkami do gry. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że na wszystkich kostkach wypadła ta sama liczba oczek.

29. **(d, 1 pkt/6)** Rzucamy dwunastoma kostkami do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy każdą ściankę dwukrotnie.

30. Pięć zesztów wrzucamy do trzech szuflad. Co jest bardziej prawdopodobne

    a) w pewnej szufladzie będą co najmniej trzy zeszyty;
    b) co najmniej jedna szuflada będzie pusta?

31. W n rozróżnialnych komórkach rozmieszczono losowo r nierozróżnialnych cząstek, zakładamy, że wszystkie możliwe rozmieszczenia są jednakowo prawdopodobne. Obliczyć prawdopodobieństwo, że

    a) ustalona komórka zawiera dokładnie k cząstek ($k < r$);
    b) dokładnie m komórek zostało pustych ($m < n$);
    c) w każdej komórce są conajmniej dwie cząstki ($r \geq 2n$).

32. (problem roztargnionej sekretarki) Do n zaadresowanych kopert włożono w sposób losowy n listów do różnych adresatów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żaden z dwóch ustalonych adresatów nie dostanie właściwego listu.

33. (problem roztargnionej sekretarki jeszcze raz) Do n zaadresowanych kopert włożono w sposób losowy n listów do różnych adresatów. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że chociaż jeden list trafi do właściwej koperty. Wyznaczyć granicę tego prawdopodobieństwa gdy $n \to \infty$.

prawdopodobieństwo geometryczne - 20-21.10.2012

34. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana z odcinka $[0, 2\pi]$ liczba x należy do dziedziny funkcji
    a) $f(x) = \log\sqrt{\cos x - 1}$;
    b) $g(x) = \log\sqrt{\cos x}$.
35. Z odcinka $[0, 1]$ wybrano losowo punkt o współrzędnej x. Wyznaczyć:
    a) $P(\min(x, \frac{1}{4}) < a)$,
    b) $P(\max(x, \frac{1}{2}) < a)$.
36. **(d, 1 pkt/7)** Na odcinku $[0, 1]$ umieszczono losowo dwa punkty A i B. Jakie jest prawdopodobieństwo, że środek odcinka AB należy do odcinka $[0, \frac{1}{3}]$?
37. Na odcinku o długości l wybrano losowo dwa punkty. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że odległość między nimi jest mniejsza niż k, gdzie $0 < k < l$?
38. **(d, 1 pkt/8)** Z odcinka $[-1, 1]$ wybieramy losowo dwie liczby p i q. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że równanie kwadratowe $x^2 + px + q = 0$ ma
    a) dwa pierwiastki rzeczywiste,
    b) dokładnie jeden pierwiastek.
39. Odcinek długości 1 dzielimy losowo na trzy części. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że z tak uzyskanych odcinków można zbudować trójkąt?
40. Na nieskończoną szachownicę o boku kwadratu równym a rzucamy monetę o średnicy $2r < a$. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że moneta przetnie co najwyżej jeden bok kwadratu.
41. Na nieskończoną płaszczyznę poliniowaną liniami równoległymi w odległości l rzucamy losowo igłę o długości $2r, 2r < l$. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że igła dotknie jednej z prostych.

