

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI  
UNIwersytetu w Białymstoku

Bartosz Kosma Kwaśniewski

**Analiza spektralna operatorów  
generujących nieodwracalne  
układy dynamiczne**

ROZPRAWA DOKTORSKA  
NAPISANA W ZAKŁADZIE ANALIZY FUNKCJONALNEJ  
INSTYTUTU MATEMATYKI, POD KIERUNKIEM  
PROF. DR. HAB. ANDREIA LEBEDEVA

Białystok 2008



*A good stack of examples, as large as possible,  
is indispensable for a thorough understanding of  
any concept, and when I want to learn something  
new, I make it my first job to build one.*

P. R. Halmos



# Spis treści

Wstęp	iii
Przyjęte konwencje i oznaczenia	xiii
<b>1 Abstrakcyjne operatory przesunięcia z wagą oraz algebraiczno-operatorowa metoda rozszerzania układów dynamicznych</b>	<b>1</b>
1.1 Endomorfizmy algebr Banacha i odwzorowania częściowe . . . . .	1
1.2 Częściowe izometrie na przestrzeniach Banacha jako operatory generujące endomorfizmy algebr Banacha . . . . .	5
1.3 Operatory przesunięcia z wagą na przestrzeni Banacha. Przedłużenie endomorfizmu do częściowego automorfizmu . . . . .	10
1.4 Spektralny opis układu rozszerzonego $(\mathcal{B}, \delta)$ . . . . .	13
1.4.1 Dołączenie do algebry $\mathcal{A}$ rzutu $ST$ . . . . .	14
1.4.2 Opis częściowego układu dynamicznego $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$ dualnego do $(\mathcal{B}, \delta)$ i jego związek z granicą odwrotną . . . . .	16
Uwagi do rozdziału 1 . . . . .	23
<b>2 Zastosowanie metody opracowanej w Rozdziale 1 do rodziny odwzorowań logistycznych</b>	<b>25</b>
2.1 Operatory $T_\lambda$ generujące rodzinę odwzorowań logistycznych: $\lambda \in (0, 1]$	25
2.2 Rozszerzenia odwzorowań logistycznych generowane przez operatory $T_\lambda$	28
2.2.1 Struktura układu rozszerzonego $(\tilde{X}_\lambda, \tilde{\alpha}_\lambda)$ dla $\lambda < 1$ . . . . .	29
2.2.2 Układ rozszerzony dla $\lambda = 1$ . B-J-K continuum. . . . .	30
2.2.3 Granica Feigenbauma $\lambda_\infty$ . . . . .	31
2.3 Pierwsza kaskada bifurkacji: $\lambda \in (0, \lambda_\infty]$ . . . . .	32
2.4 Wartości parametru odpowiadające dynamice chaotycznej: $\lambda \in (\lambda_\infty, 1]$	39
2.4.1 Kaskada podwojenia B-J-K continuum . . . . .	39
2.4.2 Okna stabilnych orbit okresowych o okresach nieparzystych . . . . .	42
2.4.3 Kaskady bifurkacji następujące po oknach stabilności . . . . .	43
Uwagi do rozdziału 2 . . . . .	44
<b>3 Konkretnie operatory przesunięcia z wagą. Kolejne przykłady rozszerzeń klasycznych układów dynamicznych</b>	<b>47</b>
3.1 Konkretnie operatory przesunięcia z wagą i abstrakcyjne operatory przesunięcia z wagą . . . . .	48
3.2 Operatory generujące odwzorowania $z^N$ na okręgu $S^1$ . Solenoidy . . . . .	52

3.3	Ogólna konstrukcja konkretnych operatorów przesunięcia generujących jednowymiarowe układy dynamiczne . . . . .	54
3.3.1	Operatory generujące odwzorowania na odcinku . . . . .	55
3.3.2	Operatory generujące odwzorowania na grafach . . . . .	59
3.4	Symboliczne układy dynamiczne . . . . .	64
3.4.1	Operatory generujące pełne przesunięcia Markowa. Podkowy Smale'a . . . . .	67
3.5	Nieodwracalne operatory generujące odwracalne układy dynamiczne .	70
3.5.1	Nieodwracalne operatory generujące homeomorfizmy okręgu jako kompresje operatorów odwracalnych . . . . .	71
3.5.2	Klasyfikacja algebr rozszerzonych przez operatory związane z homeomorfizmami okręgu za pomocą liczb obrotu . . . . .	73
3.5.3	Operatory generujące przesunięcia na torusie . . . . .	77
	Uwagi do rozdziału 3 . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Promień spektralny operatorów przesunięcia z wagą</b>	<b>81</b>
4.1	Zasady wariacyjne. Miary $\alpha$ -niezmiennicze i $\alpha$ -ergodyczne. . . . .	81
4.2	Przykłady formuł wariacyjnych . . . . .	88
	Uwagi do rozdziału 4 . . . . .	98
<b>5</b>	<b>Zbiór modułów wartości spektralnych ważonego operatora przesunięcia</b>	<b>101</b>
5.1	Przynależność rzutu Riesz'a do algebry wag . . . . .	101
5.2	Opis zbioru $ \sigma(aT) $ . . . . .	106
5.3	Oszacowania ilości spójnych składowych $ \sigma(aT) $ niezależne od wagi $a$	109
	Uwagi do rozdziału 5 . . . . .	113
<b>6</b>	<b>Widmo ważonych operatorów przesunięcia w przestrzeni Hilberta</b>	<b>115</b>
6.1	Układy topologicznie wolne i Twierdzenie o Izomorfizmie . . . . .	115
6.2	Spektralne konsekwencje Twierdzenia o Izomorfizmie . . . . .	118
6.2.1	Niezmienniczość widma ze względu na obroty . . . . .	118
6.2.2	Koincydencja widma z widmem istotnym . . . . .	119
6.3	Widmo ważonych operatorów przesunięcia na przestrzeni Hilberta . .	120
	Uwagi do rozdziału 6 . . . . .	126
<b>7</b>	<b>Odwracalność operatorów w algebrach generowanych przez ważne operatory przesunięcia w przestrzeniach Hilberta.</b>	<b>127</b>
7.1	Algebra kowariancji $C^*(X, \alpha; Y)$ . . . . .	128
7.2	Klasyfikacja orbit i reprezentacje dyskretne algebry $C^*(X, \alpha; Y)$ . . .	128
7.3	Dyskretyzacja jako metoda badania odwracalności operatorów . . . .	133
7.4	Twierdzenia typu Wienera . . . . .	136
	Uwagi do rozdziału 7 . . . . .	138
<b>8</b>	<b>Odwracalność elementów algebr generowanych przez konkretne ważne operatory przesunięcia w przestrzeniach <math>L^p</math></b>	<b>139</b>
8.1	Odwracalność operatorów w przestrzeniach $\ell^p$ . . . . .	139

8.2	Odwracalność operatorów w przestrzeniach $L^p$ . . . . .	142
8.2.1	Dowód Twierdzenia 8.6 . . . . .	144
	Uwagi do rozdziału 8 . . . . .	149
<b>9</b>	<b>Widmo konkretnych ważonych operatorów przesunięcia w przestrzeniach <math>L^p</math></b> . . . . .	<b>151</b>
9.1	Sprowadzenie do widma operatorów na przestrzeni Hilberta $L^2$ . . . . .	151
9.2	Ważone operatory przesunięcia o dowolnie zadanym typowym widmie. . . . .	153
	Uwagi do rozdziału 9 . . . . .	157
	<b>Uzupełnienia: Algebra kowariancji <math>C^*(X, \alpha; Y)</math></b> . . . . .	<b>159</b>
A	Definicja i struktura $C^*(X, \alpha; Y)$ . . . . .	159
B	Twierdzenie o Izomorfizmie . . . . .	162
C	Zbiory $\alpha$ -niezmiennicze i ideały w $C^*(X, \alpha; Y)$ . . . . .	164
	<b>Podsumowanie</b> . . . . .	<b>169</b>
	<b>Spis rysunków</b> . . . . .	<b>171</b>
	<b>Indeks</b> . . . . .	<b>174</b>
	<b>Bibliografia</b> . . . . .	<b>177</b>





# Wstęp

Jednymi z najważniejszych operatorów liniowych pojawiających się w analizie, obok operatorów różniczkowych i całkowych, są tak zwane *operatory kompozycji*, lub ogólniej *ważone operatory kompozycji*, czyli odpowiednio operatory postaci

$$Tf(x) = f(\alpha(x)), \quad f \in F(X), \quad (1)$$

$$aTf(x) = a(x)f(\alpha(x)), \quad f \in F(X), \quad (2)$$

gdzie  $F(X)$  jest przestrzenią funkcji (lub też klas abstrakcji funkcji),  $\alpha : X \rightarrow X$  jest odwzorowaniem, a  $a(x)$  jest funkcją liczbową. Operatory tego typu mają zastosowanie np. w teorii układów dynamicznych, teorii równań funkcyjno-różniczkowych, analizie harmonicznej, teorii algebr operatorowych, czy też teorii reprezentacji.

Operatory kompozycji w teorii układów dynamicznych stosowano już na początku lat 30-tych ubiegłego wieku [Koo31]. Podejście to okazało się bardzo owocne i obecnie roli operatorów (1) w teorii ergodycznej [Hal60], [Wal82], [FKS87], czy też we współczesnej teorii chaosu [LM94] nie sposób przecenić. W kontekście dynamicznym operatory (1) rozważane są najczęściej na przestrzeniach  $L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , i wtedy, jeśli tylko odwzorowanie  $\alpha$  zachowuje miarę, są one izometriami.

Bardziej ogólne, ważne operatory złożań (2) przejawiają niemal wszystkie zasadnicze własności operatorów ograniczonych na przestrzeniach Banacha. W szczególności, w teorii operatorów stanowią one niewyczerpane źródło przykładów oraz kontrprzykładów; wymienić tu można np. konstrukcję Kakutaniego obrazującą zjawisko nieciągłości promienia spektralnego [Hal82, Problem 104], które w przypadku operatorów postaci (2) jest całkowicie naturalne, a nawet dość typowe [AL94, Podrozdział 1.6]. Począwszy od prac J. Von Neumanna stało się również jasne, że ważne i ciekawe struktury tworzą algebry generowane przez operatory postaci (2). W teorii  $C^*$ - oraz  $W^*$ -algebr takie algebry pełnią często rolę obiektów bazowych [Sak71], [BD75] i reprezentują się jako algebry uniwersalne typu *iloczyn krzyżowy* (ang. *crossed product*) [O'Don75], [Ped79], [Tom87] lub *algebry typu Toeplitza* [MS98]. Różnymi zagadnieniami związanymi z analizą spektralną operatorów kompozycji oraz ważonych operatorów kompozycji zajmowało się wielu autorów, m. in. S. K. Parrott, Yu. I. Karlovich, A.K. Kitover, H. Kamowitz, V. G. H. Kravchenko, K. Petersen, E. A. Nordgren, A. L. Shields, W. C. Ridge, R. K. Singh, A. Kumar, H. Takagi, J. W. Carleson, J. H. Shapiro, C. Cowen, R. Aron, M. Lindström, G. Gunatillake, Y. Latushkin, V. M. Gundlach, A. M. Stepin, A. B. Antonevich oraz A. V. Lebedev. Mimo iż takie badania obecnie są daleko posunięte, to teoria operatorów postaci (1) i (2) jest nadal rozwijana i zawiera jeszcze wiele ciekawych nierozwiązanych problemów. Co więcej,

tak jak teoria spektralna operatorów (1) jest już klasyczną częścią teorii układów dynamicznych, tak w świetle ostatnich wyników [ABL05'] staje się coraz bardziej jasne, że analiza spektralna operatorów (2) również odgrywa ważną rolę w ogólnej analizie takich obiektów związanych z układami dynamicznymi, jak np. miary ergodyczne, entropia, czy zasady wariacyjne.

W niniejszej rozprawie podążać będziemy linią badań zainicjowaną w latach 70-tych ubiegłego wieku przez A. B. Antonevicha i A. V. Lebedeva, bazującą na teorii  $C^*$ -algebr generowanych przez układy dynamiczne [AL94], [Ant96], [ABL05']. Aby wyjaśnić ideę tego podejścia rozważmy algebrę  $\mathcal{A}$  operatorów mnożenia na przestrzeni  $F(X)$  i potraktujmy operator  $aT$  jako złożenie elementu  $a \in \mathcal{A}$  z operatorem kompozycji  $T$ . Jeśli odwzorowanie  $\alpha$  jest odwracalne i operator kompozycji z odwzorowaniem  $\alpha^{-1}$  jest na  $F(X)$  poprawnie określony, to jest on operatorem odwrotnym do  $T$ . Wtedy dla każdego  $a \in \mathcal{A}$  operator  $TaT^{-1} \in \mathcal{A}$  jest operatorem mnożenia przez funkcję

$$(TaT^{-1})(x) = a(\alpha(x)).$$

Zatem sprzężenie operatorem  $T$  elementów algebry  $\mathcal{A}$  przenosi dynamikę ze zbioru  $X$  na algebrę  $\mathcal{A}$ , co pozwala na badanie operatorów  $aT$  niezależne od przestrzeni na której działają oraz umożliwia stosowanie zaawansowanego aparatu algebr operatorowych. Punktem wyjścia monografii [AL94] jest następująca

**Definicja 0.1.** (Antonevich, Lebedev, [AL94, 3.1]) Jeśli  $\mathcal{A}$  jest przemianą algebrą Banacha operatorów działających na przestrzeni Banacha  $E$  i  $T : E \rightarrow E$  jest odwracalną izometrią taką, że

$$T\mathcal{A}T^{-1} = \mathcal{A}, \quad (3)$$

to każdy operator postaci  $aT$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , nazywać będziemy *abstrakcyjnym ważonym operatorem przesunięcia z wagą w algebrze  $\mathcal{A}$* .

W przypadku, gdy  $E = H$  jest przestrzenią Hilberta i  $\mathcal{A}$  jest algebrą samosprężoną, czyli  $C^*$ -algebrą, opis widma  $\sigma(aT)$  abstrakcyjnego ważonego operatora przesunięcia  $aT$  można otrzymać w następujący sposób. Po pierwsze,  $T$  jest operatorem unitarnym i równość (3) jest równoważna inkluzjom

$$T\mathcal{A}T^* \subset \mathcal{A}, \quad T^*\mathcal{A}T \subset \mathcal{A}. \quad (4)$$

Po drugie, operacja sprzężenia operatorem  $T$  zadaje na  $\mathcal{A}$  automorfizm  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ :

$$\delta(a) := TaT^*, \quad a \in \mathcal{A}. \quad (5)$$

Na mocy twierdzenia Gelfanda-Naimarka  $C^*$ -algebra  $\mathcal{A}$  jest izomorficzna z algebrą  $C(X)$  funkcji ciągłych na zwartej przestrzeni Hausdorffa  $X$  zwanej przestrzenią ideałów maksymalnych, lub krócej widmem algebry  $\mathcal{A}$ . Przy utożsamieniu  $\mathcal{A} = C(X)$  automorfizm  $\delta$  przyjmuje postać operatora kompozycji:

$$\delta(a)(x) = a(\alpha(x)), \quad x \in X, \quad a \in C(X),$$

gdzie  $\alpha : X \rightarrow X$  jest homeomorfizmem.

Jednym z pierwszych ogólnych rezultatów dotyczących widma operatora  $aT$ ,  $a \in$

$\mathcal{A}$ , jest formuła na promień spektralny wykazana niezależnie przez A. V. Lebedeva [Leb79] i A. K. Kitovera [Kit79], a zaproponowana przez A.V. Antonevicha [Ant75]. Mianowicie, zachodzi wzór

$$r(aT) = \max_{\mu \in \text{Erg}(X, \alpha)} \exp \int_X \ln |a(x)| d\mu, \quad (6)$$

gdzie  $\text{Erg}(X, \alpha)$  jest zbiorem wszystkich regularnych, borelowskich, probabilistycznych, niezmienniczych oraz ergodycznych ze względu na  $\alpha$  miar na  $X$ . Formuły powyższego typu w teorii układów dynamicznych zwane są *zasadami wariacyjnymi* i wyrażają np. związki entropii topologicznej i ciśnienia topologicznego z entropią metryczną [Wal82].

Kolejnym ważnym krokiem jest zastosowanie pewnych twierdzeń z teorii  $C^*$ -algebr generowanych przez układy dynamiczne. Z ich pomocą [AL94, Wn. 13.6], [Ant96, Tw. 8.1] otrzymujemy, że jeśli odwzorowanie  $\alpha$  jest *topologicznie wolne*, czyli gdy dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  zbiór  $F_n = \{x \in X : \alpha^n(x) = x\}$  ma puste wnętrze, to widmo  $\sigma(aT)$  jest niezmiennicze ze względu na obroty wokół zera. Innymi słowy każda spójna składowa widma  $\sigma(aT)$  jest pierścieniem lub kołem o środku w zerze.

Stosując następnie pojęcie rzutu Rieszego można dokonać podziału przestrzeni  $X$  na  $\alpha$ -niezmiennicze, domknięte zbiory tak, aby każdemu zbiorowi  $\omega \subset X$  z podziału odpowiadała spójna składowa  $R = \{z \in \mathbb{C} : r^- \leq |z| \leq r^+\}$  widma  $\sigma(aT)$ , a promienie  $r^\pm$  dane były przez odpowiednie formuły wariacyjne typu (6) na zbiorze  $\omega$ :

$$r^- = \min_{\mu \in \text{Erg}(\omega, \alpha)} \exp \int_\omega \ln |a(x)| d\mu, \quad r^+ = \max_{\mu \in \text{Erg}(\omega, \alpha)} \exp \int_\omega \ln |a(x)| d\mu. \quad (7)$$

W ten sposób, w sytuacji, gdy  $T$  jest operatorem unitarnym i spełnione są relacje (4), uzyskujemy pełny opis widma  $\sigma(aT)$  za pomocą odwracalnego układu dynamicznego  $(X, \alpha)$  –  $\alpha$  jest tutaj *homeomorfizmem*. Ponadto powyższe rezultaty w znacznym stopniu przenoszą się na przypadek operatorów w przestrzeni Banacha, por. [AL94], [Ant96].

Motywacją niniejszej rozprawy jest myśl, by

*przeprowadzić analizę spektralną operatorów spełniających słabsze warunki, niż te występujące w Definicji 0.1, gdyż w obecnej formie wykluczają one wiele naturalnych i ciekawych przykładów.*

Jeden z takich przykładów dostarcza klasyczny operator przesunięcia.

**Przykład 0.2. (Jednostronny operator przesunięcia)** Niech  $H = \ell^2(\mathbb{N})$ ,  $\mathcal{A} \subset L(H)$  będzie algebrą operatorów mnożenia przez ciągi ograniczone i niech  $T$  będzie jednostronnym operatorem przesunięcia:

$$T(x(1), x(2), x(3)\dots) = (x(2), x(3), \dots).$$

Wtedy dla  $a \in \mathcal{A}$  operator  $aT$  jest klasycznym ważonym operatorem przesunięcia, por. [Hal82]. Nietrudno jest spostrzec, że w tym przypadku spełnione są obie inkluzje (4), jednakże operator  $aT$  nie jest abstrakcyjnym ważonym operatorem przesunięcia w sensie Definicji 0.1, gdyż  $T$  nie jest operatorem unitarnym,  $T$  nie jest nawet izometrią,  $T$  jest „zaledwie” *częściową izometrią*.

Ogólnie jeśli, tak jak w powyższym przykładzie,  $T$  jest częściową izometrią spełniającą relacje (4), to odwzorowanie  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  dane wzorem (5) jest częściowym automorfizmem algebry  $\mathcal{A}$ , który indukuje na  $X$  częściowy homeomorfizm  $\alpha$ , tj. homeomorfizm pomiędzy domknięto-otwartymi podzbiórmi przestrzeni  $X$ , [Kwa05', Stw. 1.7]. W tej sytuacji okazuje się, że dokonując pewnych stosunkowo niewielkich zmian, zarówno w dowodach jak i w tezie, opis widma  $\sigma(aT)$  za pomocą częściowego układu dynamicznego  $(X, \alpha)$  (analogiczny do tego przedstawionego powyżej) jest także możliwy. Znacznie trudniej przedstawia się sytuacja, gdy odwzorowanie  $\alpha$  zadane przez operację sprzężenia (5) jest nieodwracalne, co ma miejsce, gdy nie zachodzą obie inkluzje (4).

**Przykład 0.3. (Operator generujący odwzorowanie  $z^2$ , [Kwa05', Prz. 2.12])**

Niech  $H = L^2(\mathbb{R})$ . Rozważmy operator unitarny  $T \in L(H)$  będący unormowanym operatorem kompozycji z funkcją  $\gamma(x) = 2t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , to znaczy

$$(Tf)(t) = \sqrt{2} f(2t), \quad (T^*f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{t}{2}\right).$$

Niech  $\mathcal{A} \subset L(H)$  składa się operatorów mnożenia przez ciągłe funkcje okresowe o okresie 1. Mamy wtedy naturalny izomorfizm

$$\mathcal{A} \cong C(S^1),$$

gdzie  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Dla dowolnego elementu  $a \in \mathcal{A}$

$TaT^*$  - jest operatorem mnożenia przez funkcję  $a(2t)$  o okresie  $\frac{1}{2}$ ,

$T^*aT$  - jest operatorem mnożenia przez funkcję  $a\left(\frac{t}{2}\right)$  o okresie 2.

Zatem zachodzi tylko pierwsza z inkluzji (4):

$$TAT^* \subset \mathcal{A}, \quad T^*AT \not\subset \mathcal{A}.$$

Ponadto utożsamiając  $\mathcal{A}$  z  $C(S^1)$  odwzorowanie  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  dane wzorem (5) przyjmuje postać

$$\delta(a)(z) = a(\alpha(z)), \quad z \in S^1,$$

gdzie  $\alpha(z) = z^2$ ,  $z \in S^1$ , jest odwzorowaniem nieodwracalnym. W szczególności, mimo iż  $T$  jest operatorem unitarnym, to według Definicji 0.1 operator  $aT$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , nie jest abstrakcyjnym ważonym operatorem przesunięcia z wagą w algebrze  $\mathcal{A}$ .

Z teoretycznego punktu widzenia wyjściem z sytuacji przedstawionej w powyższym przykładzie jest przejście do większej  $C^*$ -algebry

$$\mathcal{B} := C^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{*n}AT^n\right) \quad (8)$$

generowanej przez  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{*n}AT^n$ . Wtedy  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  i można pokazać [LO04, Stw. 4.1], że  $\mathcal{B}$  jest przemienną  $C^*$ -algebrą spełniającą obie inkluzje

$$TBT^* \subset \mathcal{B}, \quad T^*BT \subset \mathcal{B}.$$

Zatem jeśli  $T$  jest operatorem unitarnym spełniającym jedynie pierwszą z inkluzji (4), to operator  $aT$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , jest abstrakcyjnym ważonym operatorem przesunięcia w sensie Definicji 0.1, lecz trzeba rozpatrywać go jako operator z wagą w innej algebrze, np. w algebrze  $\mathcal{B}$  danej wzorem (8). W szczególności oznacza to, że teoretycznie jesteśmy w stanie opisać widmo operatora  $aT$  w terminach układu dynamicznego  $(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$ , gdzie  $\mathcal{B} \cong C(\widetilde{X})$  i  $\widetilde{\alpha}$  jest homeomorfizmem takim, że  $\delta(a) = a \circ \widetilde{\alpha}$ ,  $a \in C(\widetilde{X})$ . W praktyce potrzebujemy jeszcze jednak odpowiedzieć na następujące pytania:

*Jak prezentuje się układ dynamiczny  $(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$ ? Jaki jest związek między odwracalnym układem dynamicznym  $(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$ , a wyjściowym układem nieodwracalnym  $(X, \alpha)$ ?*

Jak pokażemy w obecnej pracy (podrozdział 3.2) dla obiektów rozpatrywanych w Przykładzie 0.3 układ  $(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$  można utożsamiać z tak zwanym *Solenoidem* Smale’a, topologicznie skomplikowanym tworem będącym hiperbolicznym atraktorem. W ogólnym kontekście częściowych izometrii na przestrzeni Hilberta autorowi oraz jego promotorowi udało się opisać układ rozszerzony  $(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$  za pomocą wyjściowego układu  $(X, \alpha)$  w [KL03], [KL08], patrz też [Kwa05’], [Kwa05’’], [Kwa07] (wyniki te uogólnimy w rozdziale 1 obecnej rozprawy). Okazało się, że układ  $(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$  zawiera jako podukład granicę odwrotną  $\varprojlim (X, \alpha)$ , na której  $\widetilde{\alpha}$  jest homeomorfizmem indukowanym przez  $\alpha$  (por. Definicja 1.24). Pośrednio rezultat ten rzuca pewne światło na naturę układu  $(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$ , gdyż

- 1) począwszy od prac R. F. Williams’a za powszechny uznaje się pogląd, że hiperboliczne atraktory posiadają strukturę granic odwrotnych [Wil67], [Wil70], [Yi01], [BS03], [Dev89] – do najbardziej znanych należą Solenoidy oraz podkowy Smale’a;
- 2) granice odwrotne stanowią nieocenione narzędzie w teorii continuów służące m. in. do konstrukcji i badania continuów nierozkładalnych [Nad92], np. continuum Brouwera-Janiszewskiego-Knastera, czy pseudołuku Knastera [Hen64];
- 3) stosunkowo niedawno [AP98] pokazano, że układy dynamiczne związane z klasycznymi kafelkowaniami (zwanymi też tesselacjami, parkietażami, posadzkowaniami lub mozaikowaniami) – ang. tilings, takimi jak kafelkowania Penrose’a, Ammanna, Fibonnaciego, czy Morse’a, są również układami typu  $(\varprojlim (X, \alpha), \widetilde{\alpha})$ .

Z uwag tych wynika, że przestrzeń  $\widetilde{X}$  charakteryzuje się wysoce skomplikowaną topologią, a co za tym idzie opis widma operatora  $aT$  za pomocą układu  $(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$  w praktyce może być mało realny. Tym samym naturalne i ważne stają się kolejne pytania:

*Czy możliwy jest opis widma operatora  $aT$  w terminach wyjściowego nieodwracalnego układu dynamicznego  $(X, \alpha)$ ? Jeśli, tak to jakie obiekty i konstrukcje w nim występują? Jaki jest związek takiego opisu z opisem w terminach odwracalnego układu rozszerzonego  $(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$ ?*

Mówiąc zwięźle przedstawienie odpowiedzi na powyżej wymienione pytania jest celem i głównym rezultatem niniejszej rozprawy.

Punktem wyjścia naszych rozważań będzie uogólnienie Definicji 0.1, które w kontekście endomorfizmów  $C^*$ -algebr jest całkowicie naturalne i na przestrzeni Hilberta przyjmuje następującą postać.

**Definicja 0.4.** Niech  $H$  będzie przestrzenią Hilberta,  $\mathcal{A} \subset L(H)$  przemienną algebrą Banacha zawierającą operator identycznościowy, i niech  $T : H \rightarrow H$  będzie częściową izometrią taką, że

$$T\mathcal{A}T^* \subset \mathcal{A}, \quad (9)$$

$$T^*T \in \mathcal{A}', \quad (10)$$

gdzie  $\mathcal{A}'$  jest komutantem algebry  $\mathcal{A} \subset L(H)$ . Każdy operator postaci  $aT$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , nazywać będziemy (*abstrakcyjnym*) *ważonym operatorem przesunięcia* z wagą w algebrze  $\mathcal{A}$ .

Gdy  $T$  jest izometrią warunek (10) jest spełniony trywialnie, natomiast w ogólności zapewnia on multiplikatywność odwzorowania  $\delta(\cdot) = T(\cdot)T^*$  na algebrze  $\mathcal{A}$ . Przy założeniach Definicji 0.4 odwzorowanie  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  dane wzorem (5) jest endomorfizmem, a co więcej, można wykazać [Kwa07, Tw. 3.7], że dowolny endomorfizm  $C^*$ -algebry z jednością reprezentuje się w takiej postaci. Warto również podkreślić, że pojęcie częściowej izometrii jest tu nieuniknione. Mianowicie, jeśli  $T$  jest dowolnym operatorem takim, że  $\delta(\cdot) = T(\cdot)T^*$  jest endomorfizmem algebry  $\mathcal{A}$ ,  $1 \in \mathcal{A}$ , to

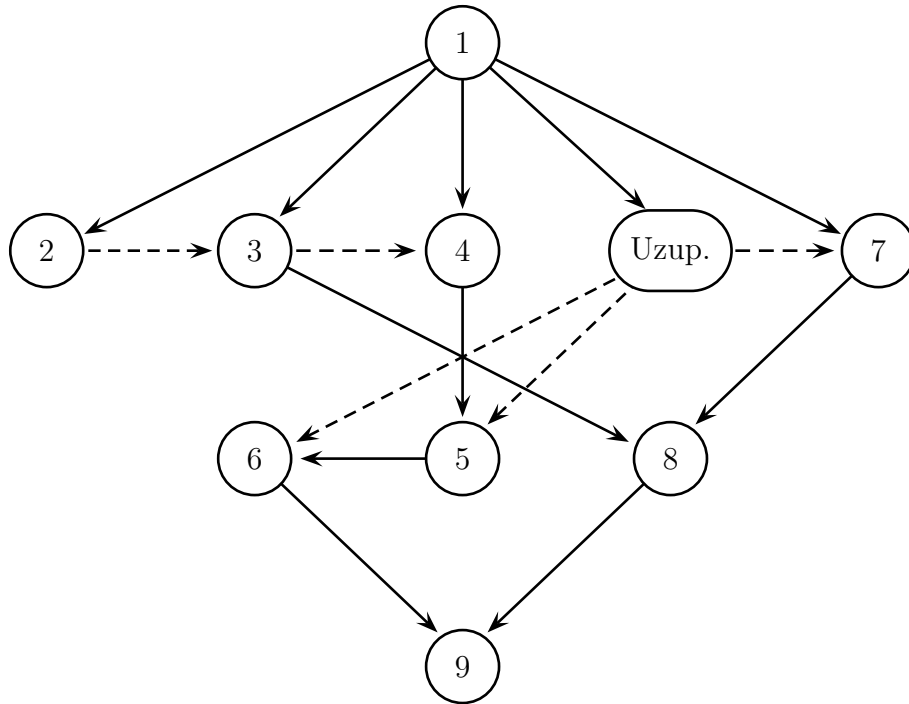
$$TT^* = \delta(1) = \delta(1^2) = (\delta(1))^2 = (TT^*)^2,$$

czyli  $TT^*$  jest rzutem ortogonalnym, skąd  $T$  jest częściową izometrią (por. [Hal82, Problem 98]).

Przypomnijmy, iż Definicja 0.1 obejmuje operatory i algebry na przestrzeniach Banacha. Zatem aby mówić o jej uogólnieniu, w ścisłym znaczeniu tego słowa, w rozdziale 1, Definicję 0.4 przeniesiemy na grunt przestrzeni Banacha. Skorzystamy tu z definicji częściowej izometrii w przestrzeni Banacha, którą wprowadził M. Mbekhta [Mbe04]. Wszystkie rozważania prowadzić będziemy przy możliwie ogólnych założeniach i wiele otrzymanych rezultatów dotyczyć będzie operatorów w dowolnych przestrzeniach Banacha. Pełny opis widma otrzymamy jednakże tylko w przypadku operatorów działających w przestrzeniach Hilberta oraz w przestrzeniach  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , i w przykładach skupimy się właśnie na takich operatorach.

Wspomnijmy także, że poza operatorami spełniającymi warunki Definicji 0.1 widmo ważonych operatorów kompozycji zostało zbadane głównie w przypadku operatorów zwartych [Tak92], [Kam79],[Kam81], [Gun07]. Natomiast typowym dla rozpatrywanych przez nas operatorów zjawiskiem jest koincydencja widma z widmem Fredholma (widmem istotnym), co oznacza, że operatory te, o ile nie są quasi-nilpotentne, nie są operatorami zwartymi.

**Struktura oraz krótki opis pracy.** Zależność między rozdziałami obrazuje diagram na Rysunku 1, gdzie strzałka ciągła  $A \longrightarrow B$  oznacza, że rozdział  $B$  zależy w istotny sposób od rozdziału  $A$ . Zatem aby w pełni zrozumieć treść rozdziału  $B$  należy uprzednio zapoznać się z treścią rozdziału  $A$ . Strzałka przerywana  $A \dashrightarrow B$  oznacza, że materiał zawarty w rozdziale  $B$  korzysta z materiału zawartego w rozdziale  $A$ , lecz



Rysunek 1: Diagram pracy.

dla ogólnego zrozumienia treści rozdziału  $B$  czytanie rozdziału  $A$  nie jest bezwzględnie konieczne. Przyjmujemy tu także, że obie te relacje są tranzytywne.

W rozdziale 1 omówimy podstawowe własności odwzorowań dualnych do endomorfizmów przemiennych algebr Banacha. Przywołamy definicję częściowej izometrii na przestrzeni Banacha [Mbe04] i pokażemy, że odpowiedniki warunków (9), (10) zapewniają, że taki operator generuje endomorfizm algebry Banacha  $\mathcal{A}$ . Następnie, uogólniając główny rezultat z [KL03], [KL08], opiszemy w języku dualnych układów dynamicznych algebraiczno-operatorową procedurę rozszerzenia endomorfizmu algebry  $\mathcal{A}$  do częściowego automorfizmu algebry Banacha  $\mathcal{B}$ . Ten czysto-topologiczny opis będziemy interpretować jako metodę rozszerzenia dowolnego (niekoniecznie odwracalnego) częściowego układu dynamicznego  $(X, \alpha)$  do układu odwracalnego  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$ .

W rozdziale 2 otrzymaną w rozdziale pierwszym metodę rozszerzenia układów dynamicznych zobrazujemy na najbardziej popularnym przykładzie odwzorowań nieodwracalnych, jakimi są odwzorowania logistyczne  $\alpha_\lambda(x) = 4\lambda x(1-x)$ ,  $\lambda \in (0, 1]$ . Między innymi omówimy tu wpływ na strukturę układów rozszerzonych  $(\tilde{X}_\lambda, \tilde{\alpha}_\lambda)$ ,  $\lambda \in (0, 1]$ , takich zjawisk jak bifurkacje, czy chaos i zobaczymy, że przestrzeń  $\tilde{X}_\lambda$  zawiera wiele ważnych continuów nierozkładalnych.

Rozdział 3 zawiera szereg kolejnych przykładów rozszerzeń klasycznych nieodwracalnych układów dynamicznych. Pojawia się tu solenoidy, podkowy Smale'a, atraktor Plykina, a także układ związany z kafelkowaniem Fibonacciego. Ponadto przedstawimy tu ogólną konstrukcję częściowych izometrii w przestrzeniach  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , generujących na widmach algebr operatorowych dowolne jednowymiarowe układy dy-

namiczne oraz niektóre układy symboliczne. Wszystkie te operatory spełniają warunki pewnej technicznej definicji, obiekty której będziemy nazywać konkretnymi ważonymi operatorami przesunięcia. Widmo takich operatorów zostanie opisane w rozdziale 9.

W rozdziale 4 uogólnimy formułę wariacyjną (6) tak, by wyrażała promień spektralny abstrakcyjnych ważonych operatorów przesunięcia rozumianych w naszym, nowym, szerszym sensie. Zostaną tu omówione poszczególne zasady wariacyjne odpowiadające operatorom generującym układy symboliczne, odwzorowania logistyczne, ekspansywne endomorfizmy okręgu, homeomorfizmy okręgu oraz przesunięcia na torusie. Pojawiają się tu m. in. przykłady miar ergodycznych na solenoidach, podkowie Smale'a i B-J-K continuum.

W rozdziale 5 opiszemy zbiór  $|\sigma(aT)|$  składający się z modułów wartości spektralnych operatora  $aT$ . Za pomocą rzutów Rieszego skonstruujemy bijekcję pomiędzy spójnymi składowymi zbioru  $|\sigma(aT)|$ , a domkniętymi,  $\alpha$ -niezmienniczymi podzbiórmi  $X$ . Przy tej odpowiedniości końce spójnej składowej  $[r^-, r^+] \subset |\sigma(aT)|$  będą dane przez formuły wariacyjne typu (7) na przyporządkowanym tej składowej podzbiórze  $\omega \subset X$ .

W rozdziale 6 otrzymamy pełny opis widma operatora  $aT$  działającego w przestrzeni Hilberta. W tym celu przedstawimy definicję topologicznej wolności, wprowadzoną przez autora w [Kwa05'] i obejmującą dowolne (niekoniecznie odwracalne) częściowe układy dynamiczne  $(X, \alpha)$ . Przy założeniu topologicznej wolności sformułujemy tak zwane Twierdzenie o Izomorfizmie [Kwa05'], które determinuje reprezentację, a tym samym i strukturę  $C^*$ -algebry  $C^*(\mathcal{A}, T)$  generowanej przez  $\mathcal{A}$  i  $T$ . Twierdzenie to implikuje m. in. niezmienniczość widma  $\sigma(aT)$  ze względu na obroty wokół zera i wyjaśnia zjawisko koincydencji widma  $\sigma(aT)$  z widmem istotnym  $\sigma_{ess}(aT)$ . W szczególności, kołowa symetria zbioru  $\sigma(aT)$  oraz otrzymany w rozdziale 5 opis zbioru  $|\sigma(aT)|$  automatycznie dadzą nam pełny opis widma  $\sigma(aT)$  (w przypadku, gdy  $aT$  działa w przestrzeni Hilberta).

Wyniki i metody zaprezentowane w rozdziałach 1 - 6 nie wystarczą, by w pełni opisać widmo ważonych operatorów przesunięcia w przestrzeniach Banacha. Dlatego w rozdziałach 7, 8 opracujemy nieco inny kierunek badań, który m. in. ujawni związek między własnościami spektralnymi ważonych operatorów kompozycji w przestrzeniach  $L^p$  oraz przestrzeniach Hilberta. Umożliwi to całkowity opis widma konkretnych ważonych operatorów przesunięcia w przestrzeniach  $L^p$  w rozdziale 9.

W rozdziale 7, pozostając w kontekście operatorów działających w przestrzeniach Hilberta, wykażemy ogólne twierdzenia dotyczące odwracalności operatorów należących do  $C^*$ -algebry  $C^*(\mathcal{A}, T)$ . Dzięki opisowi dostatecznej rodziny reprezentacji algebry  $C^*(\mathcal{A}, T)$  pokażemy, że odwracalność  $b \in C^*(\mathcal{A}, T)$  jest równoważna odwracalności pewnych prostszych operatorów działających w przestrzeniach  $\ell^2$ , związanych orbitami rozszerzonego układu dynamicznego  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$ . W literaturze takie podejście do badania odwracalności nazywane jest dyskretyzacją. Poza tym wykażemy tu pewne uogólnienia twierdzenia Wienera, które dostarczą nam ważnych informacji na temat postaci operatorów odwrotnych do odwracalnych elementów algebry  $C^*(\mathcal{A}, T)$ .

W rozdziale 8, korzystając z twierdzeń rozdziału 7, pokażemy, że odwracalność elementów algebr generowanych przez konkretne ważne operatory przesunięcia  $aT_p$  na przestrzeniach  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , nie zależy od wyboru  $p \in [1, \infty]$ . W szczególności oznacza to, że analiza spektralna takich operatorów sprowadza się do analizy



operatorów na przestrzeni Hilberta  $L^2$ .

W rozdziale 9, jako wniosek z rezultatów rozdziału 6 i 8, otrzymamy pełny opis widma konkretnych ważonych operatorów przesunięcia działających w przestrzeniach  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , związanych z układami topologicznie wolnymi. Widmo takich operatorów charakteryzuje się symetrią kołową, której środek znajduje się w zerze. Dobierając odpowiednie wagi  $a$  do operatora przesunięcia  $T$  z Przykładu 0.3 pokażemy, że dowolny zwarty podzbiór  $\mathbb{C}$  o wyżej wspomnianej symetrii jest widem ważonego operatora przesunięcia  $aT$ .  $\sigma(aT)$ .

W uzupełnieniach zebrane są pewne wyniki (lub ich niewielkie modyfikacje) z prac [Kwa05'], [KL07'], [KL07''], którymi posługujemy się w rozdziałach 5, 6, 7. Przedstawiamy tu najważniejsze fakty dotyczące uniwersalnej  $C^*$ -algebry  $C^*(X, \alpha; Y)$  będącej uogólnieniem algebry kowariancji  $C^*(X, \alpha)$  zbadanej i skonstruowanej w [Kwa05'].

Wszystkie rysunki w przedłożonej pracy, oprócz Rysunku 3.16 (b) sporządzonego przez żonę autora, wykonane zostały przez autora. Animowane wersje niektórych z nich zamieszczone są na stronie

<http://math.uwb.edu.pl/~zaf/kwasniewski/panopticum.html>

Uzyskane wyniki stanowią część własnego projektu badawczego pt. „*Algebry operatorowe generowane przez układy dynamiczne: spektralne, asymptotyczne i entropijne charakterystyki*”, N N201 382634.

Autor chciałby wyrazić podziękowania profesorowi A. V. Lebedevowi za zainspirowanie tematyką, cenne wskazówki, rady i sugestie oraz żonie za cierpliwość i wyrozumiałość.

Białystok, Kwiecień 2008



# Przyjęte konwencje i oznaczenia

Przyjmujemy standardowe oznaczenia na zbiory liczbowe, przy czym 0 traktujemy jako liczbę naturalną:  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , a zbiory liczb dodatnich oznaczamy za pomocą symbolu „+”, i tak np.  $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ . Wszystkie przestrzenie oraz algebry Banacha (z wyjątkiem przestrzeni  $\ell_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mathbb{N})$  w Przykładzie 4.13) rozpatrujemy nad ciałem liczb zespolonych. Wszystkie rozważane algebry posiadają jedynekę, a dla algebr operatorów jedyneką tą jest operator identycznościowy. Mówiąc o homomorfizmach (endomorfizmach, monomorfizmach, automorfizmach itp.) algebr Banacha mamy zawsze na myśli (odpowiednie) odwzorowania liniowe i multiplikatywne. Natomiast przez ideał algebry Banacha będziemy rozumieć domknięty ideał dwustronny.

Poniżej przedstawiamy spis najważniejszych oznaczeń. Symbole są pogrupowane w zależności od kontekstu (jeden symbol może występować w dwu różnych kontekstach). Obok symbolu znajduje się krótka definicja oraz (ewentualnie) numery stron, na których dany obiekt został zdefiniowany lub odgrywa kluczową rolę.

## Przestrzenie Banacha

$E$	- przestrzeń Banacha
$H$	- przestrzeń Hilberta
$L_{\mu}^p(\Omega)$	- przestrzeń (klas abstrakcji) zespolonych funkcji na $\Omega$ , $\mu$ -całkowalnych w $p$ -tej potęgze
$L_{\mu}^{\infty}(\Omega)$	- przestrzeń (klas abstrakcji) zespolonych funkcji na $\Omega$ , $\mu$ -istotnie ograniczonych
$L^p(\Omega)$	- przestrzeń $L_{\mu}^p(\Omega)$ , gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , $\mu$ jest $n$ -wymiarową miarą Lebesgue'a
$\ell^p(\mathbb{N})$	- przestrzeń $L_{\mu}^p(\mathbb{N})$ , gdzie $\mu$ jest miarą liczącą, 6
$\ell^p(\mathbb{Z})$	- przestrzeń $L_{\mu}^p(\mathbb{Z})$ , gdzie $\mu$ jest miarą liczącą, 139
$\ell^p(N)$	- przestrzeń $L_{\mu}^p(\{1, \dots, N\})$ , gdzie $\mu$ jest miarą liczącą, 129, 142
$c_0(\mathbb{N})$	- przestrzeń jednostronnych ciągów zbieżnych do zera, 6
$c_0(\mathbb{Z})$	- przestrzeń dwustronnych ciągów, dwustronnie zbieżnych do zera, 139
$\overline{\text{span}}\{K\}$	- przestrzeń Banacha rozpięta przez zbiór $K$ , 12
$\text{span}\{K\}$	- przestrzeń liniowa rozpięta przez zbiór $K$ , 50

## Operatory na przestrzeniach Banacha

$L(E)$	- przestrzeń ograniczonych operatorów liniowych na $E$
$S, T$	- wzajemnie sprzężone częściowe izometrie w przestrzeni Banacha, 5
$S_p, T_p$	- wzajemnie sprzężone częściowe izometrie w przestrzeni $L_{\mu}^p(\Omega)$ , 50
$S_{\mathbb{N}}, T_{\mathbb{N}}$	- standardowe jednostronne operatory przesunięcia, 6
$S_N, T_N$	- „ścięte” operatory przesunięcia w przestrzeni $N$ -wymiarowej, 129

- $T_{\mathbb{Z}}$  - standardowy, odwracalny operator lewostronnego przesunięcia, 139
- $aT$  - abstrakcyjny operator przesunięcia, 10
- $aT_p$  - konkretny operator przesunięcia w przestrzeni  $L^p_{\mu}(\Omega)$ , 48
- $\delta, \delta_*$  - wzajemnie sprzężone częściowe izometrie na  $L(E)$  zadane przez wzajemnie sprzężone częściowe izometrie  $T, S$  na  $E$ , 7
- $S_{\lambda}, T_{\lambda}$  - wzajemnie sprzężone częściowe izometrie związane z odwzorowaniem logistycznym  $\alpha_{\lambda}$ , 26, 27

### Spektra operatorów

- $\sigma(aT)$  - widmo operatora  $aT$
- $|\sigma(aT)|$  - zbiór modułów wartości spektralnych operatora  $\sigma(aT)$ , 101
- $\sigma_{ess}(aT)$  - widmo istotne operatora  $aT$ , 119
- $r(aT)$  - promień spektralny operatora  $aT$ , 81

### Algebry Banacha

- $\mathcal{A}$  - przemienna algebra Banacha z jedyneką, 1
- $\mathcal{B}$  - przemienna algebra Banacha będąca rozszerzeniem algebry  $\mathcal{A}$ , 12
- $\mathcal{A}_+$  - algebra Banacha generowana przez  $\mathcal{A}$  i rzut  $ST$ , 14
- $M^{\perp}$  - annihilator podzbioru  $M \subset \mathcal{A}$ , 4
- $M'$  - komutant podzbioru  $M \subset L(E)$ , 7
- $L(E)$  - algebra operatorów ograniczonych na przestrzeni Banacha  $E$
- $C(X)$  - algebra ciągłych funkcji zespolonych na przestrzeni zwartej  $X$ , 2
- $C_Y(X)$  - ideał w  $C(X)$  składający się z funkcji znikających na  $Y \subset X$ , 22
- $C(X, \mathcal{D})$  - algebra ciągłych funkcji na  $X$  o wartościach w algebrze  $\mathcal{D}$ , 136
- $C^*(K, A)$  -  $C^*$ -algebra generowana przez zbiór operatorów  $K$  i operator  $A$ , 115
- $C^*(X, \alpha; Y)$  -  $C^*$ -algebra kowariancji układu  $(X, \alpha)$  względem  $Y \subset X$ , 128, 161
- $D(\mathbb{N})$  - algebra operatorów mnożenia przez ciągi jednostronne, 140
- $D(\mathbb{Z})$  - algebra operatorów mnożenia przez ciągi dwustronne, 140
- $\mathcal{A}_{hol}$  - algebra funkcji holomorficzych we wnętrzu koła  $D^2$ , 20
- $\mathcal{B}_{\lambda}$  - algebra Banacha związana z odwzorowaniem logistycznym  $\alpha_{\lambda}$ , 27
- $\mathcal{B}_{\alpha}$  - algebra Banacha związana z homeomorfizmem okręgu  $\alpha$ , 74

### Układy dynamiczne na algebrach Banacha

- $\delta$  - (odpowiednio) endomorfizm algebry  $\mathcal{A}$ , 2; jego przedłużenie do endomorfizmu algebry  $\mathcal{A}_+$ , 14; przedłużenie obu tych endomorfizmów do częściowego automorfizmu algebry  $\mathcal{B}$ , 12
- $\delta_*$  - częściowy automorfizm algebry  $\mathcal{B}$ , będący uogólnioną odwrotnością  $\delta$ , 12, 4
- $I$  - jądro endomorfizmu  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , 3, 14
- $J$  - ideał algebry  $\mathcal{A}$  leżący w annihilatorze  $I$  wyznaczony przez rzut  $ST$ , 14

### Częściowe układy dynamiczne

- $(X, \alpha)$  - częściowy układ dynamiczny dualny do endomorfizmu  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , 3
- $(X_+, \alpha_+)$  - częściowy układ dynamiczny dualny do endomorfizmu  $\delta$  na algebrze  $\mathcal{A}_+$ , 15
- $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  - częściowy układ dynamiczny dualny do częściowego automorfizmu  $\delta$  na algebrze  $\mathcal{B}$ , 16, 21
- $\Phi$  - rzut układu rozszerzonego  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  na układ  $(X, \alpha)$ , 21
- $\Delta_n, \Delta_{-n}$  - dziedzina, przeciwdziedzina częściowego odwzorowania  $\alpha^n$ , 3
- $\Delta_{\pm\infty}, \Delta_{\infty}$  - przekroje ciągów  $\{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{\Delta_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $\{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , 83

- $\tilde{\Delta}_n$  - dziedzina częściowego homeomorfizmu  $\tilde{\alpha}^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , 85
- $\tilde{\Delta}_{\pm\infty}, \tilde{\Delta}_\infty$  - przekroje ciągów  $\{\tilde{\Delta}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{\tilde{\Delta}_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $\{\tilde{\Delta}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , 85, 129
- $\text{Inv}(X, \alpha)$  - sympleks unormowanych,  $\alpha$ -niezmienniczych miar na  $X$ , 83
- $\text{Erg}(X, \alpha)$  - podzbiór  $\text{Inv}(X, \alpha)$  składający się z miar  $\alpha$ -ergodycznych, 83
- $(\tilde{X}_\lambda, \tilde{\alpha}_\lambda)$  - naturalne rozszerzenie odwzorowania logistycznego  $\alpha_\lambda$ , 28

### Klasyczne układy dynamiczne

- $\alpha_\lambda$  - odwzorowaniem logistyczne na odcinku  $[0, 1]$  z parametrem  $\lambda$ , 25
- $\alpha_T$  - odwzorowanie trójkątne, 31
- $\Theta_\tau$  - obrót okręgu o kąt  $2\pi\tau$ , 74
- $\tau(\alpha)$  - liczba obrotu homeomorfizmu okręgu  $\alpha$ , 73
- $(\Sigma_A, \sigma_A)$  - (topologiczne) jednostronne przesunięcie Markowa, 64
- $(\bar{\Sigma}_A, \bar{\sigma}_A)$  - (topologiczne) dwustronne przesunięcie Markowa, 64
- $(\Sigma_N, \sigma_N)$  - pełne, jednostronne przesunięcie Markowa, 67
- $(\bar{\Sigma}_N, \bar{\sigma}_N)$  - pełne, dwustronne przesunięcie Markowa, 67

### Przestrzenie topologiczne

- $X, X_+, \tilde{X}$  - widmo (odpowiednio) algebry  $\mathcal{A}$ , 1; algebry  $\mathcal{A}_+$ , 15; algebry  $\mathcal{B}$ , 16
- $\varprojlim (X, \alpha)$  - granica odwrotna związana z układem  $(X, \alpha)$ , 13
- $X_N, X_\infty$  - podprzestrzenie przestrzeni rozszerzonej  $\tilde{X}$ , 16
- $\text{hull}(M)$  - domknięty podzbiór  $X$ , będący otoczką zbioru  $M \subset \mathcal{A}$ , 74
- $Y_1 \sqcup Y_2$  - suma prosta przestrzeni topologicznych  $Y_1, Y_2$ , 15
- $\tilde{X}_\alpha$  - widmo algebry  $\mathcal{B}_\alpha$  związanej z homeomorfizmem okręgu  $\alpha$ , 74
- $S^1$  - okrąg jednostkowy, vi
- $\mathbb{T}^d$  -  $d$ -wymiarowy torus, 77
- $D^2$  - koło jednostkowe, 53
- $\mathcal{C}$  - zbiór Cantora, 93
- $\mathcal{S}$  -  $N$ -adyczny solenoid, 54
- $\beta(\mathbb{N})$  - zwarcenie Čecha-Stone'a przestrzeni dyskretnej  $\mathbb{N}$ , 7
- $\bar{\mathbb{N}}$  - jednopunktowe zwarcenie przestrzeni dyskretnej  $\mathbb{N}$ , 70

### Obiekty związane z konkretnymi operatorami przesunięcia z wagą

- $\varphi$  - odwzorowanie mierzalne zadające reprezentację algebry  $C(X)$ , 48, 50
- $\text{ess } \varphi(\omega)$  - obraz istotny zbioru  $\omega$  przy odwzorowaniu  $\varphi$ , 48
- $\gamma$  - różnowartościowe odwzorowanie mierzalne zadające częściowe izometrie  $T_p, S_p$ , 48, 50, 56
- $\frac{d\mu \circ \gamma}{d\mu}$  - pochodna Radona-Nikodyma miary  $\omega \mapsto \mu(\gamma^{-1}(\omega))$  względem  $\mu$ , 48
- $B(X)$  -  $\sigma$ -algebra borelowskich podzbiorów przestrzeni  $X$ , 48
- $\{t\}$  - część ułamkowa liczby  $t$  (jednoelementowy podzbiór składający się z  $t$  oznaczamy mniejszymi wężami  $\{t\}$ ), 31
- $\gamma_\lambda$  - różnowartościowe odwzorowanie prostej  $\mathbb{R}$ , związane z odwzorowaniem logistycznym  $\alpha_\lambda$ , 26



# Rozdział 1

## Abstrakcyjne operatory przesunięcia z wagą oraz algebraiczno-operatorowa metoda rozszerzania układów dynamicznych

W niniejszym rozdziale przeniesiemy Definicję 0.4 oraz obiekty z nią związane na grunt przestrzeni Banacha. Omówimy pokrótce odwzorowania dualne do endomorfizmów przemiennej algebr Banacha, które traktować będziemy jako częściowe odwzorowania przestrzeni ideałów maksymalnych. Następnie, w podrozdziale 1.2, posługując się ważnymi z punktu widzenia naszych badań operatorami częściowej izometrii w przestrzeniach Banacha [Mbe04], wyznaczymy warunki potrzebne na to, by operatory te generowały endomorfizmy algebr Banacha. Otrzymane warunki posłużą do zdefiniowania abstrakcyjnych ważonych operatorów przesunięcia na przestrzeniach Banacha, Definicja 1.19.

Prezentacja wszystkich faktów ukierunkowana będzie na opis układu rozszerzonego zawarty w Twierdzeniu 1.28, będący uogólnieniem rezultatów z [KL03], [KL08] na dowolne algebry Banacha. Wynik ten stanowi łącznik między Definicjami 0.1 oraz 1.19 i w obecnej rozprawie będzie jednym z głównych narzędzi badania ważonych operatorów przesunięcia oraz algebr przez nie generowanych.

### 1.1 Endomorfizmy algebr Banacha i odwzorowania częściowe

W całej rozprawie  $\mathcal{A}$  będzie oznaczać *przemiennej* algebrę Banacha z jedyneką. Przypomnijmy, że przestrzeń  $X$  niezerowych liniowo-multiplikatywnych funkcjonałów na  $\mathcal{A}$  wraz z  $*$ -słabą topologią odziedziczoną z przestrzeni dualnej  $\mathcal{A}^*$  jest zwartą przestrzenią Hausdorffa zwaną *przestrzenią ideałów maksymalnych*  $\mathcal{A}$ , lub krócej (topologicznym) *widmem algebry*  $\mathcal{A}$ . Przyjmiemy standardowe oznaczenie na *transformatę*

*Gelfanda:*

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \ni a &\rightarrow \widehat{a} \in C(X), \\ \widehat{a}(x) &:= x(a),\end{aligned}$$

gdzie  $C(X)$  jest algebrą wszystkich zespolonych funkcji ciągłych na  $X$ . Przywołajmy definicje klas algebr Banacha, które będziemy rozważać w obecnym rozdziale, por. [Żel].

**Definicja 1.1.** Przemienią algebrę Banacha  $\mathcal{A}$  będziemy nazywać

- 1) *algebrą półprostą*, jeśli transformata Gelfanda jest odwzorowaniem różnowartościowym,
- 2) *algebrą regularną*, jeśli  $\mathcal{A}$  jest algebrą półprostą oraz dla każdego punktu  $x$  przestrzeni ideałów maksymalnych  $X$  nienależącego do domkniętego podzbioru  $F \subset X$  istnieje element  $a \in \mathcal{A}$ , taki, że

$$\widehat{a}(x) \neq 0, \quad \widehat{a}(F) = 0.$$

Jeśli  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  jest endomorfizmem algebry Banacha  $\mathcal{A}$ , to dla każdego  $x \in X$  funkcjonal  $x \circ \delta$  jest liniowo-multiplikatywny. Zatem operator dualny do  $\delta$  zadaje na  $X$  odwzorowanie  $\alpha$  przyjmujące wartości w zbiorze  $X \cup \{0\}$  (funkcjonał  $x \circ \delta$  w ogólności może być zerowy). Restrykcja takiego odwzorowania do podzbioru  $\Delta = \alpha^{-1}(X)$  nie wyprowadza już poza zbiór  $X$  i może być traktowana jako częściowe odwzorowanie  $X$ . W rzeczywistości mamy następującą, znaną, charakterystykę rozważanego odwzorowania.

**Stwierdzenie 1.2.** *Dla każdego endomorfizmu  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  istnieje i jest jednoznacznie wyznaczone (wraz ze swoją dziedziną) odwzorowanie ciągłe  $\alpha : \Delta \rightarrow X$  zdefiniowane na domknięto-otwartym podzbiorze  $\Delta \subset X$ , takie, że*

$$\widehat{\delta(a)}(x) = \begin{cases} \widehat{a}(\alpha(x)), & x \in \Delta \\ 0, & x \notin \Delta \end{cases}, \quad a \in \mathcal{A}. \quad (1.1)$$

*Ponadto,  $\Delta = X$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\delta$  zachowuje jedynekę algebry  $\mathcal{A}$ .*

**Dowód.** Jednoznaczność odwzorowania  $\alpha : \Delta \rightarrow X$  wynika stąd, iż funkcje  $\widehat{a}$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , rozdzielają punkty przestrzeni  $X$ . Uzasadnienia wymaga ciągłość  $\alpha$ , gdyż nie zakładaliśmy ciągłości  $\delta$ . Jeśli jednak  $\mathcal{A}$  jest algebrą półprostą, to endomorfizm  $\delta$  automatycznie jest odwzorowaniem ciągłym, [Żel, Wn. 13.4]. W przypadku ogólnym, widmo algebry ilorazowej  $\mathcal{A}/\text{Rad}(\mathcal{A})$ , gdzie  $\text{Rad}(\mathcal{A}) := \bigcap_{x \in X} \ker x$  jest *radykałem algebry  $\mathcal{A}$* , można w naturalny sposób utożsamić z widmem  $X$  algebry  $\mathcal{A}$ . Wtedy odwzorowanie dualne do homomorfizmu  $\tilde{\delta} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\text{Rad}(\mathcal{A})$  danego wzorem

$$\tilde{\delta}(a) := a + \text{Rad}(\mathcal{A}), \quad a \in \mathcal{A},$$

pokrywa się z odwzorowaniem dualnym do  $\delta$ . Zatem ciągłość homomorfizmu  $\tilde{\delta}$ , [Żel, Tw. 13.2], implikuje ciągłość  $\alpha$ . Pozostała część tezy jest jasna, bowiem  $\widehat{\delta(1)}$  jest funkcją charakterystyczną zbioru  $\Delta$ , por. [Żel, 19]. ■



**Definicja 1.3.** Odwzorowanie  $\alpha : \Delta \rightarrow X$  spełniające (1.1) będziemy nazywać *częściowym odwzorowaniem  $X$  dualnym do endomorfizmu  $\delta$* . Parę  $(X, \alpha)$  nazywać będziemy *częściowym układem dynamicznym*.

W odniesieniu do odwzorowań częściowych będziemy używać następującej notacji. Dla  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta_n$  będzie dziedziną, a  $\Delta_{-n}$  przeciwdziedziną częściowego odwzorowania  $\alpha^n$ . Dokładniej, zbiory  $\Delta_n$  dane są formułą indukcyjną

$$\Delta_n := \alpha^{-1}(\Delta_{n-1}), \quad n > 0, \quad \Delta_0 = X,$$

i są domknięto-otwarte. Natomiast zbiory  $\Delta_{-n} := \alpha^n(\Delta_n)$  są na ogół jedynie domknięte. Dla dowolnych  $n, m \in \mathbb{N}$  mamy

$$\alpha^n : \Delta_n \rightarrow \Delta_{-n},$$

$$\alpha^n(\alpha^m(x)) = \alpha^{n+m}(x), \quad x \in \Delta_{n+m}.$$

Nietrudno spostrzec, że jeśli  $\alpha$  jest częściowym odwzorowaniem dualnym do pewnego endomorfizmu  $\delta$ , to  $\alpha^n$  jest po prostu odwzorowaniem dualnym do endomorfizmu  $\delta^n$ . Aby dokładniej naświetlić związek między własnościami endomorfizmu  $\delta$  i częściowego odwzorowania  $\alpha$  przypomnijmy, iż *otoczką podzbioru  $M$  algebry  $\mathcal{A}$*  nazywamy podzbiór  $\text{hull}(M)$  widma  $X$  dany wzorem

$$\text{hull}(M) = \{x \in X : M \subset \ker x\} = \{x \in X : \widehat{M}(x) = 0\}.$$

W szczególności zachodzi równość  $X \setminus \Delta_1 = \text{hull}(\{\delta(1)\})$ .

**Stwierdzenie 1.4.** *Niech  $I$  będzie jądrem endomorfizmu  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ . Wtedy zachodzi inkluzja  $\Delta_{-1} \subset \text{hull}(I)$ , a przy założeniu, że  $\mathcal{A}$  jest algebrą regularną zachodzi równość  $\Delta_{-1} = \text{hull}(I)$  oraz*

- i)  $\Delta_{-1}$  jest zbiorem otwartym wtedy i tylko wtedy, gdy  $I$  posiada jedynekę,
- ii)  $\Delta_{-1} = X$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\delta$  jest monomorfizmem.

**Dowód.** Jeśli  $y \in \Delta_{-1}$ , to  $y = \alpha(x)$  dla pewnego  $x \in \Delta_1$ , a stąd dla  $a \in I$  mamy  $y(a) = \alpha(x)(a) = x(\delta(a)) = 0$ , co dowodzi inkluzji  $\Delta_{-1} \subset \text{hull}(I)$ . Natomiast, zakładając, że  $\mathcal{A}$  jest algebrą regularną, dla dowolnego  $y \notin \Delta_{-1}$  istnieje  $a \in \mathcal{A}$  takie, że

$$\widehat{a}(y) \neq 0, \quad \widehat{a}(\Delta_{-1}) = 0.$$

Powyższe relacje, różnowartościowość transformaty Gelfanda oraz Stwierdzenie 1.2 implikują, że  $a \in I$  oraz  $y(a) \neq 0$ . Stąd  $y \notin \text{hull}(I)$ , co dowodzi inkluzji  $\Delta_{-1} \supset \text{hull}(I)$ .

i) Jeśli  $I$  posiada jedynekę  $e$ , to  $\Delta_{-1} = \{x \in X : \widehat{e}(x) = 0\}$ , a zatem jest to zbiór domknięto-otwarty, por. [Żel, 19]. Na odwrót, jeśli  $\Delta_{-1}$  jest zbiorem domknięto-otwartym, to istnieje idempotent  $e \in \mathcal{A}$  taki, że  $\widehat{e}$  jest funkcją charakterystyczną zbioru  $\Delta_{-1}$ , [Żel, Tw. 19.2]. Ze wzoru (1.1) oraz różnowartościowości transformaty Gelfanda wynika, że  $e$  jest jedyneką w  $I$ .

ii) Jeśli  $\Delta_{-1} = X$  i  $a \in I$ , to dla każdego  $y \in X$  istnieje  $x \in \Delta_1$  taki, że  $y = \alpha(x)$ , a stąd  $\widehat{a}(y) = \widehat{a}(\alpha(x)) = \widehat{\delta(a)}(x) = 0$ . Zatem  $a = 0$  i jądro  $\delta$  jest trywialne. Na odwrót

jeśli  $\delta$  jest monomorfizmem, to dla każdego  $y \in X$  wzór  $y \circ \delta^{-1}$  definiuje niezerowy liniowo-multiplikatywny funkcjonal na  $\delta(\mathcal{A})$ . Stąd, że  $\delta(\mathcal{A}) \cong \mathcal{A}$  jest algebrą regularną  $y \circ \delta^{-1}$  przedłuża się do pewnego elementu  $x \in X$ , [Żel, Tw. 2.16, Tw. 15.7]. Oczywiście mamy  $y = x \circ \delta = \alpha(x)$ , a zatem  $x \in \Delta_{-1}$ . ■

W teorii  $C^*$ -algebr częściowym automorfizmem algebry nazywa się izomorfizm pomiędzy jej dwoma ideałami [Exel94], [ELQ02]. Do naszych celów wygodniejsza jednak będzie następująca

**Definicja 1.5.** *Częściowym automorfizmem* nazywać będziemy endomorfizm algebry Banacha  $\mathcal{A}$ ,  $1 \in \mathcal{A}$ , którego jądro oraz obraz są składnikami prostymi algebry  $\mathcal{A}$ .

Jeśli  $\delta$  jest częściowym automorfizmem  $\mathcal{A}$ , to algebra  $\mathcal{A}$  rozkłada się na dwie sumy proste ideałów

$$\mathcal{A} = \ker \delta \oplus (\ker \delta)^\perp, \quad \mathcal{A} = \delta(\mathcal{A}) \oplus \delta(\mathcal{A})^\perp$$

gdzie dla podzbioru  $M \subset \mathcal{A}$  przyjmujemy oznaczenie

$$M^\perp := \{a \in \mathcal{A} : aM = \{0\}\};$$

$M^\perp$  jest domkniętym dwustronnym ideałem w  $\mathcal{A}$  zwanym *anihilatorem* zbioru  $M$ . Oczywiście  $\delta : (\ker \delta)^\perp \rightarrow \delta(\mathcal{A})$  jest izomorfizmem pomiędzy dwoma ideałami w  $\mathcal{A}$ .

**Stwierdzenie 1.6.** *Jeśli  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  jest częściowym automorfizmem, to istnieje dokładnie jeden częściowy automorfizm  $\delta_* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  będący uogólnioną odwrotnością  $\delta$ , tj. spełniający relacje*

$$\delta = \delta \delta_* \delta, \quad \delta_* = \delta_* \delta \delta_*. \quad (1.2)$$

*Ponadto wtedy  $(\ker \delta_*)^\perp = \delta(\mathcal{A}) = \delta(1)\mathcal{A}$  oraz  $(\ker \delta)^\perp = \delta_*(\mathcal{A}) = \delta_*(1)\mathcal{A}$ .*

**Dowód.** Nietrudno spostrzec, że wzór

$$\delta_*(a) := \delta^{-1}(a_1), \quad \text{dla } a = a_1 \oplus a_2 \in \delta(\mathcal{A}) \oplus \delta(\mathcal{A})^\perp, \quad (1.3)$$

gdzie  $\delta^{-1}$  jest odwrotnością izomorfizmu  $\delta : (\ker \delta)^\perp \rightarrow \delta(\mathcal{A})$ , zadaje żądany częściowy automorfizm  $\delta_*$ . Na odwrót, niech  $\delta_*$  będzie częściowym automorfizmem spełniającym relacje (1.2). Z relacji  $\delta = \delta \delta_* \delta$  wynika, że  $\ker \delta_* \cap \delta(\mathcal{A}) = \{0\}$ . Oznaczając przez  $Q$  jedynekę w  $\ker \delta_*$  mamy zatem  $Q \cdot \delta(1) = 0$ , lub równoważnie  $\delta(1) = (1 - Q)\delta(1)$ , skąd  $\delta(\mathcal{A}) = \delta(1)\mathcal{A} \subset (1 - Q)\mathcal{A} = (\ker \delta_*)^\perp$ . Z relacji  $\delta_* = \delta_* \delta \delta_*$  natomiast wynika, że  $\delta_*(\delta(\mathcal{A})) = \delta_*(\mathcal{A})$ , czyli  $(\ker \delta_*)^\perp \subset \delta(\mathcal{A})$ , co wraz z poprzednią inkluzją daje równość  $(\ker \delta_*)^\perp = \delta(\mathcal{A})$ . Na mocy symetrii założeń otrzymujemy także równość  $(\ker \delta)^\perp = \delta_*(\mathcal{A})$ , co wraz z relacjami (1.2) implikuje, że  $\delta_*$  jest postaci (1.3). ■

Stąd, por. [Żel, 19.2], natychmiast otrzymujemy

**Stwierdzenie 1.7.** *Jeśli  $\delta$  jest częściowym automorfizmem przemiennej algebry Banacha  $\mathcal{A}$ , to częściowe odwzorowanie  $\alpha : \Delta_1 \rightarrow \Delta_{-1}$  dualne do  $\delta$  jest homeomorfizmem pomiędzy dwoma domknięto-otwartymi podzbiórami  $\Delta_{\pm 1} \subset X$  i  $\alpha^{-1} : \Delta_{-1} \rightarrow \Delta_1$  jest odwzorowaniem dualnym do częściowego automorfizmu  $\delta_*$  spełniającego (1.2):*

$$\widehat{\delta_*(a)}(x) = \begin{cases} \widehat{\alpha^{-1}(x)}, & x \in \Delta_{-1}, \\ 0, & x \notin \Delta_{-1}, \end{cases} \quad x \in X, a \in \mathcal{A}.$$

**Definicja 1.8.** Homeomorfizm pomiędzy domknięto-otwartymi zbiorami przestrzeni  $X$  nazywać będziemy *częściowym homeomorfizmem*  $X$ .