prawdopodobieństwo warunkowe, całkowite, wzór Bayesa

42. Z talii 8 kart - czterech króli i czterech asów - wybieramy losowo dwie karty. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybrano 2 asy, jeśli wiemy, że:
    a) wybrano co najmniej jednego asa,
    b) wśród wybranych kart jest czerwony as,
    c) wśród wybranych kart jest as trefl.
43. Rzucamy trzema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na żadnej kostce nie wypadła szóstka, jeśli na każdej kostce wypadła inna liczba oczek?
44. Z urny zawierającej 7 kul białych i 3 czarne wyciągnięto losowo 3 kule. Jeśli wiadomo, że wśród wylosowanych kul jest kula czarna, to jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pozostałe dwie są białe?
45. W brydżu przed licytacją gracz E widzi, że nie ma asa. Jaka jest szansa, że jego partner ma 2 asy?
46. W urnie są trzy kule białe i dwie czarne. Wyciągnięto jedną kulę z urny i wyrzucono bez oglądania, a potem wyciągnięto następną. Jaka jest szansa, że za drugim razem wyciągnięto kulę białą?
47. Wśród 65 monet jest jedna z dwoma orłami. Na wybranej losowo monecie wypadł orzeł sześć razy z rzędu. Jaka jest szansa, że była to moneta z dwoma orłami?
48. Wybieramy losowo jeden ze zbiorów $A = \{1, 2, \ldots, 62\}$ lub $B = \{1, 2, \ldots, 124\}$. Z wybranego zbioru losujemy liczbę x. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że liczba $x^2 + 1$ jest podzielna przez 10.
49. **(d, 1 pkt/9)** Na strzelnicy jest dwóch strzelców. Pierwszy z nich trafia z prawdopodobieństwem 0,5, drugi 0,8. Rzucili monetę, by ustalić, który z nich odda strzał. Postronny obserwator, który może oglądać wyniki, ale nie widzi strzelców, zaobserwował, że oddany strzał był celny. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że strzelał pierwszy strzelec?

50. Urna zawiera n kul białych i m kul czarnych. Losujemy jedną kulę, a następnie wrzucamy ją ponownie do urny dorzucając dodatkowo k kul białych, jeśli była to kula biała lub k kul czarnych, jeśli była czarna. Obliczyć prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej z tak uzupełnionej urny.

51. Wojtek miał w portfelu monety: N złotówek i M pięciozłotówek, ale zgubił jedną monetę i nie wie o jakim nominale. Wyciągnięte losowo z portfela dwie monety okazały się złotówkami. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że zgubiona moneta była złotówką.

52. Pewna choroba występuje w $0,2\%$ ogółu ludności. Przygotowano test do jej wykrycia. Test daje wynik pozytywny u 97% chorych i 1% zdrowych. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana osoba jest chora, jeśli test tej osoby dał wynik pozytywny.

zdarzenia niezależne

53. Pokazać, że wylosowanie z talii 52 kart asa i wylosowanie karty czerwonej są zdarzeniami niezależnymi.

54. A, B są niezależne i $A \cup B = \Omega$. Wykazać, że $P(A) = 1$ lub $P(B) = 1$.

55. Załóżmy, że jeśli $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$. Udowodnić, że

    a) jeśli, A i B są rozłączne, to nie są niezależne;

    b) jeśli A i B są niezależne, to nie są rozłaczne.

56. Rzucamy trzy razy kostką do gry. Zdarzenie A polega na tym, że w pierwszym i drugim rzucie wypadła ta sama liczba oczek; zdarzenie B - ta samaliczba oczek wypadła w drugim i trzecim rzucie; C - w pierwszym i trzecim rzucie. Czy zdarzenia A, B i C są niezależne? Czy są parami niezależne?

57. Adam, Bolek i Czesio rzucają po kolei monetą. Wygrywa ten, który pierwszy wyrzuci orła. Znaleźć szanse wygranej dla każdego z graczy.

schemat Bernoulliego, uogólniony schemat Bernoulliego

58. Rzucono 10 razy kostką. Jaka jest szansa otrzymania:

    a) 6 oczek co najmniej raz?

    b) 5 oczek dokładnie 3 razy?

59. Rzucono 10 razy symetryczną kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w pierwszym rzucie otrzymano szóstkę, jeśli wiadomo, że otrzymano 3 szóstki?

60. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby sukcesów w ciągu n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym p.