## 1.2 Częściowe izometrie na przestrzeniach Banacha jako operatory generujące endomorfizmy algebr Banacha

Przypomnijmy (patrz na przykład [Hal82, Problem 98]), iż operator  $T \in L(H)$  na przestrzeni Hilberta  $H$  nazywamy *częściową izometrią*, gdy na ortogonalnym dopełnieniu swojego jądra jest on izometrią. Wtedy przestrzeń  $H_i = (\ker T)^\perp$  nazywamy *przestrzenią inicjalną*, a przestrzeń  $H_f = TH_i$  *przestrzenią finalną* częściowej izometrii  $T$ . Ponadto częściowa izometria posiada następujące czysto algebraiczne charakterystyki pozwalające przenieść to pojęcie na grunt algebr z involucją. Mianowicie  $T$  jest częściową izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z równoważnych warunków

- i)  $T^*T$  jest rzutem ortogonalnym (na przestrzeń inicjalną),
- ii)  $TT^*$  jest rzutem ortogonalnym (na przestrzeń finalną),
- iii)  $TT^*T = T$ ,
- iv)  $T^*TT^* = T^*$ .

Co więcej mamy następującą charakterystykę [Mbe04, 3.1, 3.3], która jest przyczynkiem do wprowadzenia definicji częściowej izometrii na przestrzeniach Banacha.

**Twierdzenie 1.9.** *Niech  $H$  będzie przestrzenią Hilberta i niech  $T \in L(H)$ . Następujące warunki są równoważne*

- i)  $T$  jest częściową izometrią,
- ii)  $T$  jest kontrakcją oraz istnieje kontrakcja  $S \in L(H)$  będąca uogólnioną odwrotnością  $T$ , tj. taka, że

$$TST = T, \quad STS = S.$$

Ponadto jeśli zachodzi i) oraz ii), to  $S = T^*$ .

W świetle powyższego twierdzenia naturalna jest poniższa

**Definicja 1.10** ([Mbe04]). Niech  $T$  będzie kontrakcją na przestrzeni Banacha  $E$ . Jeśli istnieje kontrakcja  $S \in L(E)$  taka, że

$$TST = T, \quad STS = S, \tag{1.4}$$

to operator  $T$  będziemy nazywać *częściową izometrią*, a kontrakcje  $T$  i  $S$  spełniające (1.4) będziemy nazywać wzajemnie *sprzężonymi izometriami częściowymi*.

**Uwaga 1.11.** i) Jeśli  $E$  jest przestrzenią Hilberta, to wprowadzone powyżej pojęcia częściowej izometrii oraz sprzężenia pokrywają się z klasycznymi terminami.

- ii) Częściowa izometria na przestrzeni Banacha może być sprzężona z dwoma różnymi częściowymi izometriami, patrz Przykład 1.13.

- iii) Nie każda izometria na przestrzeni Banacha jest częściową izometrią. Przy czym istnieją przestrzenie Banacha, nie będące przestrzeniami Hilberta, dla których każda izometria jest częściową izometrią. Do takich przestrzeni należą na przykład przestrzenie typu  $L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , porównaj [Mbe04].

Interpretacja geometryczna częściowej izometrii w przestrzeni Banacha jest możliwa i wyjaśnia ona niejednoznaczność sprzężenia tychże operatorów. Aby to unaocnić przytoczymy tu nieco rozszerzoną wersję [Mbe04, Stw. 4.2], a następnie zobrazujemy to twierdzenie na przykładzie.

**Twierdzenie 1.12.** *Niech  $T \in L(E)$ . Następujące warunki są równoważne*

- i)  $T$  jest częściową izometrią,
- ii) a) jądro  $\ker T$  operatora  $T$  posiada dopełnienie  $M$  takie, że  $T$  na  $M$  jest izometrią,
- b) istnieje rzut  $P \in L(E)$  będący kontrakcją na obraz operatora  $T$ .

Jeśli warunki i), ii) są spełnione to relacje

$$STE = M, \quad TS = P$$

ustalają wzajemnie jednoznaczność odpowiedniość pomiędzy częściowymi izometriami  $S$  sprzężonymi z  $T$  oraz parami  $(M, P)$ , gdzie  $M$  jest dopełnieniem  $\ker T$  a  $P$  jest rzutem na  $TE$  spełniającymi ii).

**Przykład 1.13.** Rozpatrzmy klasyczny, jednostronny operator przesunięcia  $T_{\mathbb{N}}$  działający w przestrzeni  $E = \ell^p(\mathbb{N})$ ,  $p \in [1, \infty]$  lub  $E = c_0(\mathbb{N})$ :

$$T_{\mathbb{N}}(x(1), x(2), x(3), \dots) = (x(2), x(3), \dots).$$

Oczywiście  $T_{\mathbb{N}}$  jest częściową izometrią w sensie Definicji 1.10. Jedynym rzutem na  $T_{\mathbb{N}}E = E$  jest operator identycznościowy oraz gdy  $p < \infty$  jedynym dopełnieniem podprzestrzeni  $\ker T_{\mathbb{N}}$  na którym operator  $T_{\mathbb{N}}$  jest izometrią jest podprzestrzeń

$$M = \{x \in E : x(1) = 0\}.$$

Zatem, gdy  $E = \ell^p(\mathbb{N})$  dla  $p < \infty$  jedyną częściową izometrią sprzężoną z  $T_{\mathbb{N}}$  jest operator prawostronnego przesunięcia

$$S_{\mathbb{N}}(x(1), x(2), \dots) = (0, x(1), x(2), \dots).$$

W pozostałych przypadkach, gdy  $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$  lub  $E = c_0(\mathbb{N})$ , sytuacja się zmienia i dopełnienia jądra  $T_{\mathbb{N}}$  na których  $T_{\mathbb{N}}$  jest izometrią można poindeksować elementami kuli jednostkowej przestrzeni dualnej  $E^*$ :

$$M_f = \{x \in \ell^\infty(\mathbb{N}) : x(1) = f(x(2), x(3), \dots)\}, \quad f \in E^*, \quad \|f\| \leq 1.$$

Zatem wszystkie częściowe izometrie sprzężone z  $T : E \rightarrow E$  są postaci

$$S_f x = (f(x), x(1), x(2), \dots), \quad f \in E^*, \quad \|f\| \leq 1,$$

i jeśli  $E = c_0(\mathbb{N})$ , to jest ich tyle co ciągów absolutnie sumowalnych do jedynki, czyli tyle co unormowanych  $\sigma$ -addytywnych miar na  $\mathbb{N}$ . Natomiast, jeśli  $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$ , to jest ich tyle co unormowanych miar Radona na uzwarceniu Čecha-Stone'a  $\beta(\mathbb{N})$  przestrzeni dyskretnej  $\mathbb{N}$ , czyli tyle co unormowanych miar skończenie addytywnych na  $\mathbb{N}$ .

Ustalmy wzajemnie sprzężone częściowe izometrie  $T, S \in L(E)$  działające na przestrzeni Banacha  $E$ . W naturalny sposób zadają one na  $L(E)$  dwa kolejne odwzorowania

$$\delta(a) = TaS, \quad (1.5)$$

$$\delta_*(a) = SaT, \quad (1.6)$$

gdzie  $a \in L(E)$ . Bezpośredni rachunek daje nam

**Stwierdzenie 1.14.** *Odwzorowania  $\delta, \delta_* : L(E) \rightarrow L(E)$  są wzajemnie sprzężonymi częściowymi izometriami na przestrzeni Banacha  $L(E)$ .*

W następującym stwierdzeniu przedstawione są warunki zapewniające multiplikatywność  $\delta$  na podzbiorach  $L(E)$ , por. [LO04]. Przez  $M'$  oznaczamy komutant zbioru  $M \subset L(E)$ , czyli  $M' := \{a \in L(E) : ba = ab \text{ dla każdego } b \in M\}$ .

**Stwierdzenie 1.15.** *Niech  $M \subset L(E)$ . Następujące warunki są równoważne*

$$i) ST \in M',$$

$$ii) Ta = \delta(a)T \text{ oraz } aS = S\delta(a) \text{ dla każdego } a \in M.$$

*Jeśli  $E$  jest przestrzenią Hilberta, a  $M$  jest zbiorem samosprzężonym, to powyższe warunki równoważne są następującemu*

$$iii) Ta = \delta(a)T \text{ dla każdego } a \in M$$

*Ponadto, jeśli któryś z powyższych warunków jest spełniony, to*

$$\delta(ab) = \delta(a)\delta(b), \quad a, b \in M.$$

**Dowód.** i) $\Rightarrow$ ii) dla  $a \in M$  mamy

$$Ta = TSTa = TaST = \delta(a)T, \quad aS = aSTS = STaS = S\delta(a).$$

ii) $\Rightarrow$ i) dla  $a \in M$  mamy

$$STa = S\delta(a)T = aST.$$

Implikacja ii) $\Rightarrow$ iii) jest oczywista.

Zakładając że  $E$  jest przestrzenią Hilberta otrzymujemy, iż  $S = T^*$  i odwzorowanie  $\delta$  zachowuje inwolucje. Jeśli dodatkowo  $M = M^*$ , to warunek iii) implikuje, że dla  $a \in M$  mamy

$$aS = aT^* = (Ta^*)^* = (\delta(a^*)T)^* = (\delta(a)^*T)^* = T^*\delta(a) = S\delta(a),$$

co dowodzi iii)  $\Rightarrow$  ii).

By zakończyć dowód zauważmy, że z definicji częściowej izometrii oraz podpunktu i), dla  $a, b \in M$ , mamy

$$\delta(ab) = TabS = TSTabS = TaSTbT = \delta(a)\delta(b).$$

■

Stąd oraz ze Stwierzeń 1.2 oraz 1.4 otrzymujemy

**Twierdzenie 1.16.** *Niech  $\mathcal{A} \subset L(E)$  będzie przemienna algebra Banacha zawierająca operator identycznościowy oraz taką, że*

$$TAS \subset \mathcal{A}, \quad ST \in \mathcal{A}'. \quad (1.7)$$

Wtedy odwzorowanie  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  jest endomorfizmem algebry  $\mathcal{A}$  i jeśli  $\alpha$  jest częściowym odwzorowaniem widma  $X$  algebry  $\mathcal{A}$ , dualnym do endomorfizmu  $\delta$ , to

i)  $T$  jest ko-izometrią (tj.  $TE = E$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy  $\Delta_1 = X$ .

Ponadto, gdy  $\mathcal{A}$  jest algebra regularną, to

ii) jeśli  $T$  jest izometrią, to  $\alpha : \Delta_1 \rightarrow X$  jest suriekcją,

iii) jeśli  $T$  jest odwracalną izometrią, to  $\Delta_1 = X$  i  $\alpha : X \rightarrow X$  jest suriekcją.

Przy ustalonej algebrze  $\mathcal{A}$  i częściowej izometrii  $T$  relacje (1.7) mogą być spełnione przez różne częściowe izometrie  $S$  sprzężone z  $T$ , por. Przykład 1.18, lecz co dla nas ważne, endomorfizm  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  nie zależy od wyboru takiego operatora.

**Stwierdzenie 1.17.** *Niech  $\mathcal{A} \subset L(E)$  będzie algebra Banacha,  $1 \in \mathcal{A}$ , i niech  $S_1, S_2 \in L(E)$  będą częściowymi izometriami sprzężonymi z  $T$  takimi, że*

$$TAS_i \subset \mathcal{A}, \quad S_iT \in \mathcal{A}', \quad \text{dla } i = 1, 2.$$

Wtedy odwzorowania  $\delta_i(\cdot) = T(\cdot)S_i$ ,  $i = 1, 2$ , obcięte do algebry  $\mathcal{A}$  pokrywają się, tj. zadają ten sam endomorfizm  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ . Dokładniej endomorfizm ten jest jednoznacznie wyznaczony przez warunki

$$Ta = \delta(a)T, \quad a \in \mathcal{A}, \quad \text{oraz} \quad \delta(1) \text{ jest rzutem na obraz } T. \quad (1.8)$$

Jeśli ponadto  $E$  jest przestrzenią Hilberta, a  $\mathcal{A}$  algebra samosprężoną, to każdy endomorfizm  $\mathcal{A}$  spełniający (1.8) jest postaci  $\delta(a) = TaT^*$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , gdzie  $T^*T \in \mathcal{A}'$ .

**Dowód.** W świetle Twierzeń 1.12, 1.16 oba odwzorowania  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2$ , są endomorfizmami  $\mathcal{A}$  spełniającymi warunki (1.8). Stosując (1.8) do endomorfizmów  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2$ , dla  $a \in \mathcal{A}$  otrzymujemy

$$\delta_1(a)T = Ta = \delta_2(a)T,$$

skąd

$$\delta_1(a) = \delta_1(a)\delta_1(1) = \delta_2(a)\delta_1(1), \quad \delta_2(a) = \delta_2(a)\delta_2(1) = \delta_1(a)\delta_2(1).$$

W szczególności  $\delta_1(1) = \delta_2(1)\delta_1(1) = \delta_1(1)\delta_2(1) = \delta_2(1)$ , a stąd

$$\delta_1(a) = \delta_2(a)\delta_1(1) = \delta_2(a)\delta_2(1) = \delta_2(a).$$

Jeśli  $E$  jest przestrzenią Hilberta i  $\mathcal{A}$  jest przemienną  $C^*$ -algebrą, to każdy endomorfizm  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  jest automatycznie  $*$ -endomorfizmem i w szczególności  $\delta(1)$  jest rzutem ortogonalnym. Jeśli więc  $\delta$  spełniają relacje (1.8), to dla  $a \in \mathcal{A}$  mamy

$$TaT^* = \delta(a)TT^* = \delta(a)\delta(1) = \delta(1).$$

Natomiast relacja  $T^*T \in \mathcal{A}'$  wynika ze Stwierdzenia 1.15. ■

**Przykład 1.18.** Niech  $E = \ell^1(\mathbb{N})$  i rozważmy operator

$$Tx = (x(2) - x(1), x(3), x(4), \dots).$$

Wtedy mamy następujące dopełnienia jądra operatora  $T$ , na których  $T$  jest izometrią:

$$M_\alpha = \{x \in E : x(1) = -\alpha x(2)\}, \quad \alpha \in [0, \infty), \quad M_\infty = \{x \in E : x(1) = 0\},$$

a ponadto,  $T$  jest suriekcją. Zatem  $T$  jest częściową izometrią, a każda częściowa izometria z nią sprzężona jest izometrią, patrz Twierdzenie 1.12: Są to następujące operatory

$$S_\alpha x = \left( \frac{-1}{1+\alpha}x(1), \frac{\alpha}{1+\alpha}x(1), x(2), x(3), \dots \right), \quad S_\infty x = (0, x(1), x(2), x(3), \dots),$$

gdzie  $\alpha \in [0, \infty)$ . Oczywiście  $TS_\alpha = 1$ ,  $\alpha \in [0, \infty]$ , a zatem odwzorowania

$$\delta_\alpha(a) = TaS_\alpha, \quad a \in L(E), \quad \alpha \in [0, \infty],$$

zachowują jedynekę  $1 \in L(E)$ . Rozważmy dwie sytuacje:

- i) Jeśli położymy  $\mathcal{A} = \{1\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$ , to wszystkie pary operatorów  $(T, S_\alpha)$ ,  $\alpha \in [0, \infty]$ , spełniają relacje (1.10), (1.9) i wszystkie odwzorowania  $\delta_\alpha$  zadają na  $\mathcal{A}$  endomorfizm identycznościowy.
- ii) Jeśli  $\mathcal{A}$  jest algebrą składającą się z operatorów mnożenia przez ciągi stałe począwszy od drugiej współrzędnej, tj. ciągi postaci  $(a, b, b, b, \dots)$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$ , to wszystkie odwzorowania  $\delta_\alpha$ ,  $\alpha \in [0, \infty]$ , zachowują algebrę  $\mathcal{A}$ , ale tylko operatory  $\delta_0$  i  $\delta_\infty$  są multiplikatywne na  $\mathcal{A}$ . Ponadto  $\delta_0$  i  $\delta_\infty$  zadają na  $\mathcal{A}$  różne endomorfizmy

$$\delta_0(a, b, b, b, \dots) = (a, b, b, b, \dots), \quad \delta_\infty(a, b, b, b, \dots) = (b, b, b, b, \dots).$$

Sytuacja ta nie jest sprzeczna ze Stwierdzeniem 1.17, gdyż spośród par  $(T, S_\alpha)$ ,  $\alpha \in [0, \infty]$ , tylko  $T$  i  $S_\infty$  spełniają relacje (1.10), (1.9).

### 1.3 Operatory przesunięcia z wagą na przestrzeni Banacha. Przedłużenie endomorfizmu do częściowego automorfizmu

Posługując się relacjami z Twierdzenia 1.16 sformułujemy teraz definicję (abstrakcyjnego) operatora przesunięcia z wagą, gdzie rolę operatora przesunięcia będzie odgrywała częściowa izometria generująca endomorfizm na algebrze wag, a rolę przesunięcia odgrywać będzie odwzorowanie do niego dualne. Określenie to jest naturalnym uogólnieniem Definicji 0.1 wprowadzonej przez A. B. Antonevicha i A. V. Lebedeva. Relacje między obiema definicjami wyjaśnimy w Twierdzeniu 1.23.

**Definicja 1.19 (Abstrakcyjne operatory przesunięcia z wagą).** Niech  $E$  będzie przestrzenią Banacha i niech  $\mathcal{A} \subset L(E)$  będzie algebrą Banacha taką, że  $1 \in \mathcal{A}$ . Jeśli  $T \in L(E)$  jest częściową izometrią sprzężoną z częściową izometrią  $S$  taką, że

$$TAS \subset \mathcal{A}, \quad (1.9)$$

$$ST \in \mathcal{A}', \quad (1.10)$$

to każdy operator postaci

$$aT, \quad a \in \mathcal{A},$$

będziemy nazywać (*abstrakcyjnym*) *operatorem przesunięcia z wagą* w algebrze  $\mathcal{A}$ . Ponadto będziemy mówić, że operator  $T$  *generuje na  $\mathcal{A}$  endomorfizm  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$* , gdzie  $\delta(\cdot) = T(\cdot)S$ , por. Twierdzenie 1.16, Stwierdzenie 1.17, a także, że operator  $T$  *generuje na widmie  $X$  algebry  $\mathcal{A}$  częściowe odwzorowanie  $\alpha$* , gdzie  $\alpha$  jest odwzorowaniem dualnym do endomorfizmu  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ .

Z relacji (1.9), Stwierdzenia 1.15 oraz przemienności algebry  $\mathcal{A}$  wynika iż operator  $\delta_*(\cdot) = S(\cdot)T$  jest multiplikatywny na  $\mathcal{A}$ . Zatem odwzorowanie  $\delta_*$  jest endomorfizmem  $\mathcal{A}$  wtedy i tylko wtedy, gdy ją zachowuje, czyli gdy

$$SAT \subset \mathcal{A}. \quad (1.11)$$

Fundamentalną dla niniejszej pracy uwagą jest, iż niedogodność wynikająca stąd, że w Definicji 1.19 nie zakładamy relacji (1.11) można zawsze usunąć przechodząc do większej algebry. To znaczy, każdy operator przesunięcia z wagą w algebrze  $\mathcal{A}$  zawsze można rozpatrywać jako operator przesunięcia z wagą w większej algebrze, na której oba odwzorowania  $\delta$  oraz  $\delta_*$  są endomorfizmami (o tym mówi Twierdzenie 1.23, wykazane poniżej).

**Przykład 1.20 (Klasyczne operatory przesunięcia z wagą).** Niech  $T_{\mathbb{N}}, S_{\mathbb{N}}$  będą klasycznymi operatorami przesunięcia działającymi w przestrzeni  $E$ , patrz Przykład 1.13, i niech  $\mathcal{A} \subset L(E)$  będzie algebrą wszystkich operatorów mnożenia przez ciągi ograniczone:  $\mathcal{A} \cong l^\infty(\mathbb{N})$ . Wtedy  $T_{\mathbb{N}}$  i  $S_{\mathbb{N}}$  są wzajemnie sprzężonymi częściowymi izometriami oraz

$$T_{\mathbb{N}} \mathcal{A} S_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, \quad S_{\mathbb{N}} \mathcal{A} T_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}.$$



Zatem *klasyczne jednostronne operatory przesunięcia wagą*  $aT_{\mathbb{N}}$ ,  $aS_{\mathbb{N}}$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , są abstrakcyjnymi operatorami przesunięcia z wagą w algebrze  $\mathcal{A}$ . Jeśli zaś rozważymy podalgebrę  $\mathcal{A}_{per(n)}$  algebry  $\mathcal{A}$  składająca się operatorów mnożenia przez ciągi okresowe o okresie  $n > 1$ , to nietrudno spostrzec, że

$$T_{\mathbb{N}} \mathcal{A}_{per(n)} S_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_{per(n)}, \quad S_{\mathbb{N}} T_{\mathbb{N}} \in \mathcal{A}'_{per(n)}$$

oraz  $S_{\mathbb{N}} T_{\mathbb{N}}$  jest operatorem mnożenia przez ciąg  $(0, 1, 1, 1, \dots)$ , czyli  $S_{\mathbb{N}} T_{\mathbb{N}} \notin \mathcal{A}_{per(n)}$  i tym bardziej  $S_{\mathbb{N}} \mathcal{A}_{per(n)} T_{\mathbb{N}} \not\subset \mathcal{A}_{per(n)}$ . Stąd, dla  $a \in \mathcal{A}_{per(n)}$ , operator  $aT_{\mathbb{N}}$  jest abstrakcyjnym operatorem przesunięcia z wagą w algebrze  $\mathcal{A}_{per(n)}$ , a operator  $aS_{\mathbb{N}}$  już nie.

Przejdziemy teraz do kanonicznej konstrukcji algebry  $\mathcal{B}$  zawierającej algebrę  $\mathcal{A}$  ( $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ ), na której spełnione są obie relacje (1.9), (1.11). Korzystać będziemy z następujących własności rozważanych obiektów, por. [LO04, Stw. 3.6].

**Stwierdzenie 1.21.** *Niech  $T$  i  $S$  będą wzajemnie sprzężonymi częściowymi izometriami spełniającymi warunki (1.9), (1.10) oraz niech  $\delta$  i  $\delta_*$  będą dane wzorami (1.5), (1.6). Wtedy*

i) dla każdego  $k = 1, 2, \dots$

$$S^k T^k \in \mathcal{A}',$$

ii) operatory  $T^k$  oraz  $S^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , są częściowymi izometriami, a dokładniej

$$T^k S^k T^k = T^k, \quad S^k T^k S^k = S^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.12)$$

iii) rodziny  $\{T^k S^k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{\delta^k(1)\}_{k \in \mathbb{N}}$  oraz  $\{S^k T^k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{\delta_*^k(1)\}_{k \in \mathbb{N}}$  tworzą zstępujące ciągi parami komutujących rzutów o normie nie większej niż 1,

iv) dla każdego  $a, b \in \mathcal{A}$  oraz  $n \geq k \geq 0$  mamy

$$\delta_*^n(a) \delta_*^k(b) = \delta_*^n(a \delta^{n-k}(b)), \quad \delta_*^k(a) \delta_*^n(b) = \delta_*^n(\delta^{n-k}(a) b).$$

**Dowód.** i). Korzystając ze Stwierdzenia 1.15, dla  $a \in \mathcal{A}$  mamy

$$S^k T^k a = S^k \delta^k(a) T^k = a S^k T^k$$

ii). Dowód jest indukcyjny. Ustalmy  $n > 1$  i założmy, że relacje (1.12) zachodzą dla  $k < n$ . Wtedy

$$T^n S^n T^n = T^{n-1} (TS) (S^{n-1} T^{n-1}) T = T^{n-1} (S^{n-1} T^{n-1}) (TS) T = T^n$$

$$S^n T^n S^n = S^{n-1} (ST) (T^{n-1} S^{n-1}) S = S^{n-1} (T^{n-1} S^{n-1}) (ST) S = S^n$$

iii). Wynika natychmiast z ii) oraz Twierdzenia 1.12 .

iv). Na mocy i), ii) mamy

$$\delta_*^n(a) \delta_*^k(b) = S^n a T^n S^k b T^k = S^n a T^{n-k} (T^k S^k) b T^k = S^n a T^{n-k} b T^k =$$

$$= S^n a T^{n-k} (S^{n-k} T^{n-k}) b T^k = S^n a T^{n-k} b S^{n-k} T^n = \delta_*^n(a \delta^{n-k}(b))$$

i analogicznie

$$\begin{aligned} \delta_*^k(a) \delta_*^n(b) &= S^k a T^k S^n b T^n = S^k a (T^k S^k) S^{n-k} b T^n = S^k a S^{n-k} b T^n = \\ &= S^k a (S^{n-k} T^{n-k}) S^{n-k} b T^n = S^n T^{n-k} a S^{n-k} b T^n = \delta_*^n(\delta^{n-k}(a) b). \end{aligned}$$

■

Algebrę  $\mathcal{B}$ , przy powyższych założeniach i oznaczeniach, zdefiniujemy jako domknięcie zbioru elementów postaci

$$a_0 + \delta_*(a_1) + \dots + \delta_*^n(a_n), \quad a_i \in \mathcal{A}, \quad i = 1, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N},$$

czyli innymi słowy kładziemy

$$\mathcal{B} := \overline{\text{span}} \left\{ \bigcup_{n=0}^{\infty} \delta_*^n(\mathcal{A}) \right\} = \overline{\text{span}} \left\{ \bigcup_{n=0}^{\infty} S^n \mathcal{A} T^n \right\}, \quad (1.13)$$

gdzie  $\overline{\text{span}}\{K\}$  oznacza domkniętą przestrzeń liniową rozpiętą przez zbiór  $K$ . Ze wzoru (1.13) i poniższego stwierdzenia wynika, że  $\mathcal{B}$  jest najmniejszą algebrą Banacha zawierającą  $\mathcal{A}$ , zachowywaną przez oba odwzorowania  $\delta$  i  $\delta_*$ , por. [LO04, Stw. 4.1].

**Twierdzenie 1.22.** *Przestrzeń  $\mathcal{B}$  jest przemienną algebrą Banacha i oba odwzorowania  $\delta : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  oraz  $\delta_* : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  są częściowymi automorfizmami takimi, że*

$$\delta = \delta \delta_* \delta, \quad \delta_* = \delta_* \delta \delta_*,$$

por. Definicja 1.5, Stwierdzenie 1.6. Jeśli ponadto,  $E$  jest przestrzenią Hilberta i  $\mathcal{A}$  jest  $C^*$ -algebrą, to  $\mathcal{B}$  jest  $C^*$ -algebrą, a  $\delta$  i  $\delta_*$  są  $*$ -endomorfizmami.

**Dowód.** Zarówno fakt, że  $\mathcal{B}$  jest algebrą jak i jej przemienność wynikają łatwo z podpunktu iv) Stwierdzenia 1.21. Rzeczywiście, jeśli  $a, b \in \mathcal{A}$  oraz  $n \geq k \geq 0$ , to po pierwsze  $\delta_*^n(a) \delta_*^k(b) = \delta_*^n(a \delta^{n-k}(b)) \in \mathcal{B}$  i  $\delta_*^k(a) \delta_*^n(b) = \delta_*^n(\delta^{n-k}(a) b) \in \mathcal{B}$ , a po drugie

$$\delta_*^n(a) \delta_*^k(b) = \delta_*^n(a \delta^{n-k}(b)) = \delta_*^n(\delta^{n-k}(b) a) = \delta_*^k(b) \delta_*^n(a)$$

i analogicznie  $\delta_*^k(a) \delta_*^n(b) = \delta_*^n(b) \delta_*^k(a)$ .

Jasne jest, że oba odwzorowania  $\delta$  i  $\delta_*$  zachowują algebrę  $\mathcal{B}$ . Są one na  $\mathcal{B}$  multiplikatywne, gdyż  $TS, ST \in \mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ , patrz Stwierdzenie 1.15, a relacje  $\delta = \delta \delta_* \delta$ ,  $\delta_* = \delta_* \delta \delta_*$  sprawdza się bezpośrednio, por. Stwierdzenie 1.14. Pozostaje nam jedynie wykazać, że  $\delta$  i  $\delta_*$  są częściowymi automorfizmami.

Z jednej strony  $\delta(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}\delta(1)$  i  $\delta_*(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}\delta_*(1)$ , a z drugiej, stosując Stwierdzenia 1.21 iv) do algebry  $\mathcal{B}$  otrzymujemy,  $\delta(\delta_*(\mathcal{B})) = \mathcal{B}\delta(1)$  i  $\delta_*(\delta(\mathcal{B})) = \mathcal{B}\delta_*(1)$ , skąd

$$\delta(\mathcal{B}) = \mathcal{B}\delta(1), \quad \delta_*(\mathcal{B}) = \mathcal{B}\delta_*(1)$$

są składnikami prostymi algebry  $\mathcal{B}$ . Dalej zauważmy, że  $\mathcal{B}(1 - \delta(1))$  zawiera się w jądrze  $\delta_* : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ , gdyż

$$\delta_*(b(1 - \delta(1))) = \delta_*(b)(\delta_*(1) - \delta_*(\delta(1))) = \delta_*(b)(\delta_*(1) - \delta_*(1)) = 0.$$

Natomiast na  $\mathcal{B}\delta(1)$  odwzorowanie  $\delta_*$  jest izomorfizmem, gdyż jeśli  $\delta_*(b\delta(1))$ , dla pewnego  $b \in \mathcal{B}$ , to stąd, że  $\delta(\mathcal{B}) = \mathcal{B}\delta(1)$  istnieje element  $a \in \mathcal{B}$  taki, że  $\delta(a) = b\delta(1)$ , a wtedy

$$b\delta(1) = \delta(a) = \delta(\delta_*(\delta(a))) = \delta(\delta_*(b\delta(1))) = 0.$$

Zatem jądrem  $\delta_* : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  jest  $\mathcal{B}(1 - \delta(1))$  i przez symetrię jądrem  $\delta : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  jest  $\mathcal{B}(1 - \delta_*(1))$ . Tym samym dowód pierwszej części twierdzenia jest zakończony. Pozostała część tezy jest jasna. ■

Jako wniosek z powyższego twierdzenia oraz ze Stwierdzenia 1.7 otrzymujemy rezultat wyjaśniający związek wprowadzonej przez nas Definicji 1.19 z Definicją 0.1 wprowadzoną przez A. B. Antonevicha i A. V. Lebedeva.

**Twierdzenie 1.23.** *Jeśli  $aT$  jest operatorem przesunięcia z wagą w algebrze  $\mathcal{A}$  oraz  $T$  i  $S$  są wzajemnie sprzężonymi częściowymi izometriami spełniającymi relacje (1.10) i (1.9), to oba operatory  $aT$  i  $aS$  są operatorami przesunięcia z wagą w algebrze  $\mathcal{B}$  danej wzorem (1.13), a dokładniej*

$$TBS \subset \mathcal{B}, \quad SBT \subset \mathcal{B}.$$

*W szczególności operator  $T$  generuje na widmie  $\tilde{X}$  algebry  $\mathcal{B}$  częściowy homeomorfizm  $\tilde{\alpha} : \tilde{\Delta}_1 \rightarrow \tilde{\Delta}_{-1}$ , a operator  $S$  generuje homeomorfizm  $\tilde{\alpha}^{-1} : \tilde{\Delta}_{-1} \rightarrow \tilde{\Delta}_1$  do niego odwrotny.*

## 1.4 Spektralny opis układu rozszerzonego $(\mathcal{B}, \delta)$

W poprzednim podrozdziale pokazaliśmy (Twierdzenia 1.22, 1.23), że dowolny operator  $T$  generujący endomorfizm  $\delta$  na algebrze  $\mathcal{A}$  generuje częściowy automorfizm na większej algebrze  $\mathcal{B}$ , tj. endomorfizm  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  rozszerza się do częściowego automorfizmu  $\delta : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ . W obecnym podrozdziale opiszemy częściowy układ dynamiczny  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  dualny do  $(\mathcal{B}, \delta)$  w terminach układu  $(X, \alpha)$  dualnego do  $(\mathcal{A}, \delta)$ . Zanim to nastąpi nadmienimy trzy ważne fakty.

Po pierwsze, opis układu  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$ , który otrzymamy wiąże się z pojęciem granicy odwrotnej (w kategorii przestrzeni topologicznych), dlatego też warto przywołać tu definicję tej struktury.

**Definicja 1.24.** Jeśli  $\alpha : X \rightarrow X$  jest ciągłym odwzorowaniem przestrzeni topologicznej  $X$ , to *granica odwrotną* ciągu odwrotnego

$$X \xleftarrow{\alpha} X \xleftarrow{\alpha} X \xleftarrow{\alpha} \dots$$

nazywamy przestrzeń topologiczną postaci

$$\varprojlim (X, \alpha) = \{(x_0, x_1, \dots) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X : \alpha(x_{n+1}) = x_n, n \in \mathbb{N}\}$$

rozpatrywaną z topologią produktową odziedziczoną z przestrzeni  $\prod_{n \in \mathbb{N}} X$  będącej iloczynem kartezjańskim przeliczalnej ilości kopii przestrzeni  $X$ . Na przestrzeni  $\varprojlim (X, \alpha)$  mamy naturalnie określony homeomorfizm

$$\tilde{\alpha}(x_0, x_1, \dots) = (\alpha(x_0), x_0, x_1, \dots), \quad (x_0, x_1, \dots) \in \varprojlim (X, \alpha),$$

zwany *homeomorfizmem indukowanym* przez odwzorowanie  $\alpha : X \rightarrow X$ .

Po drugie, opis układu  $(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$  zależy będzie, w pewien dość subtelny sposób, od „położenia” rzutu  $ST$  względem algebry  $\mathcal{A}$ . Pouczającym jest więc zbadanie algebry generowanej przez  $\mathcal{A}$  oraz  $ST$ , co też uczynimy jako preludium do głównego rezultatu (Twierdzenie 1.28).

Po trzecie, czysto topologiczny opis układu rozszerzonego  $(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$  umożliwi nam łatwą konstrukcję operatorów generujących (w sensie Definicji 1.19) dowolnie wybrany częściowy układ dynamiczny (Twierdzenie 1.34).

W niniejszym podrozdziale zakładamy, że  $\mathcal{A}$  oraz  $S, T$  spełniają założenia Definicji 1.19;  $\delta, \delta_*$  są dane przez (1.5), (1.6);  $\mathcal{B}$  jest algebrą (1.13), por. Twierdzenie 1.22;  $X$  i  $\widetilde{X}$  są przestrzeniami ideałów maksymalnych algebr  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{B}$ ;  $\alpha$  jest częściowym odwzorowaniem dualnym do endomorfizmu  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ;  $\widetilde{\alpha}$  jest częściowym homeomorfizmem dualnym do częściowego automorfizmu  $\delta : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ , por. Twierdzenie 1.23.

### 1.4.1 Dołączenie do algebry $\mathcal{A}$ rzutu $ST$

Rozważmy algebrę Banacha  $\mathcal{A}_+$  generowaną przez  $\mathcal{A}$  oraz rzut  $ST$  na podprzestrzeń inicjalną częściowej izometrii  $T$ :

$$\mathcal{A}_+ = ST\mathcal{A} \oplus (1 - ST)\mathcal{A}. \quad (1.14)$$

Algebra  $\mathcal{A}_+$  jest przemianna:  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_+ \subset \mathcal{B}$ . Odwzorowanie  $\delta$  zachowuje  $\mathcal{A}_+$  i zadaje endomorfizm  $\delta : \mathcal{A}_+ \rightarrow \mathcal{A}_+$ , którego jądrem jest składnik prosty  $(1 - ST)\mathcal{A}$ .

**Stwierdzenie 1.25.** *Algebra  $\mathcal{A}_+$  jest izomorficzna z sumą prostą algebr ilorazowych  $\mathcal{A}/I \oplus \mathcal{A}/J$ , gdzie*

$$I = \{a \in \mathcal{A} : STa = 0\} = (1 - ST)\mathcal{A} \cap \mathcal{A},$$

*jest jądrem endomorfizmu  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , a*

$$J = \{a \in \mathcal{A} : STa = a\} = ST\mathcal{A} \cap \mathcal{A} \quad (1.15)$$

*jest obustronnym domkniętym ideałem w  $\mathcal{A}$ , zawartym w anihilatorze  $I^\perp$  jądra  $I$ . Izomorfizm  $\mathcal{A}_+ \cong \mathcal{A}/I \oplus \mathcal{A}/J$  ustala przyporządkowanie*

$$STa + (1 - ST)b \longmapsto a + I \oplus b + J, \quad a, b \in \mathcal{A},$$

*przy którym endomorfizm  $\delta : \mathcal{A}_+ \rightarrow \mathcal{A}_+$  przechodzi na odwzorowanie postaci  $a + I \oplus b + J \longmapsto \delta(a) + I \oplus \delta(b) + J$ .*

**Dowód.** By wykazać, że  $I$  jest jądrem endomorfizmu  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  zauważmy, że jeśli  $a \in \mathcal{A}$  oraz  $STa = 0$ , to  $\delta(a) = TaS = T(STa)S = 0$ . Jeśli natomiast  $STa \neq 0$ , to  $\delta(a) \neq 0$ , ponieważ  $S\delta(a)T = STaST = STa \neq 0$ .

Pozostała część tezy jest prostą konsekwencją definicji ideałów  $I, J$ . W szczególności  $I \cap J = \{0\}$ , czyli  $J \subset I^\perp$ . ■

Stwierdzenie 1.25 mówi, że składnik prosty  $ST\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/I$  algebry  $\mathcal{A}_+$  jest całkowicie wyznaczony przez parę  $(\mathcal{A}, \delta)$ , gdyż  $I$  jest jądrem  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ . Pozostały składnik

$$(1 - ST)\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/J$$

zależy jednak w sposób istotny od reprezentacji endomorfizmu  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  przez generujące go częściowe izometrie  $T, S$ . W pracy [KL07'] wykazano, że dla ustalonego endomorfizmu  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $C^*$ -algebry  $\mathcal{A}$ , ideał  $J$  dany wzorem (1.15) może być dowolnym ideałem w  $\mathcal{A}$  zawartym w anihilatorze  $I^\perp$  ideału  $I$ . Na poziomie spektralnym oznacza to, że otoczka

$$Y = \text{hull}(J) = \{x \in X : \hat{J}(x) = 0\} \quad (1.16)$$

ideału  $J$  danego przez (1.15) nie jest jednoznacznie wyznaczona przez parę  $(X, \alpha)$ .

**Stwierdzenie 1.26.** *Niech  $\mathcal{A}$  będzie algebrą regularną. Przy powyższych oznaczeniach,  $Y$  jest domkniętym zbiorem zawierającym  $X \setminus \Delta_{-1}$ , a widmo  $X_+$  algebry  $\mathcal{A}_+$  wyraża się jako następująca (topologiczna) suma prosta*

$$X_+ = \Delta_{-1} \sqcup Y$$

zbiorów  $\Delta_{-1}$  oraz  $Y$ . Częściowe odwzorowanie  $\alpha_+$  dualne do endomorfizmu  $\delta : \mathcal{A}_+ \rightarrow \mathcal{A}_+$  zdefiniowane jest na zbiorze

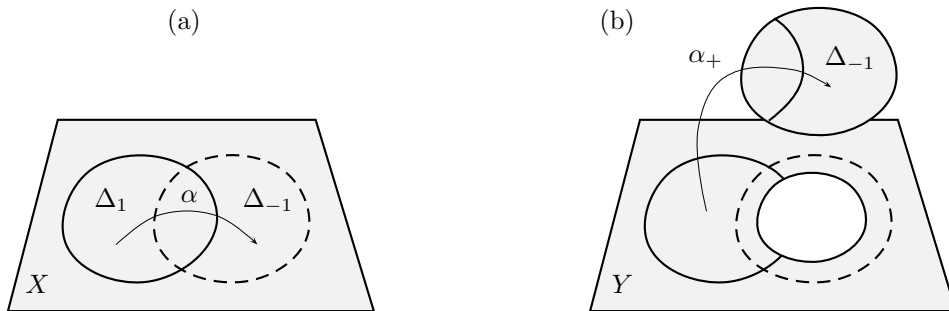
$$(\Delta_{-1} \cap \Delta_1) \sqcup (Y \cap \Delta_1)$$

i przyjmując wartości w pierwszym składniku prostym  $X_+ = \Delta_{-1} \sqcup Y$  wyraża się wzorem

$$\alpha_+(x) = \alpha(x), \quad x \in (\Delta_{-1} \cap \Delta_1) \sqcup (Y \cap \Delta_1),$$

patrz Rysunek 1.4.1. W szczególności  $ST \in \mathcal{A}$ , czyli  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+$ , wtedy i tylko wtedy, gdy  $Y = X \setminus \Delta_{-1}$  i wtedy  $\Delta_{-1}$  jest zbiorem domknięto-otwartym, por. Stwierdzenie 1.4.

**Dowód.** Na mocy Stwierdzenia 1.4,  $\text{hull}(I) = \{x \in X : x(I) = 0\} = \Delta_{-1}$ . Relacja  $I \cap J = \{0\}$  implikuje, że dla każdego  $x \in X$  mamy albo  $x(I) = 0$ , albo  $x(J) = 0$ . Zatem  $X \setminus \Delta_{-1} \subset Y$ . Wzór  $X_+ = \Delta_{-1} \sqcup Y$  oraz postać  $\alpha_+$  wynika ze Stwierdzenia 1.25 oraz faktu, iż przestrzenie ideałów maksymalnych algebr ilorazowych  $\mathcal{A}/I$  i  $\mathcal{A}/J$  można utożsamić z podzbiórami  $\text{hull}(I)$  i  $\text{hull}(J)$ . ■



Rysunek 1.1: Częściowy układ dynamiczny  $(X, \alpha)$  generowany przez  $T$  na  $\mathcal{A}$  (a); częściowy układ dynamiczny  $(X_+, \alpha_+)$  generowany przez  $T$  na  $\mathcal{A}_+$  (b).

Mówiąc obrazowo, jeśli algebra  $\mathcal{A}$  jest regularna, to przestrzeń  $X_+$  powstaje przez „wycięcie” z  $X$  zbioru  $\Delta_{-1}$  oraz „zastąpienie” zbioru  $X \setminus \Delta_{-1}$  domkniętym zbiorem

$Y$  zawierającym  $X \setminus \Delta_{-1}$ . Obrazem  $\alpha_+$  jest „wycięty” zbiór  $\Delta_{-1}$ , a dziedziną  $\alpha_+$  jest suma prosta  $(\Delta_1 \cap \Delta_{-1}) \sqcup (\Delta_1 \cap Y)$ . Zatem obraz  $\alpha$  i  $\alpha_+$  można utożsamić, natomiast dziedziną  $\alpha_+$  w stosunku do dziedziny  $\alpha$  powiększa się o zbiór  $\Delta_1 \cap Y \cap \Delta_{-1}$ .

**Uwaga 1.27.** W pewnym sensie naturalną sytuacją, porównaj [Kwa07], jest gdy zbiór  $Y$  jest najmniejszym z możliwych, czyli gdy  $Y = \overline{X \setminus \Delta_{-1}}$ . Tak będzie w większości rozpatrywanych przez nas przykładów, jednakże raz jeszcze podkreślamy, że w ogólności  $Y$  może być dowolnym domkniętym zbiorem zawierającym  $X \setminus \Delta_{-1}$ .

Dla nieregularnych algebr sytuacja komplikuje się jeszcze bardziej i jedynym co możemy powiedzieć o widmie  $X_+$  algebry  $\mathcal{A}_+$  jest to, że

$$X_+ = \text{hull}(I) \sqcup \text{hull}(J),$$

gdzie  $\Delta_{-1} \subset \text{hull}(I)$  oraz  $\text{hull}(I) \cup \text{hull}(J) = X$ , por. Stwierdzenie 1.4, Przykład 1.31.

## 1.4.2 Opis częściowego układu dynamicznego $(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$ dualnego do $(\mathcal{B}, \delta)$ i jego związek z granicą odwrotną

Jesteśmy gotowi, aby przystąpić do dowodu głównego rezultatu niniejszego rozdziału i jednego z najważniejszych twierdzeń całej rozprawy (Twierdzenie 1.28). Jako jego pierwsze zastosowaniem otrzymamy Twierdzenie 1.34.

Niech  $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ . Traktując  $\widetilde{x}$  jako liniowo-multiplikatywny funkcjonal na  $\mathcal{B}$  zdefiniujmy ciąg funkcjonałów na  $\mathcal{A}$  danych wzorem

$$x_n(a) := \widetilde{x}(\delta_*^n(a)), \quad a \in \mathcal{A}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odwzorowanie  $\delta_*$  jest na  $\mathcal{A}$  liniowo-multiplikatywne, por. Twierdzenie 1.22. Zatem funkcjonały  $x_n : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  również są liniowo-multiplikatywne, a stąd

$$x_n \in X \quad \text{albo} \quad x_n \equiv 0.$$

Z definicji (1.13) algebry  $\mathcal{B}$  wynika, iż ciąg  $(x_0, x_1, \dots)$  wyznacza  $\widetilde{x}$  jednoznacznie. Otrzymujemy zatem iniektywne odwzorowanie

$$\Psi(\widetilde{x}) = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \tag{1.17}$$

przekształcające przestrzeń  $\widetilde{X}$  w produkt kartezjański  $\prod_{n \in \mathbb{N}} (X \cup \{0\})$  przeliczalnej ilości kopii przestrzeni  $X \cup \{0\}$ .

**Twierdzenie 1.28 (Opis układu  $(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$  dualnego do układu  $(\mathcal{B}, \delta)$ ).** *Przestrzeń ideałów maksymalnych algebry  $\mathcal{B}$  danej wzorem (1.13) można za pomocą odwzorowania (1.17) utożsamić z następującą przestrzenią topologiczną*

$$\widetilde{X} = \bigcup_{N=0}^{\infty} X_N \cup X_{\infty}$$

gdzie

$$X_N = \{(x_0, x_1, \dots, x_N, 0, \dots) : x_n \in \Delta_1, \alpha(x_n) = x_{n-1}, n = 1, \dots, N, x_N \in Y\},$$

$$X_\infty = \{(x_0, x_1, \dots) : x_n \in \Delta_1, \alpha(x_n) = x_{n-1}, n \geq 1\},$$

wyposażoną w topologię odziedziczoną z  $\prod_{n \in \mathbb{N}}(X \cup \{0\})$ , gdzie  $\{0\}$  jest zbiorem domknięto-otwartym, a  $Y$  jest zbiorem domkniętym (będącym otoczką (1.16) ideału (1.15)). Ponadto częściowe homeomorfizmy dualne do częściowych automorfizmów  $\delta, \delta_* : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  zdefiniowane są odpowiednio na domknięto-otwartych zbiorach

$$\tilde{\Delta}_1 = \{(x_0, x_1, \dots) \in \tilde{X} : x_0 \in \Delta_1\}, \quad \tilde{\Delta}_{-1} = \{(x_0, x_1, \dots) \in \tilde{X} : x_1 \neq 0\}$$

i dane są wzorami

$$\tilde{\alpha}(x_0, x_1, \dots) = (\alpha(x_0), x_0, x_1, \dots), \quad \tilde{\alpha}^{-1}(x_0, x_1, \dots) = (x_1, \dots). \quad (1.18)$$

**Dowód.** Aby zbadać zgodność topologii przestrzeni  $\tilde{X}$  z opisaną wyżej topologią produktową przypomnijmy, iż zbiory postaci

$$O(\tilde{x}; b, \varepsilon) = \{\tilde{y} \in \tilde{X} : |\widehat{b}(\tilde{x}) - \widehat{b}(\tilde{y})| < \varepsilon\}, \quad b \in \mathcal{B}, \varepsilon > 0,$$

stanowią podbazę otoczeń punktu  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ . Przy czym stąd, iż algebra  $\mathcal{B}$  jest generowana liniowo przez elementy postaci  $\delta_*^n(a)$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , wynika, że zbiory postaci

$$O(\tilde{x}; a, n, \varepsilon) = \{\tilde{y} \in \tilde{X} : |\widehat{\delta_*^n(a)}(\tilde{x}) - \widehat{\delta_*^n(a)}(\tilde{y})| < \varepsilon\}, \quad a \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0,$$

również tworzą podbazę otoczeń  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ . Zatem biorąc pod uwagę równość

$$O(\tilde{x}; a, n, \varepsilon) = \{\tilde{y} \in \tilde{X} : |x_n(a) - y_n(a)| < \varepsilon\}$$

gdzie  $\Psi(\tilde{x}) = (x_0, x_1, \dots)$ ,  $\Psi(\tilde{y}) = (y_0, y_1, \dots)$  widzimy, iż podbaza punktu  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  przechodzi na podbazę punktu  $\Psi(\tilde{x})$  w  $\prod_{n \in \mathbb{N}}(X \cup \{0\})$ . Oznacza to, iż  $\Psi$  jest topologicznym zanurzeniem  $\tilde{X}$  w przestrzeń produktową  $\prod_{n \in \mathbb{N}}(X \cup \{0\})$ .

Ustalmy teraz  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  i odpowiadający mu ciąg  $\Psi(\tilde{x}) = (x_0, x_1, \dots)$ . Zauważmy, że dla  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi równoważność

$$x_n \neq 0 \iff \tilde{x}(\delta_*^n(1)) = 1. \quad (1.19)$$

Aby wykazać zależność  $\alpha(x_n) = x_{n-1}$  ustalmy  $n > 0$  i załóżmy, że  $x_n \neq 0$ . Wtedy,  $\tilde{x}(\delta_*^n(1)) = 1$  i korzystając ze Stwierdzenia 1.21 iv), dla  $a \in \mathcal{A}$ , mamy

$$\hat{a}(x_{n-1}) = x_{n-1}(a) = \tilde{x}(\delta_*^{n-1}(a)) = \tilde{x}(\delta_*^n(1))\tilde{x}(\delta_*^{n-1}(a))$$

$$\tilde{x}(\delta_*^n(1)\delta_*^{n-1}(a)) = \tilde{x}(\delta_*^n(\delta(a))) = x_n(\delta(a)) = \hat{a}(\alpha(x_n)).$$

W szczególności wynika stąd, że jeśli  $x_n \neq 0$ , to  $x_k \in \Delta_1$  i  $\alpha(x_k) = x_{k-1}$  dla  $k = 1, \dots, n$ . Zatem, albo  $(x_0, x_1, \dots) \in X_\infty$ , albo któryś z wyrazów ciągu  $(x_0, x_1, \dots)$  jest funkcjonalem zerowym i wtedy istnieje najmniejsza liczba  $N$  taka że  $x_{N+1} = 0$ . W tym przypadku, dla każdego  $n > N$  mamy  $x_n = 0$ , gdyż ciąg rzutów  $\{\delta_*^n(1)\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest zstępujący, Stwierdzenie 1.21 iii), a stąd

$$\tilde{x}(\delta_*^n(1)) = \tilde{x}(\delta_*^{N+1}(1)\delta_*^n(1)) = \tilde{x}(\delta_*^{N+1}(1))\tilde{x}(\delta_*^n(1)) = 0.$$

Czyli ciąg  $\Psi(\tilde{x})$  jest postaci  $(x_0, x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots)$ ,  $x_N \neq 0$ , i potrzebujemy jeszcze pokazać, że  $x_N \in Y = \text{hull}(\{a \in \mathcal{A} : \delta_*(1)a = a\})$ . Załóżmy nie wprost, że  $x_N \notin Y$ . Wtedy istnieje  $a \in \mathcal{A}$  takie, że  $x_N(a) \neq 0$  oraz  $\delta_*(1)a = a$ . Stąd

$$0 \neq x_N(a) = x_N(\delta_*(1)a) = \tilde{x}(\delta_*^N(\delta_*(1)a)) = \tilde{x}(\delta_*^{N+1}(1))\tilde{x}(\delta_*^N(a)) = x_{N+1}(1)x_N(a),$$

co prowadzi do sprzeczności z założeniem, że  $x_{N+1} \equiv 0$ .

Reasumując pokazaliśmy, że  $\Psi$  jest zanurzeniem widma  $\mathcal{B}$  w opisaną w tezie przestrzeń  $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_N \cup X_\infty$ . Teraz wykażemy, że zanurzenie to jest *de facto* homeomorfizmem. W tym celu ustalmy  $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in X_\infty$  i zdefiniujmy na gęstej podalgebrze algebry  $\mathcal{B}$  funkcjonał  $\tilde{x}$  wzorem

$$\tilde{x}\left(\sum_{k=0}^n \delta_*^k(a_k)\right) := x_n\left(\sum_{k=0}^n \delta^{n-k}(a_k)\right), \quad a_i \in \mathcal{A}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.20)$$

Określenie (1.20) jest poprawne, gdyż jeśli  $\sum_{k=0}^n \delta_*^k(a_k) = 0$ , to

$$0 = \delta_*^n(1) \sum_{k=0}^n \delta_*^k(a_k) = \delta_*^n\left(\sum_{k=0}^n \delta^{n-k}(a_k)\right),$$

a stąd  $\delta^n(1) \sum_{k=0}^n \delta^{n-k}(a_k) = 0$  i korzystając z faktu, że  $x_n(\delta^n(1)) = 1$  mamy

$$x_n\left(\sum_{k=0}^n \delta^{n-k}(a_k)\right) = x_n(\delta^n(1) \sum_{k=0}^n \delta^{n-k}(a_k)) = 0.$$

Liniowość  $\tilde{x}$  jest oczywista. By pokazać, że  $\tilde{x}$  jest multiplikatywny wystarczy rozpatrzyć elementy postaci  $\delta_*^n(a)$ ,  $\delta_*^k(b)$ ,  $a, b \in \mathcal{A}$ ,  $k \leq n$ . Mamy wtedy

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\delta_*^n(a)\delta_*^k(b)) &= \tilde{x}(\delta_*^n(a\delta^{n-k}(b))) = x_n(a\delta^{n-k}(b)) = x_n(a)x_n(\delta^{n-k}(b)) \\ &= \tilde{x}(\delta_*^n(a))\alpha^{n-k}(x_n)((b)) = \tilde{x}(\delta_*^n(a))x_k(b) = \tilde{x}(\delta_*^n(a))\tilde{x}(\delta_*^k(b)). \end{aligned}$$

Multiplikatywność  $\tilde{x}$  implikuje, iż na każdej podalgebrze  $\overline{\text{span}}\left\{\bigcup_{k=0}^n S^k \mathcal{A} T^k\right\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , funkcjonał  $\tilde{x}$  jest ograniczony przez jedynekę. W konsekwencji,  $\tilde{x}$  jednoznacznie przedłuża się do elementu widma  $\mathcal{B}$ , a wprost z (1.20) mamy  $\Psi(\tilde{x}) = (x_0, x_1, \dots)$ .

Niech teraz  $(x_0, x_1, \dots, x_N, 0, \dots) \in X_N$ . W tym przypadku odpowiedni funkcjonał liniowy  $\tilde{x}$  zadamy wzorem

$$\tilde{x}\left(\sum_{k=0}^n \delta_*^k(a_k)\right) := x_N\left(\sum_{k=0}^N \delta^{N-k}(a_k)\right), \quad a_i \in \mathcal{A}, \quad n \geq N. \quad (1.21)$$

Aby wykazać poprawność definicji (1.21) założmy, że  $\sum_{k=0}^n \delta_*^k(a_k) = 0$ . Jeśli  $n \leq N$ , to analogicznie jak powyżej pokazujemy, że  $x_N(\sum_{k=0}^N \delta^{N-k}(a_k)) = 0$ . Załóżmy więc, że  $n > N$ . Wtedy korzystając z równości

$$\sum_{k=0}^N \delta_*^k(a_k) = - \sum_{k=N+1}^n \delta_*^k(a_k)$$



widzimy, iż  $\sum_{k=0}^N \delta_*^k(a_k) = \delta_*^{N+1}(1) \sum_{k=0}^N \delta_*^k(a_k)$ . Stąd

$$\delta_*^N \left( \sum_{k=0}^N \delta^{N-k}(a_k) \right) = \sum_{k=0}^N \delta_*^k(a_k) = \delta_*^N(\delta_*(1)) \sum_{k=0}^N \delta_*^k(a_k) = \delta_*^N(\delta_*(1) \sum_{k=0}^N \delta^{N-k}(a_k)).$$

Zatem  $\sum_{k=0}^N \delta^{N-k}(a_k) \delta^N(1) = \delta_*(1) \sum_{k=0}^N \delta^{N-k}(a_k) \delta^N(1)$ , czyli

$$\sum_{k=0}^N \delta^{N-k}(a_k) \delta^N(1) \in J = \{a \in \mathcal{A} : \delta_*(1)a = a\}.$$

Stąd, że  $x_N \in Y \cap \Delta_N$  ( $Y = \text{hull}(J)$ ) mamy, więc

$$x_N \left( \sum_{k=0}^N \delta^{N-k}(a_k) \right) = x_N \left( \sum_{k=0}^N \delta^{N-k}(a_k) \right) x_N(\delta^N(1)) = x_N \left( \sum_{k=0}^N \delta^{N-k}(a_k) \delta^N(1) \right) = 0.$$

Zatem funkcjonal  $\tilde{x}$  jest poprawnie określony na gęstej podalgebrze  $\mathcal{B}$ . Analogicznie jak w poprzednim przypadku sprawdza się multiplikatywność  $\tilde{x}$  i podobny argument pokazuje, że  $\tilde{x}$  przedłuża się do liniowo-multiplikatywnego funkcjonału na  $\mathcal{B}$ . Ponadto  $\Psi(\tilde{x}) = (x_0, x_1, \dots, x_N, 0, \dots)$ , co kończy dowód. ■

**Uwaga 1.29.** Z postaci (1.20), (1.21) elementów widma  $\widetilde{X}$  algebry  $\mathcal{B}$  wynika, że transformata Gelfanda operatora  $b \in \mathcal{B}$  postaci

$$b = a_0 + \delta_*(a_1) + \dots + \delta_*^n(a_n), \quad a_i \in \mathcal{A}, \quad i = 1, \dots, n,$$

na elemencie  $\tilde{x} = (x_0, x_1, \dots) \in \widetilde{X}$  przyjmuje wartość

$$\widehat{b}(\tilde{x}) = \widehat{a}_0(x_0) + \widehat{a}_1(x_1) + \widehat{a}_2(x_2) + \dots + \widehat{a}_n(x_n),$$

gdzie kładziemy  $\widehat{a}_i(x_i) = 0$ , jeśli  $x_i = 0$ .

Przy dodatkowych, względnie naturalnych założeniach teza Twierdzenia 1.28 upraszcza się następująco.

**Twierdzenie 1.30.** *Niech  $\mathcal{A}$  będzie algebrą regularną. Wtedy, przy oznaczeniach Twierdzenia 1.28, mamy  $X \setminus \Delta_{-1} \subset Y$  oraz*

- i) *Jeśli  $ST \in \mathcal{A}$ , to  $Y = X \setminus \Delta_{-1}$ , czyli  $(x_0, x_1, \dots, x_N, 0, \dots)$  jest elementem  $X_N$  wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$x_N \notin \Delta_{-1} \quad (\text{tzn. } x_N \text{ nie posiada przeciwobrazu})$$

oraz  $x_n \in \Delta_n$ ,  $\alpha(x_n) = x_{n-1}$  dla  $n = 1, \dots, N$ .

- ii) *Jeśli  $T$  jest ko-izometrią, to  $\Delta_1 = X$ , zbiory  $X_N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , są homeomorficzne ze zbiorem  $Y$ ,*

$$X_\infty = \varprojlim(X, \alpha),$$

oraz  $\tilde{\alpha} : X_\infty \rightarrow X_\infty$  jest homeomorfizmem indukowanym przez  $\alpha : X \rightarrow X$ .

iii) Jeśli  $T$  jest izometrią, to  $\alpha : \Delta_1 \rightarrow X$  jest suriekcją i

$$\widetilde{X} = X_\infty.$$

iv) Jeśli  $T$  jest odwracalną izometrią, to  $\alpha : X \rightarrow X$  jest suriekcją,

$$\widetilde{X} = \varprojlim(X, \alpha)$$

oraz  $\tilde{\alpha} : \widetilde{X} \rightarrow \widetilde{X}$  jest homeomorfizmem indukowanym przez  $\alpha : X \rightarrow X$ .

**Dowód.** W świetle Twierdzenia 1.28, podpunkt i) wynika ze Stwierdzenia 1.26, natomiast podpunkty ii), iii) i iv) otrzymujemy ze Stwierdzenia 1.16. ■

W przypadku algebr nieregularnych sytuacja jest bardziej subtelna i mimo, iż  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  widmo  $\widetilde{X}$  algebry  $\mathcal{B}$  może mniejsze niż widmo  $X$  algebry  $\mathcal{A}$ .

**Przykład 1.31.** Typowym przykładem nieregularnej algebry Banacha jest algebra  $\mathcal{A}_{hol}$  funkcji holomorficzych we wnętrzu koła  $D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  i ciągłych na jego brzegu  $S^1$ . Algebrę  $\mathcal{A}_{hol}$  będziemy interpretować jako podalgebrę algebry  $C(S^1)$ , por [Żel, 3.9]. Rozważmy algebrę

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{hol} \oplus C(S^1)$$

składającą się z operatorów mnożenia na przestrzeni Banacha

$$E = C(S^1) \oplus C(S^1) = C(S^1 \sqcup S^1).$$

Operatory:  $T(f_1 \oplus f_2) = 0 \oplus f_1$ ,  $S(f_1 \oplus f_2) = f_2 \oplus 0$ , gdzie  $f_1 \oplus f_2 \in E$ , są wzajemnie częściowymi izomeriami na  $E$  oraz  $T$  generuje na  $\mathcal{A}$  endomorfizm  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  dany wzorem

$$\delta(a_1 \oplus a_2) = 0 \oplus a_1, \quad a_1 \oplus a_2 \in \mathcal{A}_{hol} \oplus C(S^1).$$

Przestrzeń ideałów maksymalnych algebry  $\mathcal{A}$  w naturalny sposób utożsamia się z sumą prostą  $X = D^2 \sqcup S^1$ . Obrazem częściowego odwzorowania  $\alpha$  dualnego do endomorfizmu  $\delta$  jest podzbiór  $\Delta_{-1} = S^1 \subset D^2$  (pierwszego składnika prostego  $X$ ). Natomiast jądrem endomorfizmu  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  jest ideał  $I = 0 \oplus C(S^1)$  i jego otoczka  $\text{hull}(I) = D^2$  jest istotnie większa niż zbiór  $\Delta_{-1}$ , por. Stwierdzenie 1.4. Ponadto  $ST \in \mathcal{A}$  i otoczka  $Y = \text{hull}(J)$  ideału

$$J = \{a \in \mathcal{A} : STa = a\} = \mathcal{A}_{hol} \oplus 0$$

pokrywa się z drugim składnikiem prostym  $X$ :  $Y = S^1$ . W szczególności  $Y$  nie zawiera zbioru  $X \setminus \Delta_{-1} = \text{Int}(D^2) \sqcup S^1$ , por. Stwierdzenie 1.26. Widmo  $\widetilde{X}$  algebry

$$\mathcal{B} = \overline{\text{span}} \left\{ \bigcup_{n=0}^{\infty} S^n \mathcal{A} T^n \right\} = \text{span} \{SAT, \mathcal{A}\} = C(S^1) \oplus C(S^1)$$

jest sumą prostą dwu okręgów. Mamy zatem  $\widetilde{X} = S^1 \sqcup S^1 \subset X = D^2 \sqcup S^1$ .

W przeciwieństwie do powyższego przykładu, jeśli  $Y$  zawiera  $X \setminus \Delta_{-1}$  (czyli zawsze, gdy  $\mathcal{A}$  jest algebrą regularną), to układ  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  jest rozszerzeniem układu  $(X, \alpha)$ . Rzeczywiście, odwzorowanie  $\Phi : \tilde{X} \rightarrow X$  dane wzorem

$$\Phi(x_0, x_1, \dots) = x_0 \quad (1.22)$$

jest ciągłą suriekcją, taką że  $\Phi(\tilde{\Delta}_{\pm 1}) = \Delta_{\pm 1}$  oraz diagram

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Delta}_1 & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{\Delta}_{-1} \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \Delta_1 & \xrightarrow{\alpha} & \Delta_{-1} \end{array} \quad (1.23)$$

jest przemienny, czyli  $\Phi$  ustala ciągle pólspzężenie częściowego homeomorfizmu  $\tilde{\alpha}$  z odwzorowaniem  $\alpha$ . Ten fakt jest usprawiedliwieniem wprowadzonej poniżej definicji naturalnego rozszerzenia częściowego układu dynamicznego. Mianowicie, opis układu  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  zawarty w tezie Twierdzenia 1.28 jest czysto topologiczny i abstrahując od jego teorio-operatorowego podłoża określa częściowy układ dynamiczny dla każdego układu  $(X, \alpha)$  oraz domkniętego zbioru  $Y$ , por. [Kwa05', Tw. 2.2]. Oczywiście układ  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  zależy od wyboru zbioru  $Y$ , czego nie będziemy podkreślać w notacji, aby jej nie komplikować.

**Definicja 1.32.** Niech  $(X, \alpha)$  będzie częściowym układem dynamicznym i niech  $Y$  będzie domkniętym podzbiorem  $X$  zawierającym  $X \setminus \Delta_{-1}$ . Częściowy układ dynamiczny  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  opisany w tezie Twierdzenia 1.28 będziemy nazywać *naturalnym rozszerzeniem* układu  $(X, \alpha)$  związanym ze zbiorem  $Y$ .

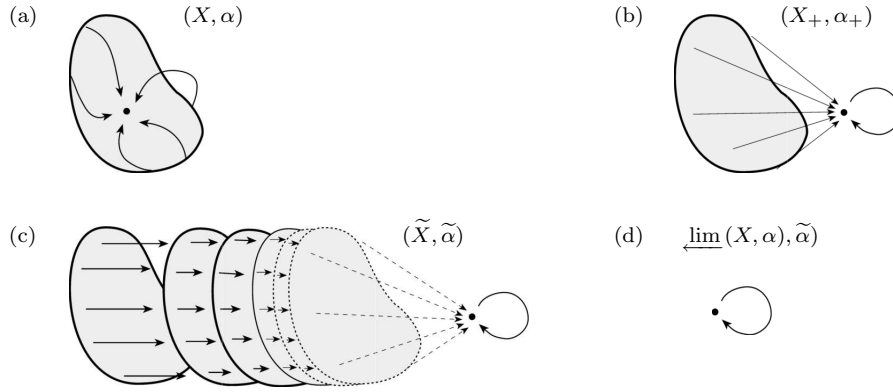
W przypadku, gdy odwzorowanie  $\alpha : X \rightarrow X$  jest zdefiniowane na całym  $X$  naturalne rozszerzenie  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  związane ze zbiorem  $Y \supset X \setminus \Delta_{-1} = X \setminus \alpha(X)$  ma następującą strukturę:

- układ  $(X_\infty, \tilde{\alpha})$  pokrywa się z odwracalnym układem dynamicznym, indukowanym na granicy odwrotnej  $(\varprojlim (X, \alpha), \tilde{\alpha})$ , por. Definicja 1.24,
- dla każdego  $N \in \mathbb{N}$  zbiór  $X_N$  jest homeomorficzny z  $Y$  i  $\tilde{\alpha}$  przeprowadza homeomorficznie zbiór  $X_N$  na  $X_{N+1}$ :

$$X_0 \xrightarrow{\tilde{\alpha}} X_1 \xrightarrow{\tilde{\alpha}} X_2 \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \dots (X_\infty, \tilde{\alpha}) = (\varprojlim (X, \alpha), \tilde{\alpha}).$$

Układ  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  ma tę przewagę nad układem  $(\varprojlim (X, \alpha), \tilde{\alpha})$ , że  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  jest zawsze rozszerzeniem wyjściowego układu  $(X, \alpha)$ , natomiast  $(\varprojlim (X, \alpha), \tilde{\alpha})$  może się degenerować.

**Przykład 1.33.** Niech  $\alpha : X \rightarrow X$  będzie odwzorowaniem stałym takim, że jedyną wartością  $\alpha$  jest niezolowany punkt  $p \in X$ , Rysunek 1.2 (a). Wtedy jedynym domkniętym zbiorem zawierającym  $X \setminus \Delta_{-1} = X \setminus \{p\}$  jest  $Y = X$ . Dla tego zbioru układ  $(X_+, \alpha_+)$  opisany w Stwierdzeniu 1.26 otrzymujemy z układu  $(X, \alpha)$  poprzez dołączenie do  $X$  kopii punktu  $\{p\}$ , Rysunek 1.2 (b). Przestrzeń  $\tilde{X}$  jest przeliczalną rodziną kopii przestrzeni  $X$  uzwarconą jednym punktem  $X_\infty = \{p\}$ , Rysunek 1.2 (c). Natomiast układ  $(\varprojlim (X, \alpha), \tilde{\alpha})$  degeneruje się do jednego punktu, Rysunek 1.2 (d).



Rysunek 1.2: Układy związane z odwzorowaniem stałym.