61. Rzucono 100 razy kostką do gry. Jaka jest najbardziej prawdopodobna ilość wyrzuconych piątek?

62. Przeprowadzono serię doświadczeń według schematu Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu w każdym doświadczeniu równym p. Obliczyć prawdopodobieństwo uzyskania r-tego sukcesu dokładnie w $(k+r)$-tym doświadczeniu, $k = 0, 1, 2, \ldots$

63. Z odcinka $[0, 1]$ wylosowano 10 punktów, obliczyć prawdwopodobieństwo zdarzenia, że dokładnie trzy spośród wylosowanych punktów należą do odcinka $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$, oraz dokładnie cztery należą do odcinka $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

64. W urnie mamy N kul, wśród których M_1 jest białych, M_2 czarnych, M_3 zielonych i M_4 niebieskich ($M_1+M_2+M_3+M_4 = N$). Losujemy n razy po jednej kuli zwracając za każdym razem kulę do urny. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w n losowaniach otrzymamy k_1 kul białych, k_2 kul czarnych, k_3 kul zielonych i k_4 kul niebieskich, przy czym $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = n$.

65. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pan Kowalski nie trafi szóstki grając przez rok dwa razy w tygodniu w totolotka (typując 6 liczb z 49)?

zmienne losowe - 28.10.2012

66. Rzucamy kostką. Gdy wypadnie parzysta liczba oczek wygrywamy 2 zł, gdy wypadnie nieparzysta większa niż 1 - przegrywamy 4 zł, a gdy wypadnie 1 oczko to nic nie wygrywamy i nic nie przegrywamy. Wyznaczyć rozkład wygranych. Wyznaczyć dystrybuantę tego rozkładu.

67. Z kwadratu o boku a losowany jest punkt. Wartością zmiennej losowej X jest odległość od najbliższego boku. Wyznaczyć rozkład X.

68. Rzucamy pięcioma symetrycznymi monetami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych orłów. Podać rozkład zmiennej losowej.

69. **(d, 1pkt/10)** Z sześcianu o krawędzi 1 wylosowano trzy wierzchołki. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe polu trójkąta utworzonego z tych wierzchołków. Obliczyć rozkład zmiennej losowej. Wyznaczyć dystrybuantę tego rozkładu.

70. Losujemy n - krotnie (ze zwracaniem) liczbę spośród liczb od 1 do N. X największa spośród liczb uzyskanych w losowaniu. Obliczyć rozkład zmiennej losowej.

71. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe sumie wyrzuconych oczek. Znaleźć rozkład tej zmiennej losowej.

72. Czy można dobrać stałe a, b tak aby funkcja $F(x) = a \arctan x + b$ była dystrybuantą pewnego rozkładu ? Jeśli tak, to je podać wraz z uzasadnieniem.

73. Przy pomocy dystrybuanty wyrazić następujące prawdopodobieństwa:
$P(X > a),\ P(X \geq a),\ P(X < a),\ P(X \leq a),\ P(a < X < b),\ P(a \leq X < b),\ P(a < X \leq b),\ P(a \leq X \leq b)$.

74. **(d, 1pkt/11)** Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} & t < 0 \\ 0,1 + t & \text{dla} & 0 \leq t < 0,5 \\ 0,4 + t & \text{dla} & 0,5 \leq t < 0,55 \\ 1 & \text{dla} & t \geq 0,55 \end{cases}$$

Wyznaczyć $P(X = \frac{1}{2}), P(X \in [0, \frac{1}{2}]), P(X < 0,55)$.

75. Dana jest gęstość określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & x \notin \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \end{cases}.$$
Nie licząc całki podać ile wynosi prawdopodobieństwo w punkcie $\frac{\pi}{4}$. Odpowiedź uzasadnij.