Na koniec zauważmy, że otrzymany przez nas opis układu rozszerzonego umożliwia szybką konstrukcję operatorów generujących dowolnie wybrany częściowy układ dynamiczny. Rzeczywiście, jeśli  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  jest naturalnym rozszerzeniem układu  $(X, \alpha)$  związanym z domkniętym zbiorem  $Y$  zawierającym  $X \setminus \Delta_{-1}$ , to operatory

$$(Tf)(\tilde{x}) := \begin{cases} f(\tilde{\alpha}(\tilde{x})), & \tilde{x} \in \tilde{\Delta}_1 \\ 0, & \tilde{x} \notin \tilde{\Delta}_1 \end{cases}, \quad (Sf)(\tilde{x}) := \begin{cases} f(\tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{x})), & \tilde{x} \in \tilde{\Delta}_{-1} \\ 0, & \tilde{x} \notin \tilde{\Delta}_{-1} \end{cases}$$

działające w przestrzeni  $E = C(\tilde{X})$ , lub  $E = \ell^p(\tilde{X})$ ,  $p \in [1, \infty]$  (przestrzeń  $\ell^p(\tilde{X})$  można traktować jako przestrzeń  $L^p_\mu(\tilde{X})$ , gdzie  $\mu$  jest miarą liczącą) są wzajemnie sprzężonymi częściowymi izometriami. Rozważmy algebrę  $\mathcal{A} \subset L(E)$  składającą się z operatorów mnożenia przez funkcje z  $C(\tilde{X})$ , zależne tylko od zerowej współrzędnej:

$$\mathcal{A} = \{a \in C(\tilde{X}) : a(\tilde{x}) = a(x_0), \text{ gdzie } \tilde{x} = (x_0, \dots) \in \tilde{X}\}.$$

Jasne jest, że  $\mathcal{A} \cong C(X)$  i operator  $T$  generuje na  $X$  częściowe odwzorowanie  $\alpha$ . Rzut  $ST$  jest operatorem mnożenia przez funkcję charakterystyczną  $\chi_{\tilde{\Delta}_{-1}}$  zbioru  $\tilde{\Delta}_{-1}$ , skąd wynika, że

$$J = \{a \in \mathcal{A} : STa = a\} \cong C_Y(X),$$

gdzie  $C_Y(X)$  jest zbiorem funkcji z  $C(X)$  znikających na zbiorze  $Y$ . Zatem  $\text{hull}(J) = Y$  i reasumując otrzymujemy

**Twierdzenie 1.34.** *Niech  $(X, \alpha)$  będzie dowolnym częściowym układem i niech  $Y$  będzie domkniętym zbiorem zawierającym  $X \setminus \Delta_{-1}$ . Wtedy istnieje przestrzeń Banacha  $E$ , algebra Banacha  $\mathcal{A} \subset L(E)$ , której widmo jest homeomorficzne z  $X$ , oraz wzajemnie sprzężone częściowe izometrie  $S, T \in L(E)$  takie, że*

i)  $T$  generuje na widmie algebry  $\mathcal{A}$  częściowe odwzorowanie  $\alpha$ ,

ii) otoczką ideału  $J = \{a \in \mathcal{A} : STa = a\} = STA \cap \mathcal{A}$  jest zbiór  $Y$ .

## Uwagi do rozdziału 1

Zaprezentowane w podrozdziale 1.1 własności endomorfizmów algebr Banacha i odwzorowań do nich dualnych są znane. Zamieszczenie ich tutaj wraz z dowodami spowodowane jest brakiem odpowiedniej referencji oraz krótkością przytoczonych wywodów.

Pojęcie częściowej izometrii w przestrzeni Banacha [Mbe04] nie jest jeszcze terminem standardowym, lecz w kontekście naszych badań nad endomorfizmami algebr Banacha operatory te są obiektami istotnymi i naturalnymi, por. uwagi pod Definicją 0.4.

Warunki (1.9), (1.10) w *zastosowaniu do  $C^*$ -algebr* pojawiają się w wielu artykułach. Liczne referencje można znaleźć w [ABL05<sup>”</sup>] i [KL07<sup>”</sup>], a pierwszą pracą, która systematycznie omawiała takie obiekty jest [LO04]; Stwierdzenia 1.15, 1.21 oraz Twierdzenie 1.22 obecnej rozprawy są modyfikacjami odpowiednich rezultatów z [LO04].

Szczególny przypadek Twierdzenia 1.28 dla operatorów w przestrzeni Hilberta został wykazany w [KL03], [KL08], patrz też [Kwa05’], przy założeniu, że  $\mathcal{A}$  jest  $C^*$ -algebrą i rzut  $ST = T^*T$  należy do algebry  $\mathcal{A}$ , por. Twierdzenie 1.30i). Zatem w przeciwieństwie do otrzymanego tutaj rezultatu w [KL03], [KL08] nie występują: zależność przestrzeni  $\widetilde{X}$  od zbioru  $Y$ , por. ustęp 1.4.1, Twierdzenie 1.30 i); oraz ewentualna redukcja przestrzeni  $\widetilde{X}$ , por. Przykład 1.31. Co więcej dowód zamieszczony w [KL03], [KL08] w zasadniczy sposób opiera się na fakcie się, że *każdy funkcjonalniowo multiplikatywny na  $C^*$ -algebrze  $\mathcal{A}$  przedłuża się do takiegoż funkcjonału na dowolnej  $C^*$ -algebrze  $\mathcal{B}$  zawierającej  $\mathcal{A}$  – rzecz która *nie ma miejsca* w przypadku *algebr Banacha*. Doprowadziło to do istotnie nowego kroku w dowodzie Twierdzenia 1.28 – odpowiednie funkcjonały zostały zdefiniowane wprost, formułami (1.20), (1.21).*

Opis układu  $(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$ , otrzymany w [KL03], po raz pierwszy posłużył jako definicja naturalnego rozszerzenia nieodwracalnego układu dynamicznego  $(X, \alpha)$  w [Kwa05’], patrz też [KL08], [Kwa05<sup>”</sup>].



## Rozdział 2

# Zastosowanie metody opracowanej w Rozdziale 1 do rodziny odwzorowań logistycznych

W rozdziale 1 zinterpretowaliśmy spektralny opis częściowego automorfizmu będącego przedłużeniem endomorfizmu algebry Banacha jako naturalne, odwracalne rozszerzenie  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  częściowego układu dynamicznego  $(X, \alpha)$  (Definicja 1.32). W szczególności ważną i interesującą jest postać układu rozszerzonego  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  dla klasycznych nieodwracalnych układów dynamicznych.

W tym rozdziale przedstawimy rodzinę operatorów generującą najbardziej znaną i popularną rodzinę odwzorowań nieodwracalnych, jaką jest rodzina odwzorowań logistycznych  $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda \in (0,1]}$ . Przeanalizujemy otrzymaną w ten sposób rodzinę układów rozszerzonych  $(\tilde{X}_\lambda, \tilde{\alpha}_\lambda)$ ,  $\lambda \in (0, 1]$  i omówimy wpływ na strukturę tychże układów takich dynamicznych zjawisk jak bifurkacje, chaos, czy istnienie orbity okresowej o okresie nie będącej potęgą dwójki. W prezentacji widma powstałych algebr będziemy korzystać z rezultatów rozdziału 1 oraz m. in. z wyników dotyczących granic odwrotnych odwzorowań logistycznych zebranych w [BI96]. Własności spektralne operatorów rozważanych w tym rozdziale zostaną zbadane w rozdziałach następnych.

### 2.1 Operatory $T_\lambda$ generujące rodzinę odwzorowań logistycznych: $\lambda \in (0, 1]$

*Odwzorowaniem logistycznym* (z parametrem  $\lambda$ ) będziemy nazywać odwzorowanie kwadratowe  $\alpha_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  postaci

$$\alpha_\lambda(x) = 4\lambda x(1-x), \quad \text{gdzie } 0 < \lambda \leq 1,$$

Rysunek 2.1 (a). Literatura traktująca o zjawiskach dotyczących rodziny  $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda \in (0,1]}$  jest obszerna. Omawia je praktycznie każdy podręcznik wprowadzający w teorię chaosu [CE80], [Dev89], [BS03], [LM94], przy czym w miejsce odwzorowań  $\alpha_\lambda$  rozpatruje się czasem odwzorowania z przeskalowanym parametrem  $\alpha_\mu(x) = \mu x(1-x)$ ,  $0 < \mu \leq 4$ , [Dev89], lub też odwzorowania kwadratowe  $\beta_\mu : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  postaci

$\beta_\mu(x) = 1 - \mu x^2$ ,  $0 < \mu \leq 2$ , [CE80].

Aby zdefiniować operatory generujące odwzorowania  $\alpha_\lambda$  rozważmy przestrzeń Banacha  $E = L^p(\mathbb{R})$ ,  $p \in [1, \infty]$ , oraz algebrę Banacha  $\mathcal{A}$  operatorów mnożenia przez funkcje  $a(t)$  okresowe o okresie 1, ciągłe na odcinku  $[0, 1)$  i posiadające granicę lewostronną w 1, tzn.:

$$a(t+1) = a(t), \quad a|_{[0,1)} \in C([0,1)) \quad \text{oraz istnieje} \quad \lim_{t \rightarrow 1^-} a(t). \quad (2.1)$$

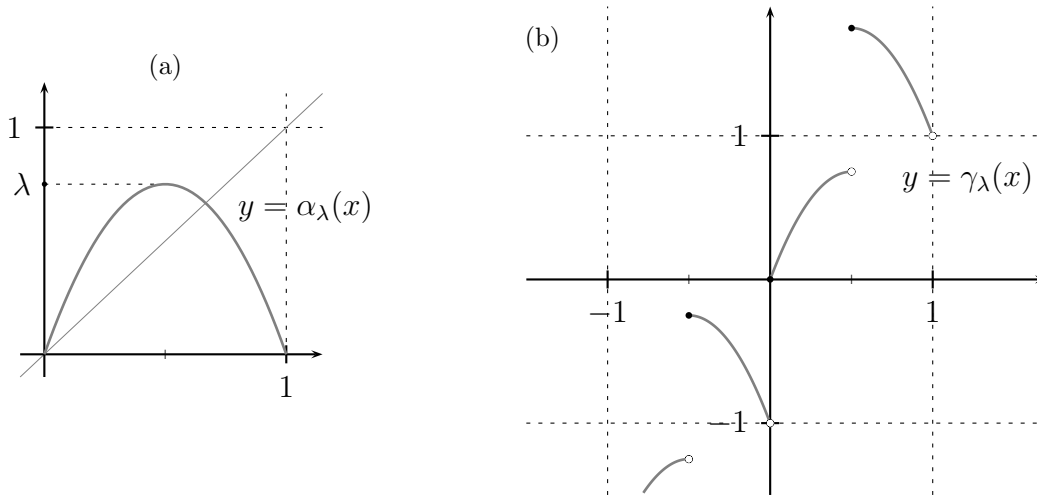
Algebra  $\mathcal{A}$  jest w naturalny sposób izomorficzna z algebrą  $C([0, 1])$  i przestrzeń ideałów maksymalnych  $X$  algebry  $\mathcal{A}$  możemy utożsamić z odcinkiem  $[0, 1]$ :

$$X = [0, 1], \quad \mathcal{A} \cong C([0, 1]).$$

Ustalmy  $\lambda \in (0, 1]$  i zdefiniujmy kawałkami ciągłą funkcję  $\gamma_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wzorem

$$\gamma_\lambda(x) = \begin{cases} 4\lambda t(1-t) + 2k, & t \in [k, k + \frac{1}{2}) \\ 4\lambda t(1-t) + 2k + 1, & t \in [k + \frac{1}{2}, k + 1) \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

Wykres  $\gamma_\lambda$  powstaje z wykresu  $\alpha_\lambda$  poprzez „wycięcie połówek” paraboli  $y = \alpha_\lambda(x)$ , a następnie taką ich „propagację” na  $\mathbb{R}^2$ , by w efekcie otrzymać wykres różnowartościowego odwzorowania na  $\mathbb{R}$ , patrz Rysunek 2.1 (b); mówiąc dokładniej odwzorowanie  $\gamma_\lambda$  jest iniekcją, gdy  $\lambda < 1$ , a dla  $\lambda = 1$ ,  $\gamma_\lambda$  jest różnowartościowe poza zbiorem miary zero (poza zbiorem  $\mathbb{Z}$ ).



Rysunek 2.1: Wykres odwzorowania logistycznego  $\alpha_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  (a); Wykres różnowartościowego odwzorowania  $\gamma_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  związanego z  $\alpha_\lambda$  (b).

Znormalizowany operator  $T_\lambda : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$  złożenia z funkcją  $\gamma_\lambda$ , tj. operator

$$(T_\lambda f)(t) = |\gamma'_\lambda(t)|^{\frac{1}{p}} f(\gamma_\lambda(t)) = 2|\lambda(1-2t)|^{\frac{1}{p}} f(\gamma_\lambda(t)), \quad f \in L^p(\mathbb{R}), \quad (2.3)$$



jest częściową izometrią. Częściową izometrią sprzężoną z  $T_\lambda$  jest izometria  $S_\lambda$  dana wzorem

$$(S_\lambda f)(t) = \begin{cases} |(\gamma_\lambda^{-1})'(t)|^{\frac{1}{p}} f(\gamma_\lambda^{-1}(t)), & t \in \gamma_\lambda(\mathbb{R}) \\ 0, & t \notin \gamma_\lambda(\mathbb{R}) \end{cases}, \quad f \in L^p(\mathbb{R}).$$

W szczególności, jeśli  $\lambda = 1$ , to  $T_\lambda$  jest odwracalną izometrią i  $T_\lambda^{-1} = S_\lambda$ .

**Stwierdzenie 2.1.** *Dla każdego  $\lambda \in (0, 1]$  operator  $T_\lambda$  generuje na widmie algebry  $\mathcal{A}$  odwzorowanie logistyczne  $\alpha_\lambda$  (por. Definicja 1.19). Ponadto otoczką ideału*

$$J = \{a \in \mathcal{A} : S_\lambda T_\lambda a = a\}$$

jest najmniejszą z możliwych (por. Stwierdzenie 1.26), czyli

$$Y = \text{hull}(J) = \overline{X \setminus \alpha_\lambda(X)} = \begin{cases} [\lambda, 1] & \text{dla } \lambda < 1, \\ \emptyset & \text{dla } \lambda = 1. \end{cases}$$

**Dowód.** Rzut  $S_\lambda T_\lambda$  jest operatorem mnożenia przez funkcję charakterystyczną  $\chi_{\gamma_\lambda(\mathbb{R})}$  zbioru  $\gamma_\lambda(\mathbb{R})$ . W szczególności  $S_\lambda T_\lambda \in \mathcal{A}'$  i otoczką ideału  $J$  jest zbiór  $Y = \text{hull}(\{a \in \mathcal{A} : \chi_{\gamma_\lambda(\mathbb{R})} a = a\}) = [\lambda, 1]$  dla  $\lambda < 1$  oraz  $Y = \emptyset$  dla  $\lambda = 1$ . Obkładając operator  $a \in \mathcal{A}$  (który mnoży przez funkcję okresową  $a(t)$ ) operatorami  $T_\lambda, S_\lambda$  otrzymujemy operator mnożenia przez funkcję

$$(T_\lambda a S_\lambda)(t) = a(\gamma_\lambda(t)) = a(\{\gamma_\lambda(t)\}) = a(\alpha_\lambda(\{t\})), \quad (2.4)$$

gdzie  $\{t\} \in [0, 1)$  oznacza część ułamkową liczby  $t \in \mathbb{R}$ . Zatem przy utożsamieniu widma  $\mathcal{A}$  z odcinkiem  $[0, 1]$  operator  $T_\lambda$  generuje na  $[0, 1]$  odwzorowanie  $\alpha_\lambda$ . ■

Teza powyższego stwierdzenia oznacza, że restrykcja pierwszego z następujących odwzorowań

$$\delta_\lambda(a) := T_\lambda a S_\lambda, \quad \delta_{*,\lambda}(a) := S_\lambda a T_\lambda, \quad a \in L(L^p(\mathbb{R})),$$

zadaje endomorfizm  $\delta_\lambda : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , do którego odwzorowaniem dualnym jest odwzorowanie logistyczne  $\alpha_\lambda$ ; przy utożsamieniu  $\mathcal{A} = C([0, 1])$  mamy  $\delta_\lambda(a) = a \circ \alpha_\lambda$ ,  $a \in \mathcal{A}$ . Z drugiej strony dla  $a \in \mathcal{A}$  operator  $\delta_{*,\lambda}(a)$  jest operatorem mnożenia przez funkcję

$$\delta_{*,\lambda}(a)(t) = (S_\lambda a T_\lambda)(t) = \begin{cases} a(\gamma_\lambda^{-1}(t)), & x \in \gamma_\lambda(\mathbb{R}) \\ 0, & x \notin \gamma_\lambda(\mathbb{R}) \end{cases},$$

która jest okresowa, ale na ogół nie o okresie jeden, lecz dwa. Zatem odwzorowanie  $\delta_{*,\lambda}$  nie zachowuje algebry  $\mathcal{A}$  i algebra Banacha

$$\mathcal{B}_\lambda := \overline{\text{span}}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_\lambda^n \mathcal{A} T_\lambda^n\right) \quad (2.5)$$

jest istotnie większa od  $\mathcal{A}$ . Restrykcje  $\delta_\lambda : \mathcal{B}_\lambda \rightarrow \mathcal{B}_\lambda$ ,  $\delta_{*,\lambda} : \mathcal{B}_\lambda \rightarrow \mathcal{B}_\lambda$  są częściowymi automorfizmami (będącymi wzajemnie uogólnionymi odwrotnościami), por. Twierdzenie 1.22.

**Twierdzenie 2.2.** Niech  $\lambda \in (0, 1]$  i niech  $(\widetilde{X}_\lambda, \widetilde{\alpha}_\lambda)$  będzie naturalnym rozszerzeniem układu  $([0, 1], \alpha_\lambda)$  związanym ze zbiorem  $Y = [\lambda, 1]$ , gdy  $\lambda < 1$  oraz  $Y = \emptyset$ , gdy  $\lambda = 1$ , (Definicja 1.32). Algebra  $\mathcal{B}_\lambda$  jest izomorficzna z algebrą funkcji  $C(\widetilde{X}_\lambda)$  i przy utożsamieniu  $\mathcal{B}_\lambda = C(\widetilde{X}_\lambda)$ , częściowy automorfizm  $\delta_\lambda : \mathcal{B}_\lambda \rightarrow \mathcal{B}_\lambda$  jest operatorem złożenia z częściowym homeomorfizmem  $\widetilde{\alpha}_\lambda$ :

$$\delta_\lambda(a) = a \circ \widetilde{\alpha}_\lambda, \quad a \in \mathcal{B}_\lambda = C(\widetilde{X}_\lambda).$$

W szczególności operator  $T_\lambda$  generuje na  $\widetilde{X}_\lambda$  częściowy homeomorfizm  $\widetilde{\alpha}_\lambda$ .

**Dowód.** Ze Stwierdzenia 2.1, Twierdzenia 1.28 i Definicji 1.32 wynika, że przestrzeń ideałów maksymalnych algebry  $\mathcal{B}_\lambda$  możemy utożsamić z  $\widetilde{X}_\lambda$ , a  $\widetilde{\alpha}_\lambda$  z odwzorowaniem dualnym do endomorfizmu  $\delta_\lambda : \mathcal{B}_\lambda \rightarrow \mathcal{B}_\lambda$ . Ponadto algebra  $\mathcal{B}_\lambda$  składa się z operatorów mnożenia przez funkcje z  $L^\infty(\mathbb{R})$  i jest zamknięta ze względu na operację sprzężenia tychże funkcji, czyli jest przemienną  $C^*$ -algebrą, a stąd  $\mathcal{B}_\lambda \cong C(\widetilde{X}_\lambda)$ . ■

## 2.2 Rozszerzenia odwzorowań logistycznych generowane przez operatory $T_\lambda$

W poprzednim podrozdziale zdefiniowaliśmy rodzinę  $\{T_\lambda\}_{\lambda \in (0,1]}$  operatorów generujących na widmie  $X = [0, 1]$  algebry  $\mathcal{A}$  rodzinę odwzorowań logistycznych  $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda \in (0,1]}$ . W efekcie, stosując algebraiczno-operatorową metodę przedstawioną w Rozdziale 1 otrzymaliśmy, por. Twierdzenie 2.2, rodzinę układów dynamicznych

$$\{(\widetilde{X}_\lambda, \widetilde{\alpha}_\lambda)\}_{\lambda \in (0,1]},$$

składających się z naturalnych rozszerzeń elementów rodziny  $\{([0, 1], \alpha_\lambda)\}_{\lambda \in (0,1]}$ : operator  $T_\lambda$  generuje na przestrzeni ideałów maksymalnych algebry  $\mathcal{B}_\lambda$ , danej wzorem (2.5), układ dynamiczny  $(\widetilde{X}_\lambda, \widetilde{\alpha}_\lambda)$ , a odwzorowanie  $\Phi : \widetilde{X}_\lambda \rightarrow [0, 1]$  dualne do zanurzenia  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_\lambda$  jest suriekcją taką, że diagram

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}_\lambda & \xrightarrow{\widetilde{\alpha}_\lambda} & \widetilde{X}_\lambda \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ [0, 1] & \xrightarrow{\alpha_\lambda} & [0, 1] \end{array}$$

jest przemienny (por. uwagi na stronie 21). Podkreślmy, że wraz ze zmianą parametru  $\lambda \in (0, 1]$  zmianie podlega nie tylko dynamika częściowego homeomorfizmu  $\widetilde{\alpha}_\lambda$ , lecz również topologia przestrzeni  $\widetilde{X}_\lambda$ . Szczegółowe omówienie takich zmian jest celem niniejszego rozdziału. Zanim to jednak nastąpi opiszemy ogólną strukturą układów  $(\widetilde{X}_\lambda, \widetilde{\alpha}_\lambda)$ ,  $\lambda \in (0, 1]$ . Ważną rolę pełnić tu będą pojęcia teorii continuumów, zacznijmy więc od ustalenie odpowiedniego nazewnictwa, por. np. [Nad92].

**Definicja 2.3.** Przez *continuum* będziemy rozumieć spójną oraz zwartą przestrzeń metryczną. Continuum będziemy nazywać

- i) *rozkładalnym*, jeśli można je przedstawić jako sumę dwu właściwych podcontinuuów,
- ii) *nierozkładalnym*, jeśli ma co najmniej dwa punkty i nie jest continuum rozkładalnym,
- iii) *wężowym* (ang. *snake-like* lub *arc-like continuum*), jeśli jest ono homeomorficzne z granicą odwrotną ciągu odwrotnego składającego się z ciągłych odwzorowań odcinka, por. [Nad92, 12.19].

Na mocy Twierdzenia 1.30 ii), dla każdego  $\lambda \in (0, 1]$ , widmo  $\widetilde{X}_\lambda$  algebry  $\mathcal{B}_\lambda$  zawiera continuum wężowe  $X_\infty = \varprojlim ([0, 1], \alpha_\lambda)$ . Często będą to continua nierozkładalne, co wynika z rezultatu M. Barge'a i J. Martin'a [BM85], który mówi, że dla każdego ciągłego odwzorowania odcinka  $\alpha$  posiadającego orbitę okresową o okresie nie będącym potęgą dwójki, granica odwrotna  $\varprojlim ([0, 1], \alpha)$  zawiera continuum nierozkładalne (por. Twierdzenie 2.7). Jednym z najbardziej znanych continuum nierozkładalnych, a zarazem nietrywialnym przykładem continuum wężowego, jest continuum Browera-Janiszewskiego-Knastera, Rysunek 2.2.

### 2.2.1 Struktura układu rozszerzonego $(\widetilde{X}_\lambda, \tilde{\alpha}_\lambda)$ dla $\lambda < 1$

Niech  $\lambda < 1$ . W świetle Twierdzenia 2.2 oraz uwagi pod Definicją 1.32 przestrzeń  $\widetilde{X}_\lambda$  składa się z podzbioru  $X_\infty$  będącego granicą odwrotną  $\varprojlim (X, \alpha_\lambda)$  oraz przeliczalnej rodziny zbiorów postaci

$$X_N = \{(x_0, \dots, x_N, 0, 0, \dots) \in \widetilde{X}_\lambda : x_N \in [\lambda, 1]\}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Zbiory  $X_N$  są *tukami*, tzn. są homeomorficzne z odcinkiem domkniętym:  $X_N \cong [\lambda, 1]$ .

**Twierdzenie 2.4.** *Dla  $\lambda < 1$  przestrzeń ideałów maksymalnych  $\widetilde{X}_\lambda$  algebry  $\mathcal{B}_\lambda$  składa się z continuum wężowego  $X_\infty = \varprojlim (X, \alpha_\lambda)$  oraz przeliczalnej ilości tuków  $X_N$  takich, że*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_N = X_\infty,$$

gdzie zbieżność zachodzi w metryce Hausdorffa. W szczególności

$$\widetilde{X}_\lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_N \cup X_\infty = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_N}.$$

Odwzorowanie  $\tilde{\alpha}_\lambda$  generowane przez  $T_\lambda$  na  $\widetilde{X}_\lambda$  przekształca tuk  $X_N$  homeomorficznie na tuk  $X_{N+1}$ , natomiast na  $X_\infty = \varprojlim (X, \alpha_\lambda)$ ,  $\tilde{\alpha}_\lambda$  jest homeomorfizmem indukowanym przez  $\alpha_\lambda$  (Definicja 1.24).

**Dowód.** Potrzebujemy wykazać równość  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_N = X_\infty$ , która (patrz np. [Nad92, Tw. 4.11]) jest równoważna następującym dwu inkluzjom

$$\limsup X_N = \{\tilde{x} \in \widetilde{X}_\lambda : \forall_{\tilde{x} \in U \text{ otwarty}} \forall_{M \in \mathbb{N}} \exists_{N > M} U \cap X_N \neq \emptyset\} \subset X_\infty,$$

$$X_\infty \subset \liminf X_N = \{\tilde{x} \in \widetilde{X}_\lambda : \forall_{\tilde{x} \in U \text{ otwarty}} \exists_{M \in \mathbb{N}} \forall_{N > M} U \cap X_N \neq \emptyset\}.$$

Jeśli założymy, że  $\tilde{x} \in \limsup X_N$  oraz  $\tilde{x} \in X_{N_0}$ , dla pewnego  $N_0 \in \mathbb{N}$ , to biorąc  $U = X_{N_0}$  oraz  $M = N_0$  otrzymujemy sprzeczność, co dowodzi pierwszej inkluzji.

By wykazać drugą inkluzję weźmy punkt  $\tilde{x} = (x_0, \dots, x_{N_0}, \dots) \in X_\infty$  i jego otoczenie  $U$ . Bez straty ogólności możemy założyć, iż

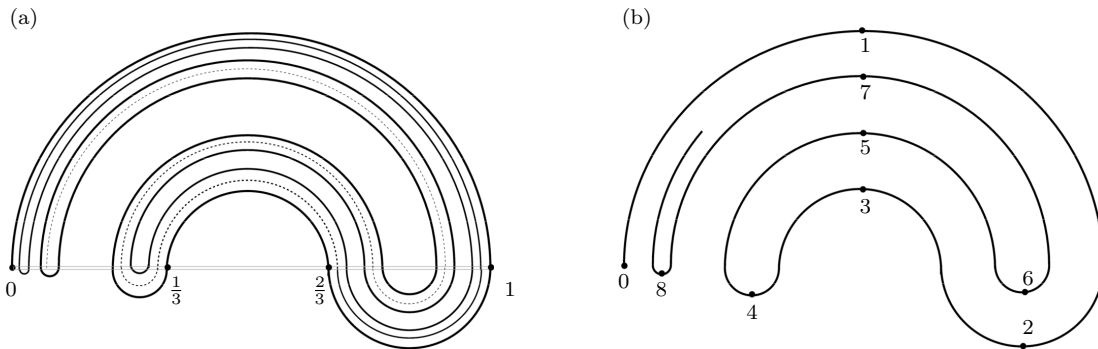
$$U = \{\tilde{y} = (y_0, \dots, y_{N_0}, \dots) \in \widetilde{X}_\lambda : y_{N_0} \in (x_{N_0} - \varepsilon, x_{N_0} + \varepsilon)\}.$$

Zauważmy, że istnieje takie  $n_0 \in \mathbb{N}$ , że  $\alpha_\lambda^{n_0}([\lambda, 1]) = [0, \lambda]$ . Istotnie, jeśli  $\lambda \leq \frac{1}{2}$ , to  $\alpha_\lambda([\lambda, 1]) = [0, \lambda]$ , jeśli natomiast  $\lambda > \frac{1}{2}$ , to dla pewnego  $n_0$ ,  $\alpha_\lambda^{n_0}(\lambda) > \frac{1}{2}$ , skąd  $\alpha_\lambda^{n_0}([\lambda, 1]) = [0, \lambda]$ . Kładąc  $M = N_0 + n_0$ , dla każdego  $N > M$  mamy  $U \cap X_N \neq \emptyset$ , a stąd  $\tilde{x} \in \liminf X_N$ . ■

Z powyższego twierdzenia wynika, że istotną część układu  $(\widetilde{X}_\lambda, \tilde{\alpha}_\lambda)$  stanowi podukład  $(X_\infty, \tilde{\alpha}_\lambda)$  składający się z granicy odwrotnej oraz homeomorfizmu indukowanego przez  $\alpha_\lambda$ . Posiadając opis podukładu  $(X_\infty, \tilde{\alpha}_\lambda)$  można łatwo otrzymać opis całego układu  $(\widetilde{X}_\lambda, \tilde{\alpha}_\lambda)$ : wystarczy dołączyć do  $X_\infty$  ciąg łuków  $\{X_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  zbiegających do przestrzeni  $X_\infty$  i przedłużyć  $\tilde{\alpha}_\lambda$  tak, by przesuwano homeomorficznie łuki  $X_N$  w kierunku  $X_\infty$ . Ta uwaga jest niezmiernie ważna, ponieważ wiele faktów dotyczących układów typu  $(\varprojlim (X, \alpha_\lambda), \tilde{\alpha}_\lambda)$ ,  $\lambda \in (0, 1]$ , jest znanych [BI96] i możemy je wykorzystać do opisu układów  $(\widetilde{X}_\lambda, \tilde{\alpha}_\lambda)$ ,  $\lambda \in (0, 1]$ .

### 2.2.2 Układ rozszerzony dla $\lambda = 1$ . B-J-K continuum.

Dla  $\lambda = 1$  odwzorowanie  $\alpha_1$  jest suriekcją i przestrzeń  $\widetilde{X}_1$  jest po prostu granicą odwrotną  $\varprojlim ([0, 1], \alpha_1)$  pełnego odwzorowania logistycznego  $\alpha_1(x) = 4x(1-x)$ , por. Twierdzenie 1.30 iv). Przestrzeń  $\widetilde{X}_1 = \varprojlim (X, \alpha_1)$  jest jednym z najbardziej znanych continuum nierozkładalnych zwanym *continuum Brouwera-Janiszewskiego-Knastera*, w skrócie *B-J-K continuum* [BI96], [Nad92], [Kur97], [Wat82]. Homeomorficzny obraz  $\widetilde{X}_1$  na płaszczyźnie można otrzymać [Kur97] łącząc punkty zbioru Cantora półokręgami w sposób pokazany na Rysunku 2.2 (a).



Rysunek 2.2: Continuum Brouwera-Janiszewskiego-Knastera.

Odwzorowanie logistyczne  $\alpha_1(x) = 4x(1-x)$  jest topologicznie sprzężone z odwzorowaniem trójkątnym  $\alpha_T(x) = 1 - |2x - 1|$  i B-J-K continuum częściej bywa rozpatrywane jako granica odwrotna  $\varprojlim (X, \alpha_T)$  [Nad92], [Wat82]. Wtedy istnieje wygodna

parametryzacja kompozanty punktu  $(0, 0, 0, \dots)$  B-J-K continuum, poprzez nieujemne liczby rzeczywiste [Wat82], patrz Rysunek 2.2 (b), przy której homeomorfizmy indukowane  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_T$  przyjmują postać

$$\tilde{\alpha}_1(t) = \begin{cases} 2k + \alpha(\{t\}), & t \in [k, k + \frac{1}{2}) \\ 2(k+1) - \alpha(\{t\}), & t \in [k + \frac{1}{2}, k+1) \end{cases}, \quad \tilde{\alpha}_T(t) = 2t, \quad (2.6)$$

gdzie  $\{t\}$  oznacza część ułamkową liczby  $t$ . Oczywiście układy  $(\tilde{X}_1, \tilde{\alpha}_1)$  oraz  $(\tilde{X}_1, \tilde{\alpha}_T)$  są topologicznie sprzężone. Rozważania te dają pewne wyobrażenie o dynamice układu  $(\tilde{X}_\lambda, \tilde{\alpha}_\lambda)$  dla  $\lambda = 1$ .

**Twierdzenie 2.5.** *Algebrę  $\mathcal{B}_1$  możemy utożsamić z algebrą funkcji  $C(\tilde{X}_1)$  na B-J-K continuum  $\tilde{X}_1$ , Rysunek 2.2 (a). Wtedy automorfizm  $\delta_1 : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_1$  staje się operatorem złożenia z homeomorfizmem  $\tilde{\alpha}_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_1$ , który przy parametryzacji przedstawionej na Rysunku 2.2 (b) przyjmuje postać (2.6).*

*Ponadto nierozkładalność  $\tilde{X}_1$  oznacza, iż algebra  $\mathcal{B}_1$  ma następującą własność: jeżeli  $I_1, I_2$  są idealami w  $\mathcal{B}_1$  takimi, że  $\mathcal{B}_1/I_i$  nie zawiera nietrywialnych idempotentów dla  $i = 1, 2$ , to*

$$I_1 \cap I_2 = \{0\} \implies I_1 = \{0\} \text{ lub } I_2 = \{0\}.$$

**Dowód.** Pierwsza część tezy wynika z Twierdzenia 2.2. By wykazać drugą część tezy zauważmy, że ideały  $I_1, I_2$  w  $C(\tilde{X}_1)$  są we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z domkniętymi podzbiórmi  $\tilde{X}_1$ , gdzie dla  $i = 1, 2$  mamy

$$I_i = C_{Y_i}(\tilde{X}_1), \quad Y_i = \text{hull}(I_i) \subset \tilde{X}_1.$$

Algebra  $C(\tilde{X}_1)/I_i \cong C(Y_i)$  nie posiada nietrywialnych idempotentów wtedy i tylko wtedy, gdy  $Y_i$  jest zbiorem spójnym, czyli gdy  $Y_i$  jest podcontinuum  $\tilde{X}_1$ . Stąd, że  $I_1 \cap I_2 = C_{Y_1 \cup Y_2}(\tilde{X}_1)$ , warunek  $I_1 \cap I_2 = \{0\}$  jest równoważny równości  $Y_1 \cup Y_2 = \tilde{X}_1$  i tym samym opisana własność algebry  $\mathcal{B}_1$  jest równoważna nierozkładalności continuum  $\tilde{X}_1$ . ■

### 2.2.3 Granica Feigenbauma $\lambda_\infty$

Niech  $\lambda_1 = \frac{3}{4}$ ,  $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{6}}{4} \approx 0.862$ ,  $\lambda_3, \dots$ , będzie ciągiem wartości parametru  $\lambda$  odpowiadających pierwszej kasakadzie bifurkacji podwojenia okresu orbity stabilnej układu  $([0, 1], \alpha_\lambda)$  [CE80], [Dev89]. Jest to ciąg rosnący, a jego granica  $\lambda_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \approx 0.89249$  nazywana jest *granica Feigenbauma*, patrz Rysunek 2.3, [BI96], [CE80], [Dev89]. Wartość  $\lambda_\infty$  dzieli przedział zmienności parametru  $\lambda$  na przedziały  $(0, \lambda_\infty)$  oraz  $(\lambda_\infty, 1]$  odpowiadające odpowiednio dynamice regularnej oraz dynamice chaotycznej układu  $([0, 1], \alpha_\lambda)$ . Przejście do „chaosu” znajduje znakomite odbicie w strukturze algebry  $\mathcal{B}_\lambda$  oraz jej przestrzeni idealów maksymalnych  $\tilde{X}_\lambda$ .

**Twierdzenie 2.6.** *Dla parametru  $\lambda \in (0, 1]$  następujące warunki są równoważne*

i)  $\lambda > \lambda_\infty$ ,

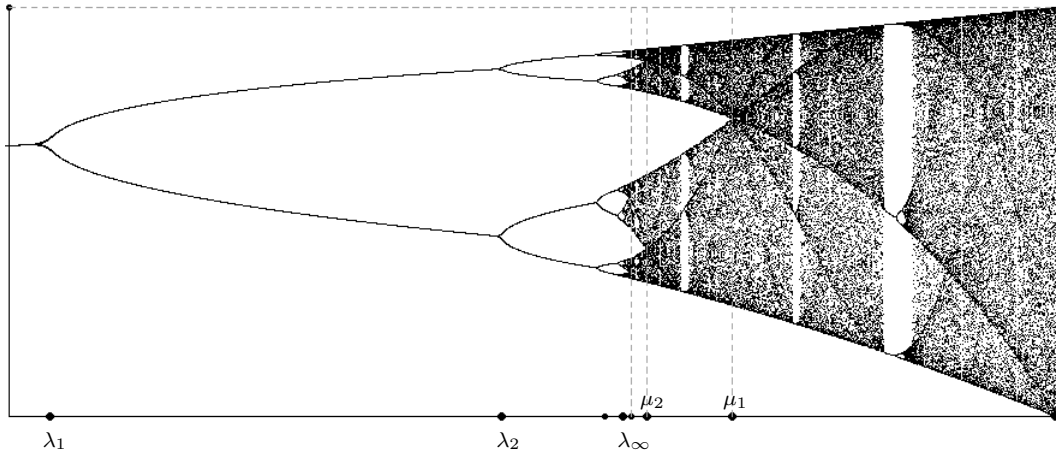
ii) widmo  $\tilde{X}_\lambda$  algebry  $\mathcal{B}_\lambda$  zawiera continuum nierozkładalne,

iii) istnieje ideał właściwy  $J$  w pewnym ideale maksymalnym algebry  $\mathcal{B}_\lambda$  taki, że algebra  $\mathcal{B} := \mathcal{B}_\lambda/J$  nie zawiera nietrywialnych idempotentów i dla każdych dwu ideałów  $I_1, I_2$  w  $\mathcal{B}$  takich, że  $\mathcal{B}/I_1, \mathcal{B}/I_2$  nie zawierają nietrywialnych idempotentów, zachodzi

$$I_1 \cap I_2 = \{0\} \implies I_1 = \{0\} \text{ lub } I_2 = \{0\}.$$

**Dowód.** Równoważność i) i ii) wynika z Twierdzenia 2.4 oraz [BI96, Tw. 3, 4, 7]. W dowodzie Twierdzenia 2.5 pokazaliśmy, że warunek iii) jest równoważny warunkowi ii). W szczególności zdanie „ $J$  jest ideałem właściwym pewnego ideału maksymalnego  $\mathcal{B}_\lambda$ ” jest równoważne zdaniu „zbiór  $Z = \text{hull}(J)$  zawiera co najmniej dwa punkty”.

■



Rysunek 2.3: Diagram bifurkacyjny dla  $\lambda \in [0, 74; 1]$ .

## 2.3 Pierwsza kaskada bifurkacji: $\lambda \in (0, \lambda_\infty]$

Dla  $\lambda \in (0, \lambda_\infty)$ , gdzie  $\lambda_\infty$  jest granicą Feigenbauma, dynamika układu  $([0, 1], \alpha_\lambda)$  jest całkowicie zrozumiała: istnieje  $n \in \mathbb{N}$  takie, że  $\alpha_\lambda$  posiada dokładnie jedną stabilną orbitę okresową o okresie  $2^n$ , po jednej niestabilnej orbicie okresowej o okresie  $2^k$ , dla  $k = 0, \dots, n - 1$ , oraz co najwyżej dwa niestabilne punkty stałe. Zwiększając  $\lambda$  od 0 do  $\lambda_\infty$  liczba  $n$  skokowo wzrasta i każdy taki skok nazywamy *bifurkacją podwojenia okresu* orbity stabilnej odwzorowania  $\alpha_\lambda$ . Przypomnijmy, iż wartości parametru  $\lambda$ , w których zachodzą kolejne bifurkacje tworzą rosnący ciąg  $\lambda_1 = \frac{3}{4}, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ , zbieżny do  $\lambda_\infty \approx 0.89249$ . W szczególności okres orbity stabilnej  $\alpha_\lambda$ , dla  $\lambda \in (0, \lambda_\infty)$ , rośnie zgodnie z porządkiem Szarkowskiego [BS03], [Dev89].

**Twierdzenie 2.7 (Twierdzenie Szarkowskiego).** Relacja „ $\triangleleft$ ” zdefiniowana na zbiorze dodatnich liczb całkowitych warunkiem:

$$n_1 \triangleleft n_2 \iff \begin{array}{l} \text{dla dowolnego ciągłego odwzorowania odcinka } [0, 1] \\ \text{istnienie orbity okresowej o okresie } n_2 \text{ pociąga} \\ \text{istnienie orbity okresowej o okresie } n_1 \end{array}$$

jest relacją porządku liniowego oraz

$$\begin{aligned}
& 1 \triangleleft 2 \triangleleft 4 \triangleleft \dots \triangleleft 2^n \triangleleft \dots \\
& \dots \\
& \triangleleft 2^m(2n+1) \triangleleft \dots \triangleleft 7 \cdot 2^m \triangleleft 5 \cdot 2^m \triangleleft 3 \cdot 2^m \triangleleft \dots \\
& \dots \\
& \triangleleft 2(2n+1) \triangleleft \dots \triangleleft 14 \triangleleft 10 \triangleleft 6 \triangleleft \dots \\
& \triangleleft (2n+1) \triangleleft \dots \triangleleft 7 \triangleleft 5 \triangleleft 3.
\end{aligned}$$

Wyobraźmy sobie teraz, iż zwiększając powoli parametr  $\lambda$  od 0 do  $\lambda_\infty$  obserwujemy przestrzeń ideałów maksymalnych

$$\widetilde{X}_\lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_N \cup X_\infty$$

algebry  $\mathcal{B}_\lambda$  (patrz Twierdzenie 2.4). Załóżmy też, że zachodzące w  $\widetilde{X}_\lambda$  zmiany oglądamy z pozycji przestrzeni  $X = [0, 1]$ , to znaczy patrząc na punkt  $\tilde{x} = (x_0, x_1, \dots) \in \widetilde{X}_\lambda$  potrafimy odczytać  $x_0 \in [0, 1]$ . Taki punkt widzenia pozwoli nam dokładnie zrozumieć jak zmiana parametru  $\lambda$  wpływa na zmianę topologii przestrzeni  $\widetilde{X}_\lambda$ . Innymi słowy będziemy budować obraz  $\widetilde{X}_\lambda$  za pomocą rzutu

$$\Phi(x_0, x_1, \dots) = x_0, \quad (x_0, x_1, \dots) \in X_\lambda$$

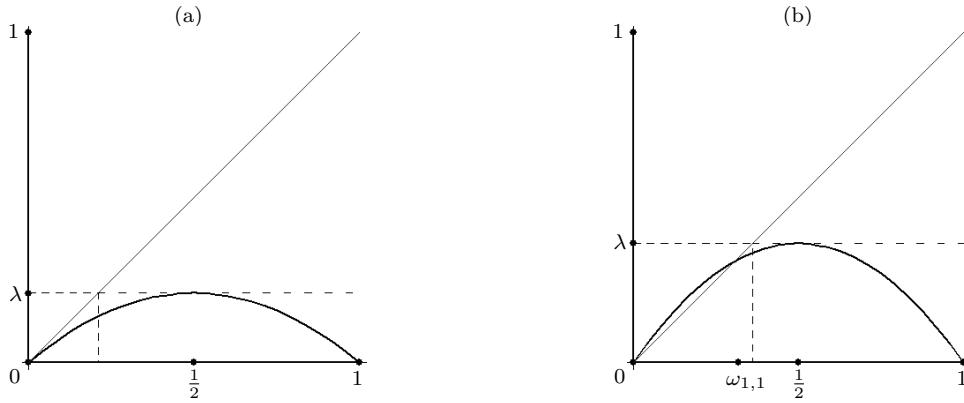
(por. strona 21). Przy czym, jako że odwzorowanie  $\Phi$  nie jest różnowartościowe, może np. kilkakrotnie „nawijać” łuk  $X_N$  na pewien odcinek, aby otrzymać homeomorficzny obraz  $\widetilde{X}_\lambda$  trzeba modyfikować  $\Phi$  poprzez „doklejanie” kopii odpowiednich odcinków. W ten sposób można skonstruować homeomorfizm  $\widetilde{X}_\lambda$  na pewien podzbiór płaszczyzny, por. [Kwa05<sup>7</sup>]. Tutaj ograniczymy się jednak tylko do omówienia rezultatów tej procedury, której ślad pozostawimy na rysunkach przestrzeni  $\widetilde{X}_\lambda$  oznaczając punkty  $\tilde{x} \in \widetilde{X}_\lambda$  przez ich zerowe współrzędne  $\Phi(\tilde{x}) \in X$ . Zasadniczą rolę odgrywać będzie tu orbita  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  punktu krytycznego odwzorowania  $\alpha_\lambda$ :

$$q_n = \alpha_\lambda^n\left(\frac{1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

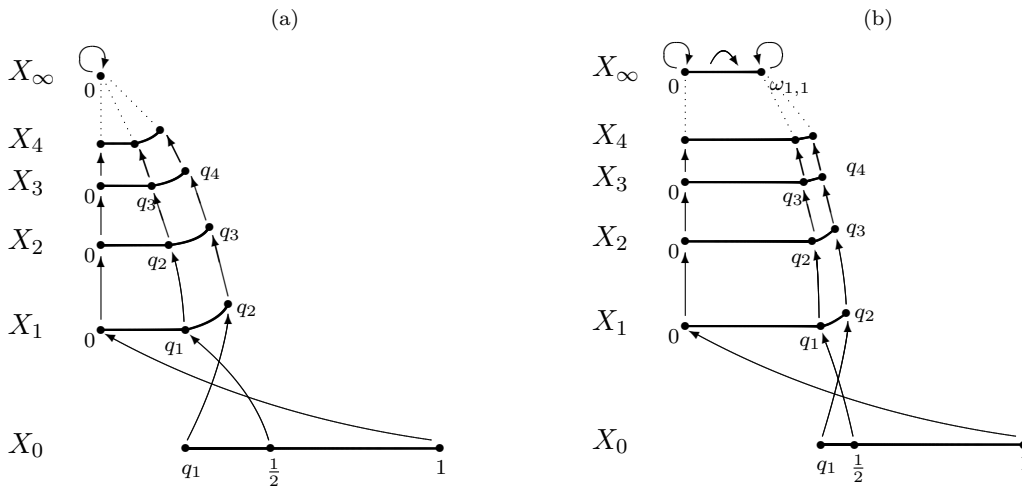
Zacznijmy od parametru  $\lambda$  nieznacznie większego od zera (mniejszego niż  $\frac{1}{4}$ ), patrz Rysunek 2.4 (a). Wtedy jedynym punktem okresowym odwzorowania  $\alpha_\lambda$  jest stabilny punkt stały 0 i wszystkie punkty odcinka  $[0, 1]$  monotonicznie do niego zbiegają, m. in.:

$$q_1 > q_2 > q_3 > \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0.$$

W konsekwencji przestrzeń  $\widetilde{X}_\lambda$  składa się z jednoelementowego zbioru  $X_\infty$ , zawierającego punkt stały, oraz zbiegających doń łuków  $X_N$ , patrz Rysunek 2.5 (a). Wraz ze wzrostem parametru  $\lambda$  długość odcinków  $[0, q_n]$  rośnie, łuki  $X_N$  coraz wolniej zbiegają



Rysunek 2.4: Wykres  $\alpha_\lambda$  dla parametru  $0 < \lambda \leq \frac{1}{4}$  (a);  $\frac{1}{4} < \lambda \leq \frac{1}{2}$  (b).



Rysunek 2.5: Dynamika układu  $(\tilde{X}_\lambda, \tilde{\alpha}_\lambda)$ , gdy  $0 < \lambda \leq \frac{1}{4}$  (a);  $\frac{1}{4} < \lambda \leq \frac{1}{2}$  (b).

do punktu  $X_\infty$ . Aż w końcu, gdy  $\lambda$  przekracza wartość  $\frac{1}{4}$  punkt 0 traci stabilność na rzecz nowopowstałego punktu stałego  $\omega_{1,1} > 0$ :

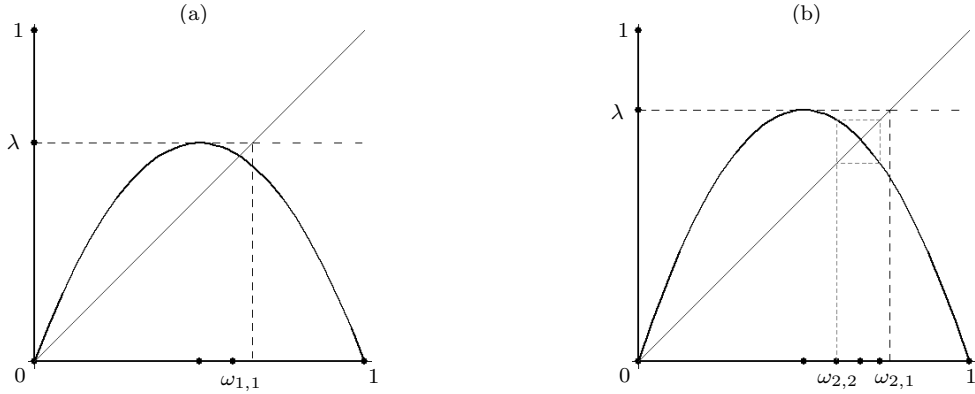
$$q_1 > q_2 > q_3 > \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \omega_{1,1} > 0,$$

patrz Rysunek 2.4 (b). Zbiór  $X_\infty$  staje się łukiem, który odpowiada odcinkowi  $[0, \omega_{1,1}]$  i wraz ze wzrostem  $\lambda$  staje się coraz dłuższy, patrz Rysunek 2.5 (b). Kiedy  $\lambda$  osiąga wartość  $\frac{1}{2}$  wszystkie odcinki  $[0, q_n]$  oraz  $[0, \omega_{1,1}]$  zrównują się do  $[0, \frac{1}{2}]$  i przestrzeń  $\tilde{X}_\lambda$  przyjmuje kształt „drabiny”, w której każdy stopień ma równą długość. Gdy  $\lambda$  przekracza  $\frac{1}{2}$  orbita punktu krytycznego traci monotoniczność:

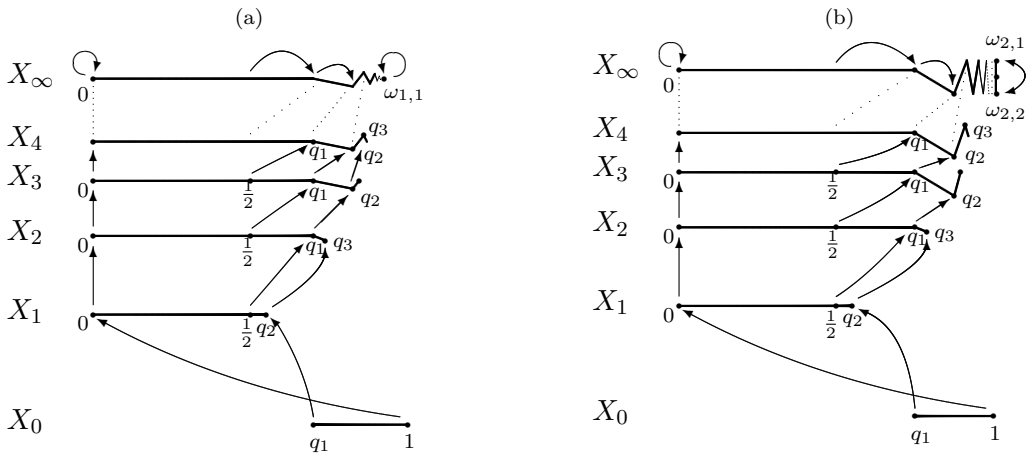
$$q_1 > q_3 > q_5 > \dots > \omega_{1,1} > \dots > q_4 > q_2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \omega_{1,1},$$

patrz Rysunek 2.6 (a). Na jednym z końców łuku  $X_N$  zaczynają się „wić”: dla  $N > 1$  każdy łuk  $X_N$ , ma  $N - 1$  zgięć, natomiast łuk  $X_\infty$  ma ich nieskończenie wiele, patrz Rysunek 2.7 (a).





Rysunek 2.6: Wykres  $\alpha_\lambda$  dla parametru  $\frac{1}{2} < \lambda \leq \frac{3}{4}$  (a);  $\frac{3}{4} < \lambda \leq \frac{1+\sqrt{6}}{4}$  (b).



Rysunek 2.7: Dynamika układu  $(\tilde{X}_\lambda, \tilde{\alpha}_\lambda)$ , gdy  $\frac{1}{2} < \lambda \leq \frac{3}{4}$  (a);  $\frac{3}{4} < \lambda \leq \frac{1+\sqrt{6}}{4}$  (b).

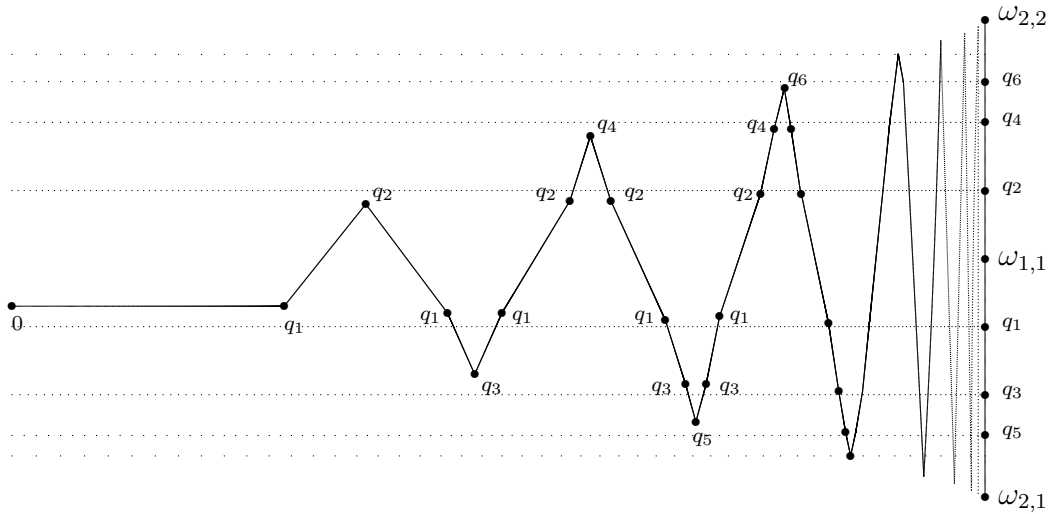
Gdy  $\lambda$  przekracza wartość  $\lambda_1 = \frac{3}{4}$ , Rysunek 2.6 (b), następuje pierwsza bifurkacja. Punkt  $\omega_{1,1}$  traci stabilność „rodząc” orbitę stabilną  $\{\omega_{2,1}, \omega_{2,2}\}$  o okresie 2 i wtedy

$$q_1 > q_3 > \dots > \omega_{2,1} > \omega_{1,1} > \omega_{2,2} > \dots > q_4 > q_2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_{2n+i} = \omega_{2,i},$$

gdzie  $i = 1, 2$ . Oznacza to, patrz Rysunek 2.7 (b), że w zbiorze  $X_\infty$  w miejscu punktu odpowiadającego  $\omega_{1,1}$  pojawia się łuk odpowiadający odcinkowi  $[\omega_{2,1}, \omega_{2,2}]$ , czyli podprzestrzeń  $X_\infty$  staje się klasycznym  $\sin(\frac{1}{x})$ -continuum. Dla wartości leżącej mniej więcej w połowie przedziału  $(\frac{3}{4}, \frac{1+\sqrt{6}}{4}] = (\lambda_1, \lambda_2]$  orbita  $\{\omega_{2,1}, \omega_{2,2}\}$  staje się *superstabilna*, tzn. pokrywa się z orbitą punktu krytycznego. Długości wszystkich odcinków „doklejonych” zrównują się:  $|q_{k+1} - q_k| = \omega_{2,1} - \omega_{2,2}$ ,  $k > 0$ , i przestrzeń  $\tilde{X}_\lambda$  przyjmuje bardziej harmonijną formę. Zwiększając dalej  $\lambda$  orbita punktu krytycznego zbiega do orbity stabilnej w sposób mniej regularny:

$$q_1 > q_5 > \dots > \omega_{2,1} > \dots > q_7 > q_3 \quad q_4 > q_8 > \dots > \omega_{2,2} > \dots > q_6 > q_2.$$

Na poziomie podprzestrzeni  $X_\infty \subset \tilde{X}_\lambda$ , patrz Rysunek 2.8, powoduje to „zaburzenia” wokół punktów okresowych, które przy rzucie  $\Phi$  przechodzą na punkty orbity



Rysunek 2.8: Continuum węzowe  $X_\infty \subset \widetilde{X}_\lambda$  dla parametru  $\lambda$  zbliżającego się z lewej strony do wartości  $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{6}}{4} \approx 0.862$ , w której zachodzi druga bifurkacja.

$\{\omega_{2,1}, \omega_{2,2}\}$ . Continuum  $X_\infty$  zaczyna się „wić” na końcach odpowiadających punktom  $\omega_{2,1}, \omega_{2,2}$ .

Gdy  $\lambda$  przekracza wartość  $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{6}}{4}$  następuje druga bifurkacja. Orbita  $\{\omega_{2,1}, \omega_{2,2}\}$  traci stabilność na rzecz nowopowstałej orbity  $\{\omega_{4,1}, \omega_{4,2}, \omega_{4,3}, \omega_{4,4}\}$  o okresie 4. Na poziomie przestrzeni  $\widetilde{X}_\lambda$ , patrz Rysunek 2.9, objawia się to tym, iż punkty okresowe w zbiorze  $X_\infty$  odpowiadające punktom  $\omega_{2,1}$  i  $\omega_{2,2}$  zmieniają się w łuki odpowiadające odcinkom  $[\omega_{4,1}, \omega_{4,3}]$  i  $[\omega_{4,2}, \omega_{4,4}]$ :

*Przestrzeń ideałów maksymalnych  $\widetilde{X}_\lambda$  algebry  $\mathcal{B}_\lambda$  dla parametru  $\lambda \in (\lambda_2, \lambda_3]$  składa się z continuum węzowego  $X_\infty$  przedstawionego na Rysunku 2.9 oraz ciągu łuków  $\{X_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  zbiegającego do  $X_\infty$  w metryce Hausdorffa.*

Dalej schemat się powtarza. Dla  $\lambda$  leżącego mniej więcej w połowie przedziału  $(\lambda_2, \lambda_3]$  orbita  $\{\omega_{4,1}, \omega_{4,2}, \omega_{4,3}, \omega_{4,4}\}$  staje się superstabilna i wtedy przestrzeń  $X_\infty$  przyjmuje najbardziej regularny kształt. Następnie continuum  $X_\infty$  zaczyna się „wić” wokół punktów odpowiadających orbicie  $\{\omega_{4,1}, \omega_{4,2}, \omega_{4,3}, \omega_{4,4}\}$ , aż w końcu, gdy  $\lambda$  przekroczy  $\lambda_3$ , każdy z nich zostanie zastąpiony przez łuk. I tak dalej, por. Rysunek 2.10.

Aby wyrazić powyższy opis formalnie położmy  $\lambda_{-1} = 0$ ,  $\lambda_0 = \frac{1}{4}$  i przypomnijmy, iż  $\lambda_1 = \frac{3}{4}$ ,  $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ , jest ciągiem wartości parametru  $\lambda$  w których  $\alpha_\lambda$  ulega zjawisku bifurkacji. *Promieniem* będziemy nazywać przestrzeń topologiczną homeomorficzną z odcinkiem  $(0, 1]$ . Natomiast pojęcie końca odcinka uogólniamy definiując *koniec przestrzeni topologicznej*  $X$  jako punkt  $p \in X$ , którego dowolne otoczenie  $U$  otwarte zawiera takie podotoczenie otwarte  $V \subset U$ , że brzeg zbioru  $V$  składa się z jednego punktu, patrz np. [Nad92]. Podprzestrzeń  $X_\infty = \varprojlim (X, \alpha_\lambda) \subset \widetilde{X}_\lambda$  dla  $\lambda < \lambda_\infty$  jest dana następującą formułą indukcyjną.

**Twierdzenie 2.8.** [BI96, Twierdzenie 3] *Jeśli  $\lambda \in (\lambda_n, \lambda_{n+1}]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , to continuum  $\varprojlim (X, \alpha_\lambda)$  jest domknięciem promienia  $R$  takiego, że  $\varprojlim (X, \alpha_\lambda) \setminus R$  jest sumą dwu*

kopii przestrzeni  $\varprojlim (X, \alpha_\lambda)$ , dla parametru  $\lambda' \in (\lambda_{n-1}, \lambda_n]$ , przecinających się w jednym punkcie będącym końcem obu tych kopii.

Teraz jesteśmy gotowi, by przystąpić do pełnego opisu układu  $(\widetilde{X}_\lambda, \widetilde{\alpha}_\lambda)$  dla parametru  $\lambda$  leżącego w przedziale  $(\frac{3}{4}, \lambda_\infty) = \bigcup_{n=1}^\infty (\lambda_n, \lambda_{n+1}]$ . Dla  $\lambda \in (0, \frac{3}{4}]$  układ taki przedstawiony jest na Rysunkach 2.5, 2.7.

**Twierdzenie 2.9.** Niech  $T_\lambda$  operatorem danym wzorem (2.3), a  $\mathcal{B}_\lambda$  algebrą daną wzorem (2.5). Jeśli  $\lambda \in (\lambda_n, \lambda_{n+1}]$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ , to

- i) przestrzeń ideałów maksymalnych  $\widetilde{X}_\lambda$  algebry  $\mathcal{B}_\lambda$  składa się z continuum węzowego  $X_\infty$  oraz ciągu łuków  $\{X_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  zbieżnego w metryce Hausdorffa do  $X_\infty$ , gdzie

$$X_\infty = R \cup (R_{1,1} \cup R_{1,2}) \cup \dots \cup (R_{n-1,1} \cup \dots \cup R_{n-1,2^{n-1}}) \cup (I_1 \cup \dots \cup I_{2^{n-1}})$$

jest sumą  $2^n - 1$  promieni  $R$ ,  $R_{k,i}$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ ,  $i = 1, \dots, 2^k$ , oraz  $2^{n-1}$  łuków  $I_i$ ,  $i = 1, \dots, 2^{n-1}$ . Co więcej domknięcie  $R$  pokrywa się z  $X_\infty$  oraz

$$\overline{R_{k,i}} = \bigcup_{j=0}^{n-k-1} \bigcup_{l=0}^{2^j-1} R_{k+j, i+l \cdot 2^k} \cup \bigcup_{l=0}^{2^{n-k-1}-1} I_{i+l \cdot 2^k}, \quad k = 1, \dots, n-1, i = 1, \dots, 2^k,$$

por. Rysunek 2.10.

- ii) Częściowy homeomorfizm  $\widetilde{\alpha}_\lambda$  generowany przez  $T_\lambda$  na widmie  $\widetilde{X}_\lambda$ , przeprowadza łuk  $X_N$  na łuk  $X_{N+1}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Na continuum  $X_\infty$ ,  $\widetilde{\alpha}_\lambda$  jest homeomorfizmem, który zachowuje  $R$ , permutuje cyklicznie łuki  $I_i$ , oraz dla każdego ustalonego  $k = 1, \dots, n-1$  promienie  $R_{k,i}$ :

$$\widetilde{\alpha}_\lambda(I_1) = I_2, \dots, \widetilde{\alpha}_\lambda(I_{2^n}) = I_1, \quad \widetilde{\alpha}_\lambda(R_{k,1}) = R_{k,2}, \dots, \widetilde{\alpha}_\lambda(R_{k,2^k}) = R_{k,1}.$$

Ponadto, wszystkie promienie  $R$ ,  $R_{k,i}$  oraz łuki  $I_i$  są parami rozłączne za wyjątkiem następujących przecięć

$$R_{k,i} \cap R_{k,2^{k-1}+i} = \{\widetilde{\omega}_{2^{k-1},i}\}, \quad k = 1, \dots, n-1, i = 1, \dots, 2^{k-1},$$

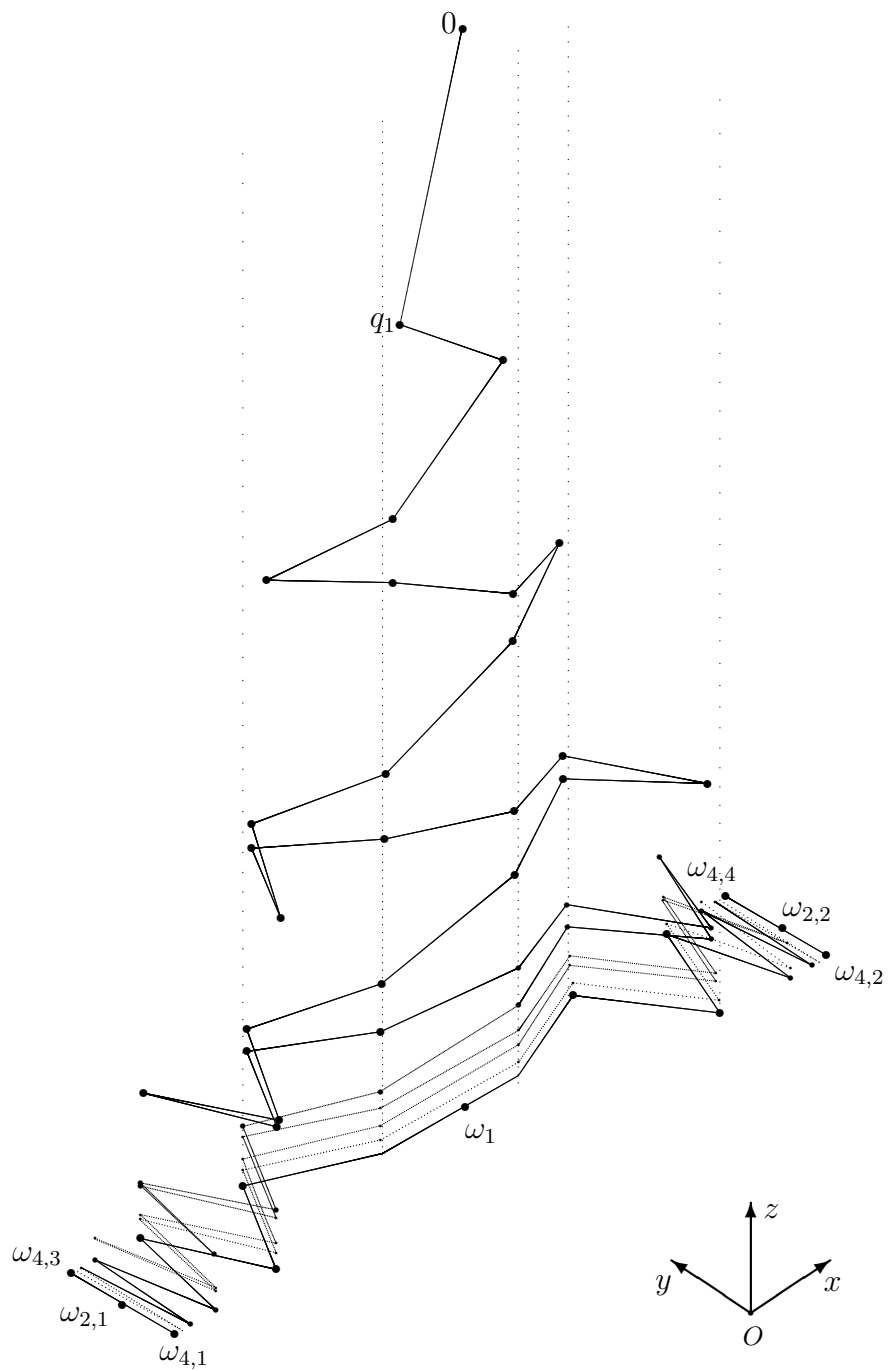
tworzących orbity okresowe  $\{\widetilde{\omega}_{2^k,1}, \dots, \widetilde{\omega}_{2^k,2^k}\}$  o okresie  $2^k$ ,  $k = 1, \dots, n-2$ . Środki łuków  $I_i$  tworzą orbitę okresową  $\{\widetilde{\omega}_{2^{n-1},1}, \dots, \widetilde{\omega}_{2^{n-1},2^{n-1}}\}$  o okresie  $2^{n-1}$ , a końce łuków  $I_i$  tworzą orbitę okresową  $\{\widetilde{\omega}_{2^n,1}, \dots, \widetilde{\omega}_{2^n,2^n}\}$  o okresie  $2^n$ .

**Dowód.** W stosunku do przestrzeni  $\widetilde{X}_\lambda$  wystarczy zastosować Twierdzenia 2.4, 2.8. Natomiast dynamikę  $\widetilde{\alpha}_\lambda$  na  $X_\infty$  można odczytać z dowodu Twierdzenia 3 z [BI96], porównaj też [BI96, Paragraf 6]. ■

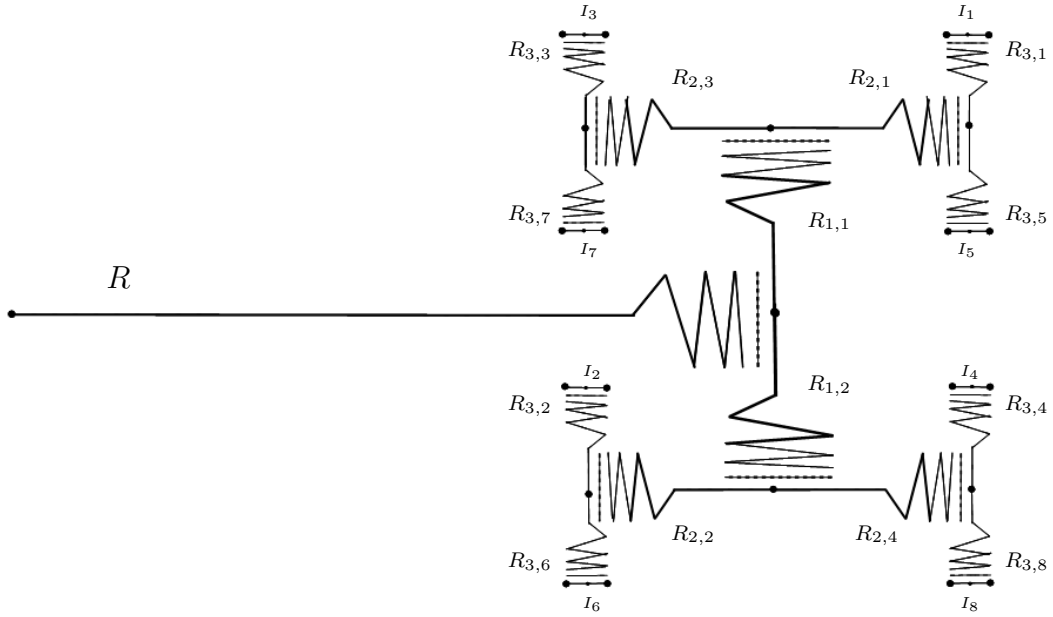
Nieskończony ciąg bifurkacji podwojenia continuum  $X_\infty = \varprojlim (X, \alpha_\lambda)$  opisany w Twierdzeniu 2.8 ma następujące odbicie w strukturze przestrzeni  $\widetilde{X}_\lambda$  dla  $\lambda$  osiąganego granicę Feigenbauma  $\lambda_\infty$ .