76. Czy można dobrać parametr a tak, aby podane funkcje były gęstościami pewnego rozkładu zmiennej losowej? Odpowiedź uzasadnij. W przypadku odpowiedzi pozytywnej policzyć ich dystrybuanty.

a) $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in \langle 0, 4 \rangle \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle 0, 4 \rangle \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in \langle -1, 4 \rangle \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle -1, 4 \rangle \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{dla } x \in \langle 0, 3 \rangle \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle 0, 3 \rangle \end{cases}$;

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x \cdot (2 - x) & \text{dla } x \in \langle 0, a \rangle \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle 0, a \rangle \end{cases}$;

77. **(d, 1pkt/12)** Dobrać tak stałą c, by funkcja

$$f(x) = \begin{cases} c \sin x & \text{dla} & x \in [0, \pi], \\ 0 & \text{dla} & x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

była gęstością, a następnie: a) wyznaczyć jej dystrybuantę, b) obliczyć $P(|X| < \frac{1}{3}\pi)$ i zinterpretować za pomocą wykresu gęstości i dystrybuanty.

78. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[-2,5]$ ($X \sim U[-2,5]$). Oblicz $P(X \geq 0)$.

79. **(d, 1pkt/13)** Wiemy, że X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$ i $P(X < 2) = \frac{3}{4}$. Obliczyć λ.

80. **(d, 1pkt/14)** Funkcje $f_i, i = 1, 2, 3$ są gęstościami rozkładów jednostajnych na odcinkach $(i-1, i)$. Wtedy są gęstościami także funkcje (odpowiedzieć *tak* lub *nie*):

   a) $f_1 + f_2 + f_3$,
   b) $f_2 \cdot f_3$,
   c) $|f_3 - f_1|$,
   d) $\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2$,
   e) $\max(f_1, f_2)$.

81. Zmienna losowa ma rozkład N(0,1). Oblicz prawdopodobieństwo

   a) $P(\{X > 0\})$
   b) $P(\{X > 2\})$
   c) $P(\{|X| < 1\})$
   d) $P(\{|X| > 1\})$
   e) $P(\{0 < X < 3\})$
   f) $P(\{-1 < X < 3\})$

82. Zmienna losowa ma rozkład N(1,2). Oblicz prawdopodobieństwo

   a) $P(\{|X| > 3\})$
   b) **(d, 1pkt/15)** $P(\{X^2 \leq \frac{3}{4} + X\})$

83. Waga osoby w pewnej grupie osób opisana jest (w kg) rozkładem normalnym N(75,16).

   a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba waży więcej niż 83 kg?
   b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba waży nie więcej niż 79 kg?
   c) Jaka jest frakcja osób mających wagę pomiędzy 71 a 80 kg?
   d) Wyznaczyć wartość wagi której nie przekracza 80% badanej grupy.

84. X jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku [0,1]. Znaleźć dystrybuantę i gęstość następujących zmiennych losowych

   a) $Y = aX + b$ gdzie $a, b \in R \wedge a \neq 0$;
   b) $Y = 2X^2 - 1$;
   c) $Y = -\ln(1 - X)$;
   d) $Y = -\ln X$;
   e) $Y = X^k, k \in N$;

85. X ma rozkład wykładniczy ze współczynnikiem $\lambda > 0$. Znaleźć gęstość rozkładu:

   a) $Y = X^3$;
   b) $Y = 5X - 1$;
   c) $Y = 3X + 2$;

86. X ma rozkład normalny $N(0,1)$. Jaki rozkład ma zmienna $Y = aX + b$ gdzie $a, b \in R, a > 0$?

87. Dana jest zmienna losowa $X \in N(0,1)$. Określamy zmienną losową $Y = X^2$. Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej Y.

88. Zmienna losowa X ma rozkład geometryczny z parametrem p. Jaki rozkład ma zmienna losowa $Y = (-1)^X$?

89. X ma rozkład wykładniczy ze współczynnikiem $\lambda > 0$. Znaleźć gęstość rozkładu:

   - $Y = \{X\}$, gdzie $\{X\} = X - [X]$ oznacza część ułamkową;
   - $Y(\omega) = k^2$, gdy $k \leq X(\omega) < k + 1, k = 0, 1, 2, \ldots$;

90. **(d, 1pkt/16)** Dana jest zmienna losowa $X \in N(0,1)$. Określamy zmienną losową $Y = |X|$. Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej Y.