**Twierdzenie 2.10.** Dla parametru  $\lambda = \lambda_\infty$  przestrzeń ideałów maksymalnych  $\widetilde{X}_\lambda$  algebry  $\mathcal{B}_\lambda$  ma tę własność, że każde podcontinuum  $\widetilde{X}_\lambda$  nie będące punktem jest rozkładalne. Ponadto  $X_\lambda$  posiada tylko cztery topologicznie różne podcontinua: punkty, łuki, kopie przestrzeni  $X_\infty$  oraz sumy dwóch kopii przestrzeni  $X_\infty$  przecinających się w jednym punkcie będącym końcem obu kopii.

**Dowód.** Zastosować Twierdzenie 2.4 oraz [BI96, Tw. 7]. ■



Rysunek 2.9: Continuum węzowe  $X_\infty \subset \tilde{X}_\lambda$  po drugiej bifurkacji (zanurzone w przestrzeni trójwymiarowej  $Oxyz$ ).



Rysunek 2.10: Podprzestrzeń  $X_\infty \subset \widetilde{X}_\lambda$  po czwartej bifurkacji (przedstawienie schematyczne).

## 2.4 Wartości parametru odpowiadające dynamice chaotycznej: $\lambda \in (\lambda_\infty, 1]$

Dla parametru  $\lambda > \lambda_\infty$  dynamika układu  $([0, 1], \alpha_\lambda)$  jest chaotyczna i dotychczas zdobyta wiedza na temat odwzorowań  $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda > \lambda_\infty}$  nie jest pełna. Mimo to, w obecnym podrozdziale, przedstawimy pewne intrygujące rezultaty dające ogólny ogłęd na strukturę rozważanych układów. Wiemy już na przykład, że dla  $\lambda > \lambda_\infty$ ,  $\widetilde{X}_\lambda$  zawiera continua nierozkładalne (Twierdzenie 2.6), a dla  $\lambda = 1$ ,  $\widetilde{X}_\lambda$  jest B-J-K continuum, patrz Rysunek 2.2. Okazuje się że istnieje ciąg wartości parametru  $\lambda$ , w których jedynymi podcontinuumi nierozkładalnymi  $\widetilde{X}_\lambda$  są B-J-K continua.

### 2.4.1 Kaskada podwojenia B-J-K continuum

Rozważmy ciąg  $\mu_0 = 1, \mu_1, \mu_2, \dots$ , wartości parametru  $\lambda$ , w których diagram bifurkacji „rozdważa się” (jest „sumą” dwu własnych kopii). Jest to malejący ciąg zbieżny do  $\lambda_\infty$ , patrz Rysunek 2.3. Formalnie  $\mu_n$  można zdefiniować jako rozwiązanie następującego równania

$$\alpha_\lambda^{2^n}(\lambda) = (\text{największy punkt stały dla } \alpha_\lambda^{2^{n-1}}),$$

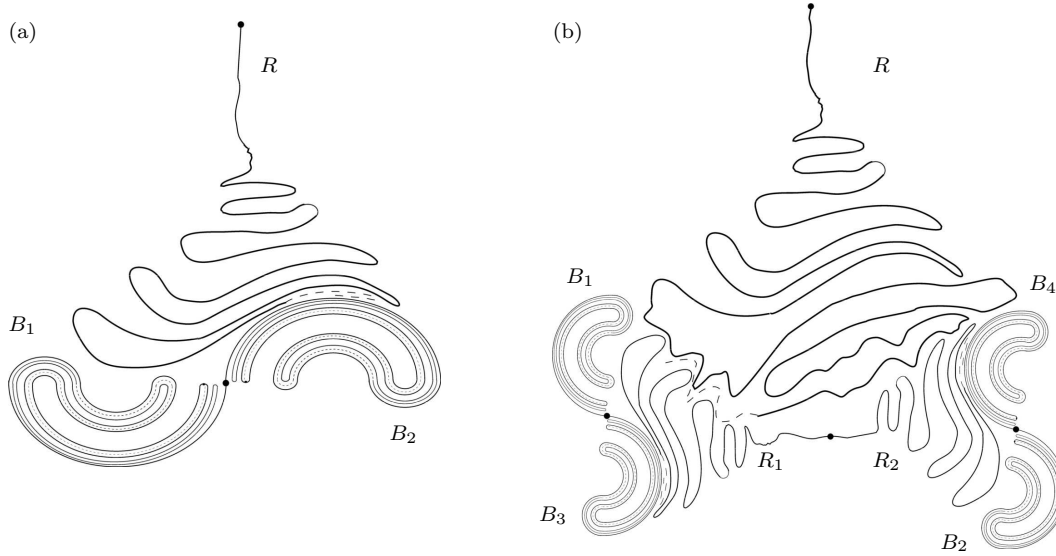
patrz [BI96], [CE80]. Dla ciągu  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  zachodzi indukcyjna procedura zaskakująco podobna do tej zawartej w Twierdzeniu 2.8.

**Twierdzenie 2.11.** [BI96, Twierdzenie 6] *Dla  $n \in \mathbb{N}_+$  continuum  $\varprojlim (X, \alpha_{\mu_n})$  jest domknięciem promienia  $R$  takiego, że  $\varprojlim (X, \alpha_{\mu_n}) \setminus R$  jest sumą dwu kopii przestrzeni  $\varprojlim (X, \alpha_{\mu_{n-1}})$  przecinających się w jednym punkcie będącym ich końcem.*

Powyższe twierdzenie wraz z Twierdzeniami 2.4, 2.5 mówi, że dla  $\lambda = \mu_1$  przestrzeń  $\widetilde{X}_\lambda$  składa się z ciągu łuków  $\{X_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  zbiegających do continuum węzowego

$X_\infty$  będącego sumą dwu kopii  $B_1, B_2$  B-J-K continuum oraz promienia  $R$ , patrz Rysunek 2.11 (a). Częściowy homeomorfizm  $\tilde{\alpha}_\lambda$  przekształca łuk  $X_N$  na  $X_{N+1}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , a dynamika  $\tilde{\alpha}_\lambda$  na  $X_\infty$  przedstawia się następująco: koniec promienia  $R$  jest punktem stałym, pozostałe punkty  $R$  „przesuwają” się po  $R$  w kierunku continuumów  $B_1, B_2$ . Punkty zbioru  $B_1$  „przerzucane” są na punkty zbioru  $B_2$  i vice versa. Przecięcie  $B_1 \cap B_2$  jest punktem stałym.

Analogicznie, dla  $\lambda = \mu_2$ , Rysunek 2.11 (b), continuum węzowe  $X_\infty \subset \tilde{X}_\lambda$  składa się



Rysunek 2.11: Podprzestrzeń  $X_\infty \subset \tilde{X}_\lambda$  dla parametru:  $\lambda = \mu_1$  (a);  $\lambda = \mu_2$  (b).

z czterech kopii  $B_1, B_2, B_3, B_4$ , B-J-K continuum oraz trzech promieni  $R, R_1, R_2$ . Koniec promienia  $R$  jest punktem stałym, natomiast pozostałe punkty  $R$  odwzorowanie  $\tilde{\alpha}_\lambda$  przesuwa po  $R$  w kierunku continuumów  $B_i$  i promieni  $R_i$ . Punkty z  $R_1, \tilde{\alpha}_\lambda$  przeprowadza na punkty z  $R_2$  i vice versa. Przecięcie  $R_1 \cap R_2$  jest punktem stałym. Continua  $B_i$  są cyklicznie permutowane

$$\tilde{\alpha}_\lambda(B_1) = B_2, \quad \tilde{\alpha}_\lambda(B_2) = B_3, \quad \tilde{\alpha}_\lambda(B_3) = B_4, \quad \tilde{\alpha}_\lambda(B_4) = B_1,$$

a punkty  $B_1 \cap B_3$  oraz  $B_2 \cap B_4$  tworzą orbitę okresową o okresie 2.

Ogólnie dla  $\lambda = \mu_n$  otrzymujemy opis układu rozszerzonego  $(\tilde{X}_\lambda, \tilde{\alpha}_\lambda)$ , który różni się od opisu zawartego w Twierdzeniu 2.9 jedynie tym, że łuki zastąpione są B-J-K continuumami, por. Rysunek 2.12.

**Twierdzenie 2.12.** Niech  $T_\lambda$  operatorem danym wzorem (2.3), a  $\mathcal{B}_\lambda$  algebrą daną wzorem (2.5). Jeśli  $\lambda = \mu_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ , to

i) przestrzeń idealów maksymalnych  $\tilde{X}_\lambda$  algebry  $\mathcal{B}_\lambda$  składa się z continuum węzowego  $X_\infty$  oraz ciągu łuków  $\{X_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  zbieżnego w metryce Hausdorffa do  $X_\infty$ , gdzie

$$X_\infty = R \cup (R_{1,1} \cup R_{1,2}) \cup \dots \cup (R_{n-1,1} \cup \dots \cup R_{n-1,2^{n-1}}) \cup (B_1 \cup \dots \cup B_{2^n})$$

jest sumą  $2^n - 1$  promieni  $R, R_{k,i}, k = 1, \dots, n - 1, i = 1, \dots, 2^k$ , oraz  $2^n$  B-J-K continuów  $B_i, i = 1, \dots, 2^n$ . Co więcej domknięcie  $R$  pokrywa się z  $X_\infty$  oraz

$$\overline{R_{k,i}} = \bigcup_{j=0}^{n-k-1} \bigcup_{l=0}^{2^j-1} R_{k+j,i+l \cdot 2^k} \cup \bigcup_{l=0}^{2^{n-k}-1} B_{i+l \cdot 2^k}, \quad k = 1, \dots, n - 1, i = 1, \dots, 2^k,$$

por. Rysunek 2.12.

ii) Częściowy homeomorfizm  $\tilde{\alpha}_\lambda$  generowany przez  $T_\lambda$  na widmie  $\tilde{X}_\lambda$ , przeprowadza łuk  $X_N$  na łuk  $X_{N+1}, N \in \mathbb{N}$ . Na continuum  $X_\infty, \tilde{\alpha}_\lambda$  jest homeomorfizmem, który zachowuje  $R$ , permutuje cyklicznie continua  $B_i$ , oraz dla każdego ustalonego  $k = 1, \dots, n - 1$  promienie  $R_{k,i}$ :

$$\tilde{\alpha}_\lambda(B_1) = B_2, \dots, \tilde{\alpha}_\lambda(B_{2^n}) = B_1, \quad \tilde{\alpha}_\lambda(R_{k,1}) = R_{k,2}, \dots, \tilde{\alpha}_\lambda(R_{k,2^k}) = R_{k,1}.$$

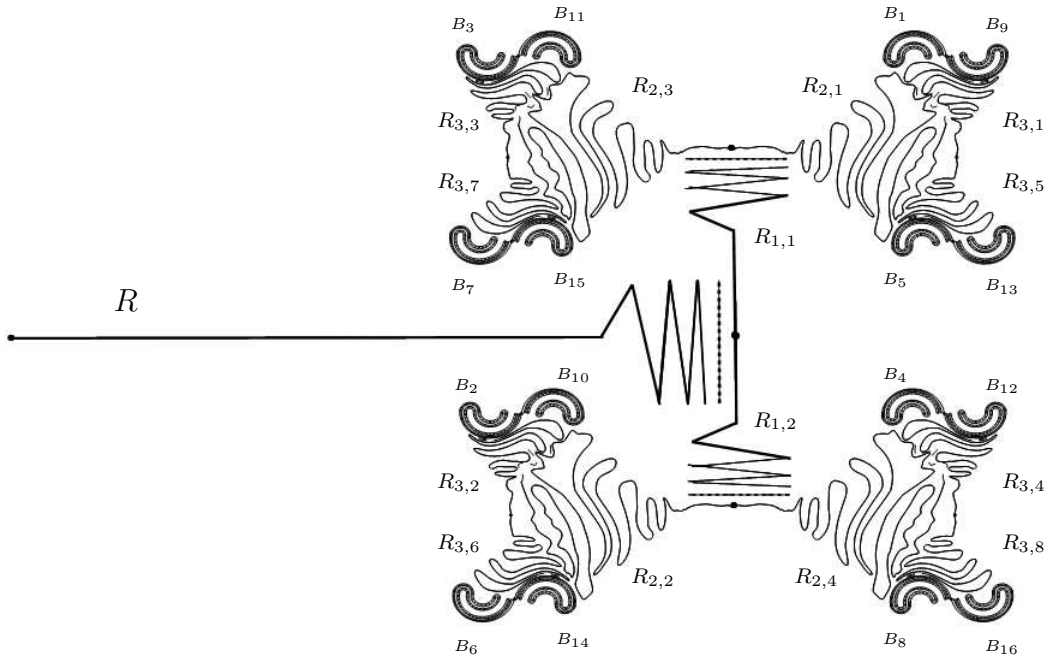
Ponadto, wszystkie promienie  $R, R_{k,i}$  i continua  $B_i$  są parami rozłączne za wyjątkiem następujących przecięć

$$R_{k,i} \cap R_{k,2^{k-1}+i} = \{\tilde{\omega}_{2^{k-1},i}\}, \quad i = \{1, \dots, 2^{k-1}\},$$

$$B_i \cap B_{2^{n-1}+i} = \{\tilde{\omega}_{2^{n-1},i}\} \quad i = \{1, \dots, 2^{n-1}\},$$

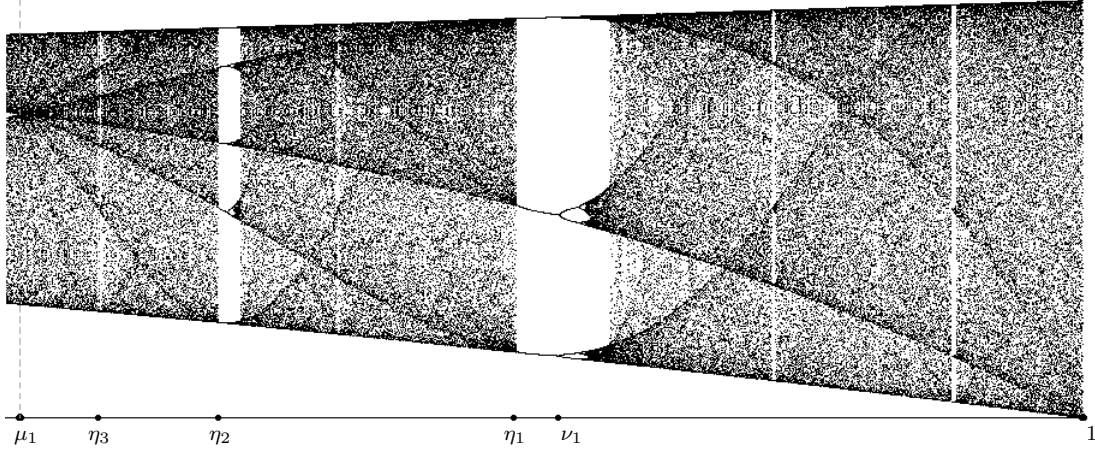
tworzących orbity  $\{\tilde{\omega}_{2^k,1}, \dots, \tilde{\omega}_{2^k,2^k}\}$  okresowe o okresie  $2^k, k = 1, \dots, n - 1$ .

**Dowód.** Teza wynika z Twierdzeń 2.4, 2.5 oraz indukcyjnie zastosowanego Twierdzenia 2.11; patrz też dowód Twierdzenia 6 z [BI96]. ■



Rysunek 2.12: Podprzestrzeń  $X_\infty \subset \tilde{X}_\lambda$  dla  $\lambda = \mu_4$  (przedstawienie schematyczne).

## 2.4.2 Okna stabilnych orbit okresowych o okresach nieparzystych



Rysunek 2.13: Diagram bifurkacyjny dla  $\lambda \in [0, 91; 1]$ .

Niech  $(\eta_n, \nu_n]$  będzie przedziałem wartości parametru  $\lambda$ , w którym odwzorowanie  $\alpha_\lambda$  „po raz pierwszy” posiada stabilną orbitę okresową o okresie  $2n + 1$ . Ciągi  $\eta_n, \nu_n$  zbiegają malejąco do  $\mu_1$ , patrz Rysunek 2.13. Zwróćmy uwagę, że przechodząc z  $\lambda$  od przedziału  $(\eta_n, \nu_n]$  do  $(\eta_{n+1}, \nu_{n+1}]$  zmniejszamy  $\lambda$  i okres orbity stabilnej  $\alpha_\lambda$  zmniejsza się zgodnie z porządkiem Szarkowskiego (Twierdzenie 2.7).

**Twierdzenie 2.13.** Niech  $T_\lambda$  operatorem danym wzorem (2.3), a  $\mathcal{B}_\lambda$  algebrą daną wzorem (2.5). Jeśli  $\lambda \in (\eta_n, \nu_n]$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ , to

- i) przestrzeń idealów maksymalnych  $\widetilde{X}_\lambda$  algebry  $\mathcal{B}_\lambda$  składa się z continuum węzowego  $X_\infty$  oraz ciągu łuków  $\{X_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  zbieżnego w metryce Hausdorffa do  $X_\infty$ , gdzie

$$X_\infty = R \cup C_{2n+1},$$

$R$  jest promieniem,  $C_{2n+1}$  nierozkładalnym continuum o dokładnie  $2n + 1$  końcach, którego jedynymi podcontinuumami właściwymi są łuki. Ponadto  $C_{2n+1} \cap R = \emptyset$  oraz  $\overline{R} = R \cup C_{2n+1}$ .

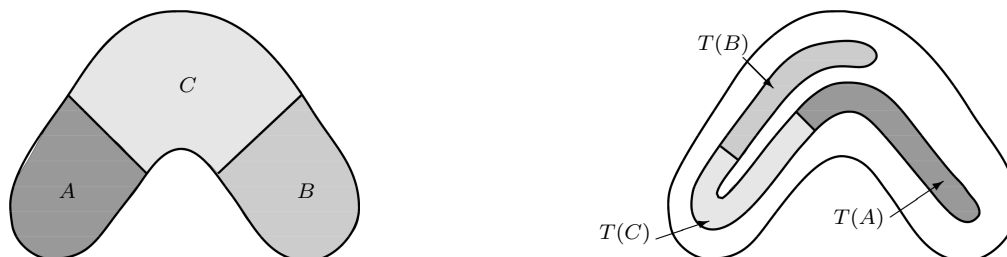
- ii) Częściowy homeomorfizm  $\tilde{\alpha}_\lambda$  generowany przez  $T_\lambda$  na widmie  $\widetilde{X}_\lambda$ , przeprowadza łuk  $X_N$  na łuk  $X_{N+1}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Na continuum  $X_\infty$ ,  $\tilde{\alpha}_\lambda$  jest homeomorfizmem, który zachowuje  $R$  i  $C_{2n+1}$ . Przy czym koniec  $R$  jest punktem stałym, a pozostałe punkty  $R$ ,  $\tilde{\alpha}_\lambda$  przesuwa w kierunku continuum  $C_{2n+1}$ . Natomiast końce continuum  $C_{2n+1}$  tworzą orbitę okresową o okresie  $2n + 1$ .

**Dowód.** W świetle Twierdzenia 2.4 tezę otrzymujemy przez indukcyjne zastosowanie [BI96, Tw. 8]. ■

Dla  $\lambda \in (\eta_1, \nu_1]$  (leżącego w oknie orbity stabilnej o okresie trzy) continuum  $C_3 \subset \widetilde{X}_\lambda$  jest podręcznikowym przykładem continuum nierozkładalnego, definiowanym zazwyczaj za pomocą łańcuchów zstępujących, patrz [Nad92]. Continuum  $C_3$



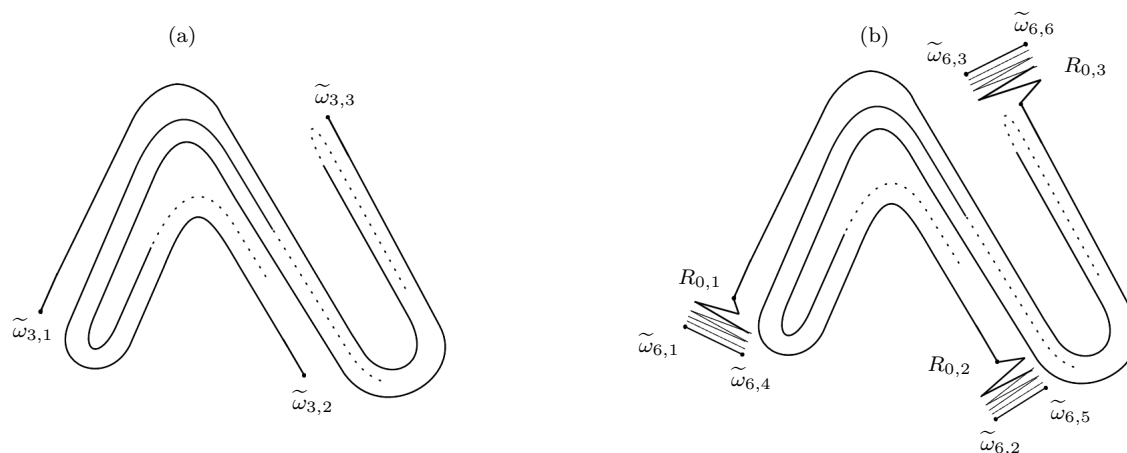
można otrzymać również jako atraktor przekształcenia ciągłego  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  określonego na zwartym podzbiórze  $\Omega = A \cup B \cup C$  płaszczyzny  $\mathbb{R}^2$ , którego działanie schematycznie przedstawia Rysunek 2.14. Układ  $(C_3, \tilde{\alpha}_\lambda)$  jest wtedy topologicznie sprzężony z układem  $(\Lambda, T)$ , gdzie  $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^n(\Omega)$ .



Rysunek 2.14: Continuum  $C_3$  jako atraktor.

### 2.4.3 Kaskady bifurkacji następujące po oknach stabilności

Po każdym oknie stabilności  $(\eta_n, \nu_n]$  następuje kaskada bifurkacji podwojenia okresu orbity stabilnej, por. Rysunek 2.13. Na przykład zwiększając parametr  $\lambda$  w oknie  $(\eta_1, \nu_1]$  orbity stabilnej o okresie trzy na poziomie układu  $(\tilde{X}_\lambda, \tilde{\alpha}_\lambda)$  zaobserwujemy, iż końce continuum  $C_3 \subset \tilde{X}_\lambda$ , Rysunek 2.15 (a), złączą się „wić” i gdy  $\lambda$  przekroczy wartość  $\nu_1$  końce  $C_3$  zmienią się w odcinki: continuum  $C_3$  zmieni się w nierozkładalne continuum  $C_6$  o 6 końcach, Rysunek 2.15 (b). Następnie „wić” złączą się końce continuum  $C_6$  i w pewnym momencie zmienią się w 6 odcinków, których końce będą końcami nierozkładalnego continuum  $C_{12}$  i tak dalej. W szczególności, po czterech bifurkacjach otrzymamy continuum  $C_{64}$ , które powstaje z continuum  $C_3$  poprzez zastąpienie każdego z jego końców kopią continuum przedstawionego na Rysunku 2.10. Podobne zjawiska napotkamy zaczynając od dowolnego okna stabilności  $(\eta_n, \nu_n]$  orbity okresowej o okresie  $2n + 1$ . Aby otrzymać opis formalny, dla każdego  $n \in \mathbb{N}_+$ ,



Rysunek 2.15: Continua  $C_3$  i  $C_6$ .

oznaczymy przez  $\lambda_1^{(n)} = \nu_n$ ,  $\lambda_2^{(n)}$ ,  $\lambda_3^{(n)}$ , ... ciąg wartości parametru  $\lambda$  odpowiadających

kaskadzie bifurkacji podwojenia okresu orbity stabilnej układu  $([0, 1], \alpha_\lambda)$  następującej bezpośrednio po  $\lambda_0^{(n)} := \eta_n$ .

**Twierdzenie 2.14.** *Niech  $T_\lambda$  operatorem danym wzorem (2.3), a  $\mathcal{B}_\lambda$  algebrą daną wzorem (2.5). Jeśli  $\lambda \in (\lambda_m^{(n)}, \lambda_{m+1}^{(n)}]$ , gdzie  $n > 0$ ,  $m \geq 0$ , to*

- i) *przestrzeń idealów maksymalnych  $\widetilde{X}_\lambda$  algebry  $\mathcal{B}_\lambda$  składa się z continuum węzowego  $X_\infty$  oraz ciągu łuków  $\{X_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  zbieżnego w metryce Hausdorffa do  $X_\infty$ , gdzie*

$$X_\infty = R \cup C_{2^m(2n+1)}$$

*jest sumą promienia  $R$  i nierozkładalnego continuum  $C_{2^m(2n+1)}$  posiadającego dokładnie  $2^m(2n+1)$  końców. Co więcej  $\overline{R} = R \cup C_{2^m(2n+1)}$  oraz*

$$C_{2^m(2n+1)} = C_{2n+1} \cup \bigcup_{k=0}^{m-1} \bigcup_{i=1}^{2^k(2n+1)} R_{k,i} \cup \bigcup_{i=1}^{2^{m-1}(2n+1)} I_i$$

*jest sumą  $(2^m - 1)(2n+1)$  promieni  $R_{k,i}$  oraz  $2^{m-1}(2n+1)$  łuków  $I_i$ . Domknięcie  $C_{2n+1}$  pokrywa się z  $C_{2^m(2n+1)}$  oraz*

$$\overline{R_{k,i}} = \bigcup_{j=0}^{m-k-1} \bigcup_{l=0}^{2^j-1} R_{k+j, i+l \cdot 2^k(2n+1)} \cup \bigcup_{l=0}^{2^{m-k-1}} I_{i+l \cdot 2^k(2n+1)},$$

*dla  $i = 1, \dots, 2^k(2n+1)$ ,  $k = 0, \dots, m-1$ .*

- ii) *Częściowy homeomorfizm  $\tilde{\alpha}_\lambda$  generowany przez  $T_\lambda$  na widmie  $\widetilde{X}_\lambda$ , przeprowadza łuk  $X_N$  na łuk  $X_{N+1}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Na continuum  $X_\infty$ ,  $\tilde{\alpha}_\lambda$  jest homeomorfizmem, który zachowuje promień  $R$  i continuum  $C_{2n+1}$ , permutuje cyklicznie łuki  $I_i$ , oraz (dla każdego ustalonego  $k = 0, \dots, m-1$ ) promienie  $R_{k,i}$ .*

*Ponadto, wszystkie promienie  $R$ ,  $R_{k,i}$ , łuki  $I_i$  oraz continuum  $C_{2n+1}$  są parami rozłączne za wyjątkiem następujących jednoelementowych przecięć*

$$C_{2n+1} \cap R_{0,i}, \quad i = 1, \dots, 2n+1,$$

$$R_{k,i} \cap R_{k, i+2^{k-1}(2n+1)} = \{\tilde{\omega}_{2^{k-1}(2n+1), i}\}, \quad i = 1, \dots, 2^{k-1}(2n+1), \quad k = 1, \dots, m-1.$$

*Zbiory  $\{\tilde{\omega}_{2^k(2n+1), 1}, \dots, \tilde{\omega}_{2^k(2n+1), 2^k(2n+1)}\}$  tworzą orbity okresowe o okresach  $2^k(2n+1)$  dla  $k = 0, \dots, m-2$ . Środki łuków  $I_i$  tworzą orbitę okresową o okresie  $2^{m-1}(2n+1)$ , a końce łuków  $I_i$  tworzą orbitę okresową o okresie  $2^m(2n+1)$ .*

**Dowód.** W świetle Twierdzenia 2.4 wystarczy powtórzyć rozumowanie z dowodu Twierdzenia 8 z [BI96], patrz też uwagi przed Twierdzeniem 9 z [BI96], jak również wstęp oraz ustęp 6 z [BI96]. ■

## Uwagi do rozdziału 2

Nazwę continuum węzowe wprowadził R. H. Bing [Bin51]. Pierwotnie continua takie były zdefiniowane w języku łańcuchów i nazywane były continuami łańcuchowymi. Charakterystyka takich obiektów, która posłużyła nam za definicję (Definicja 2.3 iii)) została wykazana z początkiem lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku, gdy metoda granic odwrotnych stała się jednym z ważniejszych narzędzi w teorii continuów, por. [Nad92].

Dzięki uzyskanemu w Twierdzeniach 1.28, 2.4, ogólnemu opisowi układów rozszerzonych i w szczególności wyjaśnieniu roli granic odwrotnych jako istotnych składników badanych układów, mogliśmy zastosować do opisu układów  $(\widetilde{X}_\lambda, \widetilde{\alpha}_\lambda)$ , generowanych przez operatory  $T_\lambda$  na przestrzeniach ideałów maksymalnych algebr  $\mathcal{B}_\lambda$ ,  $\lambda \in (0, 1]$ , wyniki dotyczące granic odwrotnych związanych z odwzorowaniami logistycznymi zebrane w [BI96]. W prezentacji zawartej w podrozdziale 2.3 wykorzystane zostały również doświadczenia autora w badaniu granic odwrotnych związanych z odwzorowaniami unimodalnymi [Kwa05”].



## Rozdział 3

# Konkretne operatory przesunięcia z wagą. Kolejne przykłady rozszerzeń klasycznych układów dynamicznych

Przed obecnym rozdziałem stawiane są dwa cele. Pierwszym jest dostarczenie szeregu kolejnych, jawnych przykładów rozszerzeń układów dynamicznych, które wraz z rezultatami z rozdziału poprzedniego przedstawiałyby szerokie spektrum struktur występujących w obiektach tego typu. Drugim zadaniem jest prezentacja możliwie obszernej klasy ważonych operatorów kompozycji na przestrzeniach  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , spełniających warunki zebrane w Definicji 3.1; takie operatory będziemy nazywać *konkretnymi ważonymi operatorami przesunięcia*, a ich widmo zostanie opisane w rozdziale 9. Oba cele zostaną zrealizowane w następujący sposób.

Po pierwsze, przedstawimy ogólną konstrukcję konkretnych operatorów przesunięcia w przestrzeniach  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , generujących dowolne jednowymiarowe układy dynamiczne. Ta konstrukcja i Twierdzenie 1.28 umożliwią nam przełożenie teorii jednowymiarowych, hiperbolicznych atraktorów [Wil67], [Dev89], [Yi01] oraz układów dynamicznych związanych z kafelkowaniami [AP98] na język konkretnych ważonych operatorów przesunięcia i algebr przez nie generowanych. W szczególności jako przestrzeń ideałów maksymalnych algebry rozszerzonej  $\mathcal{B}$  otrzymamy  $N$ -adyczne solenoidy, atraktor Plykina oraz przestrzeń kafelkowań Fibonacciego.

Po drugie, omówimy naturalne rozszerzenia symbolicznych układów dynamicznych. Zdefiniujemy konkretne ważne operatory przesunięcia związane z topologicznymi przesunięciami Markowa, które na widmie algebry rozszerzonej  $\mathcal{B}$  generują układy geometrycznie reprezentujące się jako podkowy Smale'a.

Po trzecie, na przykładzie konkretnych operatorów kompozycji generujących homeomorfizmy okręgu oraz przesunięcia na torusie pokażemy, że widmo algebry  $\mathcal{B}$  może tworzyć ciekawe topologiczne struktury, nie tylko w przypadku nieodwracalnych układów dynamicznych, ale także, gdy wyjściowe operatory związane są z odwracalnymi układami dynamicznymi. W przypadku operatorów generujących homeomorfizmy okręgu przedstawimy klasyfikację algebr rozszerzonych, w której zasadniczą rolę odgrywa, wprowadzone przez H. Poincaré, pojęcie liczby obrotu.

### 3.1 Konkretnie operatory przesunięcia z wagą i abstrakcyjne operatory przesunięcia z wagą

Definicja, którą wprowadzimy poniżej ma w pewnym sensie charakter techniczny. Obiekty w niej występujące, pomijając twierdzenia niniejszego podrozdziału, wykorzystamy dopiero (i w sposób jawny tylko) w dowodzie Twierdzenia 8.6. Co więcej we wszystkich omawianych przykładach założenia Definicji 3.1 będą spełnione w sposób naturalny.

Standardowo *obrazem istotnym* podzbioru  $\omega$  przestrzeni z miarą  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  przy odwzorowaniu mierzalnym  $\varphi : \Omega \rightarrow X$ , gdzie  $X$  jest przestrzenią topologiczną traktowaną jako przestrzeń mierzalna wraz z rodziną zbiorów borelowskich  $B(X)$ , będziemy nazywać zbiór

$$\text{ess } \varphi(\omega) := \{x \in X : \mu(\varphi^{-1}(U) \cap \omega) \neq 0 \text{ dla każdego otwartego } U, x \in U\}.$$

Oczywiście zawsze zachodzi inkluzja  $\text{ess } \varphi(\omega) \subset \overline{\varphi(\omega)}$  i jeśli  $\Omega$  jest przestrzenią topologiczną,  $\mu$  jest miarą borelowską, której nośnikiem jest  $\Omega$ , a  $\varphi$  jest odwzorowaniem ciągłym, to dla każdego otwartego zbioru  $\omega \subset \Omega$  mamy  $\text{ess } \varphi(\omega) = \overline{\varphi(\omega)}$ .

**Definicja 3.1 (Konkretnie operatory ważonego przesunięcia na  $L^p$ ).** Niech  $(X, \alpha)$  będzie częściowym układem dynamicznym i niech  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  będzie przestrzenią z dodatnią,  $\sigma$ -skończoną miarą  $\mu$ . Ponadto załóżmy, że:

- 1) istnieje odwzorowanie mierzalne  $\varphi : \Omega \rightarrow X$  oraz zbiór  $\Omega_0 \in \Sigma$  taki, że wzór

$$\nu(U) := \mu(\varphi^{-1}(U) \cap \Omega_0), \quad U \in B(X),$$

definiuje lokalnie skończoną, regularną miarę borelowską na  $X$ , której nośnikiem jest  $X$ , czyli innymi słowy  $\text{ess } \nu(\Omega_0) = X$ .

- 2) Istnieje zachowująca klasy równoważności miary  $\mu$ , mierzalna bijekcja  $\gamma : D \rightarrow \gamma(D)$ , tj. taka bijekcja, że określone są obie pochodne Radona-Nikodyma  $\frac{d\mu \circ \gamma}{d\mu}$  i  $\frac{d\mu \circ \gamma^{-1}}{d\mu}$ , gdzie  $D = \varphi^{-1}(\Delta_1)$ , a diagram

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\gamma} & \gamma(D) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \Delta_1 & \xrightarrow{\alpha} & \Delta_{-1} \end{array} \quad (3.1)$$

jest przemienny.

- 3) Zachodzi równość  $\text{ess } \varphi(\Omega \setminus \gamma(D)) = \text{ess } \varphi(\Omega_0 \setminus \gamma(D))$ .

Wtedy, dla  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $a \in C(X)$ , operator  $aT_p : L^p_\mu(\Omega) \rightarrow L^p_\mu(\Omega)$  postaci

$$(aT_p f)(t) = \begin{cases} a(\varphi(t)) \left| \frac{d\mu \circ \gamma}{d\mu} \right|^{\frac{1}{p}} f(\gamma(t)), & t \in D \\ 0, & t \notin D \end{cases}, \quad f \in L^p_\mu(\Omega), \quad (3.2)$$

gdzie przyjmujemy  $\frac{1}{\infty} = 0$ , będziemy nazywać *konkretnym operatorem ważonego przesunięcia* w przestrzeni  $L^p_\mu(\Omega)$  związanym z częściowym układem dynamicznym  $(X, \alpha)$ .

Powyższa definicja jest całkowicie naturalna w przypadku operatorów związanych z odwracalnymi, metrycznymi układami dynamicznymi z miarą skończoną.

**Przykład 3.2.** Niech  $\alpha : X \rightarrow X$  będzie homeomorfizmem i niech  $\mu$  będzie regularną, borelowską miarą taką, że  $\mu(X) < +\infty$  oraz miary  $\mu \circ \alpha^{-1}$ ,  $\mu \circ \alpha$  są absolutnie ciągle ze względu na  $\mu$ . Wtedy każdy operator postaci

$$(aT_p f)(x) = a(x) \left| \frac{d\mu \circ \alpha}{d\mu} \right|^{\frac{1}{p}} f(\alpha(x)), \quad f \in L_\mu^p(X),$$

gdzie  $a \in C(X)$  jest konkretnym ważonym operatorem przesunięcia w przestrzeni  $L_\mu^p(X)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , związanym z układem  $(X, \alpha)$ . Warunki Definicji 3.1 są spełnione trywialnie dla  $\Omega = \Omega_0 = X$ ,  $\varphi = id$  i  $\gamma = \alpha$ .

Operatory występujące w powyższym przykładzie spełniają warunki definicji A. B. Antonevicha i A. V. Lebedeva – Definicja 0.1. Własności spektralne takich operatorów są opisane np. w [AL94], [Ant96], dlatego też w dalszej części pracy skupimy się na operatorach w przestrzeniach z *miarą nieskończoną*. W podrozdziale 3.3 przedstawimy ogólną metodę konstrukcji konkretnych ważonych operatorów przesunięcia w przestrzeniach  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , związanych z dowolnym kawałkami monotonicznym odwzorowaniem na grafie. Z pośród operatorów rozpatrywanych do tej pory, konkretnymi ważonymi operatorami przesunięcia są następujące.

**Przykład 3.3 (Klasyczne operatory przesunięcia z wagą).** Niech  $E = \ell^p(\mathbb{N})$ ,  $p \in [1, \infty]$ . Niech  $\mathcal{A} \subset L(E)$  będzie algebrą wszystkich ograniczonych operatorów mnożenia, a  $T_{\mathbb{N}}$  klasycznym operatorem przesunięcia, patrz Przykład 1.20. Rozważmy przestrzeń  $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$  z miarą liczącą  $\mu$ , odwzorowanie  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \beta(\mathbb{N})$  będące zanurzeniem  $\mathbb{N}$  w przestrzeń Čecha-Stone’a  $\beta(\mathbb{N})$ , bijekcję  $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_+$  daną wzorem  $\gamma(n) = n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , oraz odwzorowanie  $\alpha : \beta(\mathbb{N}) \rightarrow \beta(\mathbb{N})$  będące jedynym ciągłym przedłużeniem odwzorowania  $\alpha|_{\mathbb{N}} = \gamma$ . Wtedy dla  $\Omega_0 = \mathbb{N}$  warunki 1), 2), 3) Definicji 3.1 są spełnione. Ponadto dla każdego  $a \in \mathcal{A} \cong C(\beta(\mathbb{N}))$  mamy

$$aT_p = aT_{\mathbb{N}},$$

gdzie  $aT_p$  jest dany wzorem (3.1). Zatem klasyczne ważne operatory przesunięcia są konkretnymi ważonymi operatorami przesunięcia związanymi z układem  $(\beta(\mathbb{N}), \alpha)$ .

**Przykład 3.4 (Operatory generujące odwzorowania logistyczne).** Niech  $E = L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Niech  $\mathcal{A} \subset L(E)$  będzie algebrą operatorów mnożenia przez funkcje spełniające relacje (2.1) i niech  $T_\lambda \in L(E)$ ,  $\lambda \in (0, 1]$ , będzie operatorem danym wzorem (2.3). Odwzorowanie  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  będące częścią ułamkową:  $\varphi(t) = \{t\}$ , półsprzęga odwzorowanie  $\gamma_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dane wzorem (2.2) z odwzorowaniem logistycznym  $\alpha_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , patrz (2.4). Kładąc  $\Omega_0 = [0, 1]$  spełnione są warunki 1), 2), 3) Definicji 3.1. Ponadto przyporządkowanie  $C([0, 1]) \ni a \mapsto a \circ \varphi \in L(E)$  ustala izomorfizm  $C([0, 1]) \cong \mathcal{A}$ . Zatem operatory postaci

$$aT_\lambda, \quad a \in \mathcal{A},$$

są konkretnymi ważonymi operatorami przesunięcia związanymi z układem  $([0, 1], \alpha_\lambda)$ ,  $\lambda \in (0, 1]$ , por. Stwierdzenie 2.1.

Aby wyjaśnić związek między abstrakcyjnymi oraz konkretnymi ważonymi operatorami przesunięcia zauważmy, że odwzorowanie  $\varphi$  z Definicji 3.1 zadaje reprezentację  $\pi : C(X) \rightarrow L(L_\mu^p(\Omega))$  algebry  $C(X)$ :

$$(\pi(a)f)(t) = a(\varphi(t))f(t), \quad f \in L_\mu^p(\Omega), \quad t \in \Omega.$$

Założenie, że nośnikiem miary  $\nu$  jest  $X$  implikuje, iż reprezentacja  $\pi$  jest izometryczna. Możemy zatem utożsamić  $C(X)$  z algebrą  $\mathcal{A} := \pi(C(X)) \subset L(L_\mu^p(\Omega))$ , której elementami są operatory mnożenia. Ponadto operatory  $T_p, S_p : L_\mu^p(\Omega) \rightarrow L_\mu^p(\Omega)$ , dane wzorami

$$(T_p f)(t) = \begin{cases} \left| \frac{d\mu \circ \gamma}{d\mu} \right|^{\frac{1}{p}} f(\gamma(t)), & t \in D \\ 0, & t \notin D \end{cases}, \quad (S_p f)(t) = \begin{cases} \left| \frac{d\mu \circ \gamma^{-1}}{d\mu} \right|^{\frac{1}{p}} f(\gamma^{-1}(t)), & t \in \gamma(D) \\ 0, & t \notin \gamma(D) \end{cases},$$

są wzajemnie sprzężonymi częściowymi izometriami.

**Stwierdzenie 3.5.** *Konkretny operator przesunięcia z wagą  $aT_p$  związany z częściowym układem dynamicznym  $(X, \alpha)$  jest abstrakcyjnym operatorem przesunięcia z wagą w algebrze  $\mathcal{A} = \pi(C(X))$  i częściowa izometria  $T_p$  generuje na  $X$  odwzorowanie  $\alpha$ . Ponadto otoczką ideału*

$$J = \{a \in C(X) : S_p T_p \pi(a) = \pi(a)\}$$

jest  $Y = \text{ess } \varphi(\Omega \setminus \gamma(D))$ , algebra  $\mathcal{B} = \overline{\text{span}}\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_p^n \mathcal{A} T_p^n\}$  jest izomorficzna z algebrą funkcji  $C(\tilde{X})$ , gdzie  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  jest naturalnym rozszerzeniem układu  $(X, \alpha)$  związanym ze zbiorem  $Y$ , por. Definicja 1.32. W szczególności  $\mathcal{B}$  nie zależy od  $p \in [1, \infty]$ .

**Dowód.** Korzystając z przemienności diagramu (3.1), dla  $a \in C(X)$  mamy

$$(T_p \pi(a) S_p) f(t) = \begin{cases} a(\varphi(\gamma(t))) f(t), & t \in D \\ 0, & t \notin D \end{cases} = \begin{cases} a(\alpha(\varphi(t))) f(t), & t \in D \\ 0, & t \notin D \end{cases},$$

skąd wynika, że operator  $T_p$  generuje na widmie algebry  $\mathcal{A} = \pi(C(X))$  układ  $(X, \alpha)$ . Rzut  $S_p T_p$  jest operatorem mnożenia przez funkcję  $\chi_{\gamma(D)}$  i w szczególności  $S_p T_p \in \mathcal{A}'$ . Stąd oraz z postaci reprezentacji  $\pi$  wnosimy, że otoczką ideału  $J$  jest zbiór  $Y = \text{ess } \varphi(\Omega \setminus \gamma(D))$ . Pozostała część tezy wynika z Twierdzenia 1.28, gdyż algebra  $\mathcal{B}$  składa się z operatorów mnożenia przez funkcje z  $L^\infty(\mathbb{R})$  i jest zamknięta ze względu na sprzężenie takich funkcji, czyli jest przemianą  $C^*$ -algebrą. ■

W Rozdziale 8, w dowodzie Twierdzenia 8.6 ważną rolę odgrywać będzie następujące twierdzenie. Zauważmy, że  $\text{span}\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_p^n \mathcal{A} T_p^n\}$ , gdzie  $\text{span}\{K\}$  oznacza przestrzeń liniową rozpiętą przez zbiór  $K$ , jest gęstą podalgebrą algebry  $\mathcal{B}$ .

**Twierdzenie 3.6.** *Jeśli  $aT_p$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , jest konkretnym operatorem przesunięcia z wagą związanym z częściowym układem dynamicznym  $(X, \alpha)$ , to operator  $bT_p$ , gdzie  $b \in \text{span}\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_p^n \mathcal{A} T_p^n\}$ , również jest konkretnym operatorem przesunięcia z wagą.*

*Dokładniej,  $bT_p$  jest konkretnym ważonym operatorem przesunięcia związanym z układem  $(\tilde{X}_N, \tilde{\alpha}_N)$  dualnym do układu  $(\mathcal{B}_N, \delta)$ , gdzie  $\mathcal{B}_N = \text{span}\{\bigcup_{n=0}^N S_p^n \mathcal{A} T_p^n\}$ ,  $\delta(\cdot) = T_p(\cdot) S_p$ , a  $N \in \mathbb{N}$  jest takie, że  $b \in \mathcal{B}_N$ .*



**Dowód.** Zaczniemy od następujących uwag. Po pierwsze, oznaczając przez  $D_n$  dziedzinę odwzorowania  $\gamma^n$  (założmy, że  $D_0 = \Omega$ ) z warunku 2) Definicji 3.1 mamy  $D_n = \varphi^{-1}(\Delta_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  mamy również

$$\text{ess}(\varphi(D_n \cap \Omega_0)) = \text{ess} \varphi(D_n) = \Delta_n, \quad (3.3)$$

co wynika z domknięto-otwartości  $\Delta_n$  oraz równości  $\text{ess} \varphi(\Omega_0) = X$  i  $D_n = \varphi^{-1}(\Delta_n)$ . Po drugie, korzystając dodatkowo z domkniętości  $Y$  oraz równości  $\text{ess} \varphi(\Omega \setminus \gamma(D)) = \text{ess} \varphi(\Omega_0 \setminus \gamma(D))$ , otrzymujemy

$$\text{ess}(\varphi(D_n \cap \Omega_0 \setminus \gamma(D))) = \text{ess}(\varphi(D_n \setminus \gamma(D))) = \Delta_n \cap Y. \quad (3.4)$$

W szczególności, modyfikując (ewentualnie) odwzorowanie  $\varphi$  na zbiorze miary zero, możemy założyć, że  $\varphi(\Omega \setminus \gamma(D)) \subset Y$ .

Wracając do zasadniczej części dowodu, niech  $b \in \text{span}\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_p^n \mathcal{A}T_p^n\}$ . Wtedy istnieje  $N \in \mathbb{N}$  takie, że  $b$  jest elementem  $\mathcal{B}_N = \text{span}\{\bigcup_{n=0}^N S_p^n \mathcal{A}T_p^n\}$ . Jak nietrudno się przekonać, por. Twierdzenie 1.22,  $\mathcal{B}_N$  jest przemienną  $C^*$ -algebrą. Rozumując podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 1.28 widmo algebry  $\mathcal{B}_N$  możemy utożsamić z podprzestrzenią

$$\widetilde{X}_N = \bigcup_{n=0}^{N-1} \{(x_0, x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) : x_n \in Y \cap \Delta_n, x_{n-k} = \alpha^k(x_n)\}$$

$$\cup \{(x_0, x_1, \dots, x_N) : x_N \in \Delta_N, x_{N-k} = \alpha^k(x_N)\}$$

przestrzeni produktowej  $\prod_{n=0}^N (X \cup \{0\})$ . Operator  $T_p$  generuje wtedy na podzbiorze  $\widetilde{\Delta}_1 = \{(x_0, x_1, \dots) \in \widetilde{X}_N : x_0 \in \Delta_1\} \subset \widetilde{X}_N$  odwzorowanie

$$\widetilde{\alpha}_N(x_0, x_1, \dots) = (\alpha(x_0), x_0, \dots), \quad (x_0, x_1, \dots) \in \widetilde{\Delta}_1.$$

Aby pokazać, że operator  $bT_p$  jest konkretnym operatorem ważonego przesunięcia związanym z układem  $(\widetilde{X}_N, \widetilde{\alpha}_N)$  zdefiniujemy odwzorowanie  $\widetilde{\varphi} : \Omega \rightarrow \widetilde{X}_N$  w następujący sposób. Rodzina

$$\left\{ \gamma^n(D_n) \setminus \gamma^{n+1}(D_{n+1}) \right\}_{n=0}^{N-1} \cup \left\{ \gamma^N(D_N) \right\}$$

stanowi podział przestrzeni  $\Omega$ . Dla  $n = 0, 1, \dots, N-1$  oraz  $t \in \gamma^n(D_n) \setminus \gamma^{n+1}(D_{n+1})$  połączmy

$$\widetilde{\varphi}(t) := (\varphi(t), \varphi(\gamma^{-1}(t)), \varphi(\gamma^{-2}(t)), \dots, \varphi(\gamma^{-n}(t)), 0, \dots, 0).$$

Z przemienności diagramu (3.1) oraz relacji

$$\varphi\left(\gamma^{-n}\left(\gamma^n(D_n) \setminus \gamma^{n+1}(D_{n+1})\right)\right) = \varphi(D_n \setminus \gamma(D_{n+1})) \subset \varphi(D_n) \cap \varphi(\Omega \setminus \gamma(D)) \subset \Delta_n \cap Y.$$

wynika, iż odwzorowanie  $\widetilde{\varphi} : \gamma^n(D_n) \setminus \gamma^{n+1}(D_{n+1}) \rightarrow \widetilde{X}_N$  jest poprawnie określone. Analogicznie sprawdza się, że poprawne jest określenie  $\widetilde{\varphi} : \gamma^N(D_N) \rightarrow \widetilde{X}_N$  wzorem

$$\widetilde{\varphi}(t) := (\varphi(t), \varphi(\gamma^{-1}(t)), \varphi(\gamma^{-2}(t)), \dots, \varphi(\gamma^{-N}(t))).$$

Jasne jest, że właśnie zdefiniowane odwzorowanie  $\tilde{\varphi} : \Omega \rightarrow \tilde{X}_N$  spełnia warunek 2) Definicji 3.1. Ponadto kładąc

$$\tilde{\Omega}_0 = \bigcup_{n=0}^{N-1} \gamma^n(D_n \cap \Omega_0) \setminus \gamma^{n+1}(D_{n+1}) \cup \gamma^N(D_N \cap \Omega_0).$$

widzimy, iż spełniony jest również warunek 3), gdyż

$$\begin{aligned} \text{ess } \tilde{\varphi}(\tilde{\Omega}_0 \setminus \gamma(D)) &= \text{ess } \tilde{\varphi}(\Omega_0 \setminus \gamma(D)) = \text{ess } \varphi(\Omega_0 \setminus \gamma(D)) \\ &= \text{ess } \varphi(\Omega \setminus \gamma(D)) = \text{ess } \tilde{\varphi}(\Omega \setminus \gamma(D)). \end{aligned}$$

By wykazać warunek 1) zauważmy, że zbiory postaci  $\tilde{U}_n = \{(x_0, \dots) \in \tilde{X}_N : x_n \in U\}$ , gdzie  $U$  jest otwartym podzbiorem  $Y \cap \Delta_n$ , jeśli  $n < N$  lub  $\Delta_N$ , jeśli  $n = N$ , tworzą podbazę topologii na  $\tilde{X}_N$ . Dla każdego takiego zbioru wielkość

$$\tilde{\nu}(\tilde{U}_n) := \mu(\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{U}_n) \cap \tilde{\Omega}_0) = \mu(\gamma^n(\varphi^{-1}(U) \cap \Omega_0))$$

jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy skończona jest wielkość  $\nu(U) = \mu(\varphi^{-1}(U) \cap \Omega_0)$ . Zatem stąd, że miara  $\nu$  jest lokalnie skończona, taką też jest miara

$$\tilde{\nu}(\tilde{U}) := \mu(\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{U}) \cap \tilde{\Omega}_0), \quad \tilde{U} \in B(\tilde{X}_N).$$

Definicje  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\Omega}_0$  oraz relacje (3.3), (3.4) implikują, iż  $\text{ess } \tilde{\varphi}(\tilde{\Omega}_0) = \tilde{X}_N$ , co kończy dowód. ■

Teza powyższego twierdzenia nie uogólnia się na przypadek operatorów  $bT_p$  z wagą  $b$  będącą dowolnym elementem algebry Banacha  $\mathcal{B} = \overline{\text{span}}\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_p^n \mathcal{A} T_p^n\}$ . Można to spostrzec rozważając np. operatory z kolejnego podrozdziału.

## 3.2 Operatory generujące odwzorowania $z^N$ na okręgu $S^1$ . Solenoidy

Operatory generujące odwzorowania  $\alpha(z) = z^N$ ,  $z \in S^1$ , grają w obecnej pracy ważną, poglądową oraz motywacyjną rolę, por. Przykład 0.3. W szczególności warto je dokładniej omówić zanim przejdziemy do zapowiedzianej ogólnej konstrukcji operatorów w przestrzeniach  $L^p(\mathbb{R})$  generujących dowolny układ jednowymiarowy.

Niech  $E = L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Ustalmy  $N = 2, 3, \dots$ , i rozważmy operator  $T_p \in L(E)$  będący unormowanym operatorem złożenia z funkcją  $\gamma(t) = Nt$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ; operator  $T_p$  jest odwracalną izometrią:

$$(T_p f)(t) = N^{\frac{1}{p}} f(Nt), \quad (T_p^{-1})(t) = \frac{1}{N^{\frac{1}{p}}} f\left(\frac{t}{N}\right)$$

(gdzie  $\frac{1}{\infty} = 0$ ). Niech  $\mathcal{A} \subset L(E)$  składa się operatorów mnożenia przez ciągłe funkcje okresowe o okresie 1:

$$\mathcal{A} \cong C(S^1),$$

Nietrudno spostrzec, że zachodzą relacje  $T_p \mathcal{A} T_p^{-1} \subset \mathcal{A}$ ,  $T_p^{-1} \mathcal{A} T_p \not\subset \mathcal{A}$  oraz przy utożsamieniu  $\mathcal{A}$  z  $C(S^1)$ , mamy

$$(T_p a T_p^{-1})(z) = a(z^N), \quad z \in S^1,$$

czyli operator  $T_p$  generuje na  $S^1$  odwzorowanie  $\alpha(z) = z^N$ ,  $z \in S^1$ .

**Stwierdzenie 3.7.** Dla każdego  $a \in \mathcal{A}$ ,  $aT_p$  jest konkretnym operatorem ważonego przesunięcia na przestrzeni  $L^p(\mathbb{R})$  związanym z układem  $(S^1, \alpha)$ ,  $\alpha(z) = z^N$ .

**Dowód.** Odwzorowania  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\gamma(t) = Nt$ ;  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $\varphi(t) = e^{2\pi it}$  oraz zbiór  $\Omega_0 = [0, 1]$  spełniają warunki 1), 2), 3) Definicji 3.1. Ponadto, przy tych oznaczeniach, dla  $a \in \mathcal{A}$ , operator  $aT_p$  jest dany wzorem (3.2). ■

Algebra  $T_p^{-1}\mathcal{A}T_p$ , por. Przykład 0.3, składa się operatorów mnożenia przez funkcje okresowe o okresie  $N$ . Ogólnie dla  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{A}_n = T_p^{-n}\mathcal{A}T_p^n$  jest algebrą operatorów mnożenia przez ciągłe funkcje okresowe o okresie  $N^n$ . Zatem

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \dots \subset \mathcal{A}_n \subset \dots, \quad \mathcal{A}_n \cong C(S^1),$$

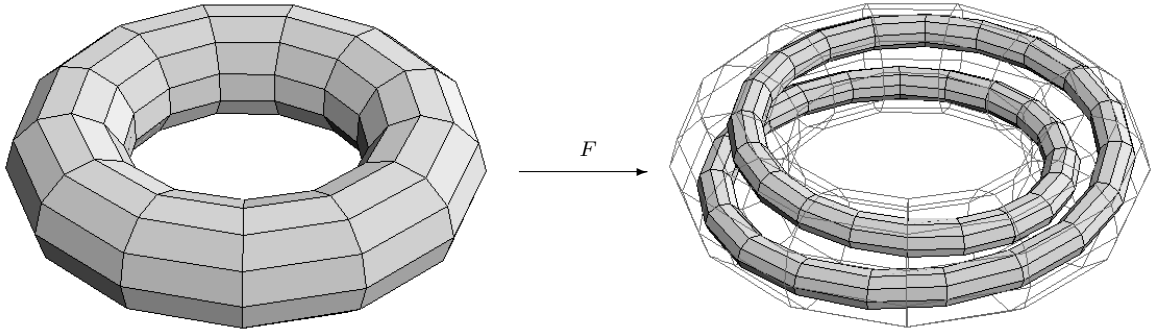
oraz

$$\mathcal{B} = \overline{\text{span}\left\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_p^{-n}\mathcal{A}T_p^n\right\}} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n}.$$

Można stąd wywnioskować, że algebra Banacha  $\mathcal{B}$  jest izomorficzna z granicą prostą ciągu prostego

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\delta} \mathcal{A} \xrightarrow{\delta} \mathcal{A} \xrightarrow{\delta} \dots,$$

gdzie  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  jest monomorfizmem  $\delta(a) = a \circ \alpha$ ,  $a \in \mathcal{A} = C(S^1)$ . Stąd natomiast, poprzez dualność, widmo  $\widetilde{X}$  algebry  $\mathcal{B}$  jest homeomorficzne z granicą odwrotną  $\varprojlim(S^1, \alpha)$  ciągu odwrotnego  $S^1 \xleftarrow{\alpha} S^1 \xleftarrow{\alpha} S^1 \xleftarrow{\alpha} \dots$  (co oczywiście wynika również z Twierdzenia 1.30 iv)).



Rysunek 3.1: Solenoid.

Przestrzeń topologiczna  $\varprojlim(S^1, \alpha)$ , a więc i przestrzeń ideałów maksymalnych  $\widetilde{X}$ , reprezentuje się geometrycznie jako  $N$ -adyczny solenoid, zwany też atraktorem Smale'a; jest to jeden z najbardziej znanych przykładów hiperbolicznego atraktora [BS03, 1.9], [Dev89, 2.5], [Nad92, 2.8]. Przypomnijmy pokrótce odpowiednią konstrukcję.

Niech  $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  będzie ciągłym, różnowartościowym odwzorowaniem bryły torusa  $\mathcal{T} = S^1 \times D^2$ ,  $D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ , rozciągającym  $\mathcal{T}$ ,  $N$ -krotnie w kierunku  $S^1$ , ściągającym  $\mathcal{T}$  ponad  $N$ -krotnie w kierunku  $D^2$  i zawijającym obraz  $F(\mathcal{T})$ ,  $N$ -krotnie wewnątrz  $\mathcal{T}$ :

$$F(z_1, z_2) = \left( z_1^N, \lambda z_2 + \frac{N-1}{N} z_1 \right), \quad (3.5)$$

gdzie  $0 < \lambda < \frac{1}{N}$ . Działanie  $F$  dla  $N = 2$  przedstawia Rysunek 3.1.  $N$ -adycznym solenoidem  $\mathcal{S}$  nazywamy atraktor odwzorowania  $F$ , czyli zbiór

$$\mathcal{S} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F^n(\mathcal{T}). \quad (3.6)$$

Lokalnie  $\mathcal{S}$  jest produktem kartezjańskim odcinka i zbioru Cantora, por. Przykład 4.11. Odwzorowanie  $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  jest homeomorfizmem i jeśli  $p : \mathcal{T} \rightarrow S^1$  jest rzutem na pierwszą współrzędną  $p(z_1, z_2) = z_1$ , to przyporządkowanie

$$\mathcal{S} \ni s \longmapsto (p(s), p(F^{-1}(s)), \dots, p(F^{-k}(s)), \dots) \in \prod_{k \in \mathbb{N}} S^1$$

ustala topologiczne sprzężenie między układami  $(\mathcal{S}, F)$  oraz  $(\varprojlim(S^1, \alpha), \tilde{\alpha})$ , por. [Dev89, 2.5], [BS03, 1.9].

**Twierdzenie 3.8.** *Algebrę  $\mathcal{B}$  możemy utożsamić z algebrą funkcji  $C(\mathcal{S})$  na  $N$ -adycznym solenoidzie  $\mathcal{S}$ . Wtedy automorfizm  $\delta : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ , gdzie  $\delta(\cdot) = T_p(\cdot)T_p^{-1}$ , staje się operatorem złożenia z homeomorfizmem  $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ .*

**Dowód.** Teza wynika ze Stwierzeń 3.7, 3.5, Twierdzenia 1.30 iv) oraz z [Dev89, 2.5, Tw. 5.6]. ■

Korzystając ze znanej klasyfikacji solenoidów [AF91] otrzymujemy następującą klasyfikację algebr powstałych przez rozszerzenie algebry  $\mathcal{A}$  za pomocą rozważanych operatorów  $T_p$ .

**Twierdzenie 3.9.** *Niech  $T_N, T_M, N, M > 0$  będą operatorami na  $E = L^p(\mathbb{R})$ ,  $p \in [1, \infty]$ , danymi wzorami*

$$(T_N f)(t) = N^{\frac{1}{p}} f(Nt), \quad (T_M f)(t) = M^{\frac{1}{p}} f(Mt)$$

*i niech  $\mathcal{A} \subset L(E)$  będzie algebrą operatorów mnożenia przez okresowe funkcje ciągłe o okresie 1. Algebry Banacha*

$$\mathcal{B}_N = \overline{\text{span}}\left\{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_N^{-n} \mathcal{A} T_N^n \right\}, \quad \mathcal{B}_M = \overline{\text{span}}\left\{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_M^{-n} \mathcal{A} T_M^n \right\}$$

*są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy w rozkładzie na czynniki pierwsze liczb  $N$  oraz  $M$  pojawiają się te same liczby pierwsze.*

**Dowód.** Zastosować Twierdzenie 3.8 oraz główny rezultat z [AF91]. ■

### 3.3 Ogólna konstrukcja konkretnych operatorów przesunięcia generujących jednowymiarowe układy dynamiczne

Do tej pory omówiliśmy dwa ważne przykłady konkretnych ważonych operatorów przesunięcia związanych z niedowracalnymi układami jednowymiarowymi:

- operatory generujące odwzorowania  $\alpha(z) = z^N$  okręgu  $S^1$ ,
- operatory generujące odwzorowania logistyczne, podrozdział 2.1.

W tym podrozdziale pokażemy, że powyższe operatory są szczególnymi przypadkami jednej ogólnej konstrukcji obejmującej wszystkie jednowymiarowe układy dynamiczne. Przy czym, przez *jednowymiarowy układ dynamiczny* będziemy rozumieć tu parę  $(X, \alpha)$ , gdzie  $X$  jest skończonym grafem skierowanym (ang. oriented 1-dimensional branched manifold), a  $\alpha : X \rightarrow X$  jest odwzorowaniem ciągłym i kawałkami monotonicznym, por. strona 59. Monotoniczność można tu rozumieć w sensie orientacji grafu  $X$  lub równoważnie w sensie topologicznym, patrz [Nad92, 8.21, 8.22].

Konstrukcja przebiegać będzie w dwu krokach. Najpierw zdefiniujemy operatory związane z dowolnym kawałkami ciągłym i kawałkami monotonicznym odwzorowaniem odcinka, a następnie do właśnie takich odwzorowań sprowadzimy ciągłe odwzorowania na grafie.

### 3.3.1 Operatory generujące odwzorowania na odcinku

Rozważmy kawałkami ciągłą i kawałkami monotoniczną funkcję  $\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ; nieciągłość dopuszczamy tu mając na celu późniejsze zastosowania w paragrafie 3.3.2. Niech  $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_n = 1$  będą takimi punktami, że moc przeciwoobrazu dowolnego punktu z przedziału  $(p_{i-1}, p_i)$  jest ustalona dla ustalonego przedziału  $(p_{i-1}, p_i)$  i wynosi, powiedzmy  $m_i$ . Dopuszczamy tu przypadek, gdy  $m_i = 0$  i w ogólności może się zdarzyć, że  $m_i = m_j$  dla  $i \neq j$ , przy czym pomijając ewentualnie pewne punkty  $p_i$  możemy wymagać, aby  $m_i \neq m_j$ , gdy  $|i - j| = 1$ . Innymi słowy, zakładamy, że dla każdego  $i = 1, \dots, n$  zachodzi

$$x \in (p_{i-1}, p_i) \implies |\alpha^{-1}(x)| = m_i \quad (3.7)$$

oraz przedział  $(p_{i-1}, p_i)$  jest maksymalny ze względu na własność (3.7). Wtedy dla każdego  $i = 1, \dots, n$ , istnieje dokładnie  $m_i$  rozłącznych, niepustych przedziałów  $\{I_j^{(i)}\}_{j=0}^{m_i-1}$  takich, że

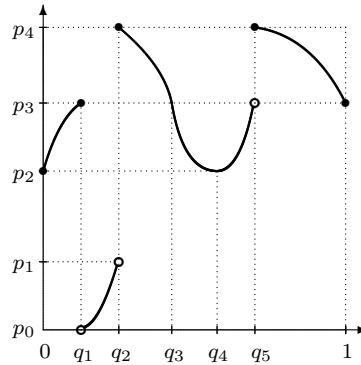
$$(p_{i-1}, p_i) \subset \alpha(I_j^{(i)}) \subset [p_{i-1}, p_i], \quad \alpha_{ij} := \alpha|_{I_j^{(i)}} \text{ jest 1-1} \quad \text{oraz} \quad \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{i=1}^{m_i} I_j^{(i)} = [0, 1].$$

Przyjmujemy, że dla ustalonego  $i = 1, \dots, n$ , odcinki  $I_0^{(i)}, I_1^{(i)}, \dots, I_{m_i-1}^{(i)}$  leżą na  $[0, 1]$  zgodnie z porządkiem. Wtedy jedyną swobodą w wyborze odcinków  $I_j^{(i)}$  leży w przynależności ich końców (i możemy je obrać dowolnie, gdyż nie będzie to miało znaczenia w dalszych rozważaniach). Aby oznaczyć końce odcinków, o których mowa ponumerujemy je zgodnie z porządkiem, to jest niech

$$q_0 = 0 < q_1 < \dots < q_m = 1, \quad \bigcup_{i=0}^m \{q_i\} = \alpha^{-1}(\{p_0, \dots, p_n\}),$$

gdzie  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ . Wprowadzone powyżej oznaczenia zobrazujemy na przykładzie.

**Przykład 3.10.** Dla odwzorowania  $\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  danego wykresem przedstawionym na Rysunku 3.2,  $n$  wynosi 4;  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 0$ ,  $m_3 = 3$ ,  $m_4 = 2$  oraz na przykład  $I_0^{(1)} = (q_1, q_2)$ ,  $I_0^{(3)} = [0, q_1]$ ,  $I_1^{(3)} = [q_3, q_4]$ ,  $I_2^{(3)} = [q_4, q_5]$ ,  $I_0^{(4)} = [q_2, q_3]$ ,  $I_1^{(4)} = [q_5, 1]$ . Jedyną dowolność w wyborze odcinków  $I_j^{(i)}$  leży tu w przynależności punktów  $q_3, q_4$ .



Rysunek 3.2: Kawalkami ciągle i kawalkami monotoniczne odwzorowanie odcinka.

Przez  $[0, 1]_q$  będziemy oznaczać odcinek z usuniętymi punktami  $q_i$

$$[0, 1]_q := [0, 1] \setminus \{q_0, q_1, \dots, q_m\} = \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{i=1}^{m_i} \text{Int}(I_j^{(i)}).$$

Przez  $\{t\} \in [0, 1)$  będziemy oznaczać *część ułamkową liczby*  $t \in \mathbb{R}$ . W szczególności,  $t - \{t\} = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$  jest tak zwaną funkcją *entier*.

**Stwierdzenie 3.11.** *Przy powyższych oznaczeniach wzór*

$$\gamma(t) = \alpha(\{t\}) + m_i \cdot (t - \{t\}) + j, \quad \text{gd}y \quad \{t\} \in I_j^{(i)}, \quad (3.8)$$

*definiuje odwzorowanie  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takie, że*

*i) dla każdego  $t \in \mathbb{R}$  zachodzi  $\{\gamma(t)\} = \alpha(\{t\})$ ,*

*ii) poza przeliczalną ilością punktów  $\gamma$  jest ciągle i różnowartościowe, a dokładniej funkcja*

$$\gamma : \{x \in \mathbb{R} : \{t\} \in [0, 1]_q\} \longrightarrow \{t \in \mathbb{R} : \{t\} \in \alpha([0, 1]_q)\}$$

*jest homeomorfizmem,*

*iii) odwzorowanie odwrotne do powyższej bijekcji można opisać wzorem*

$$\gamma^{-1}(t) = \alpha_{ij}^{-1}(\{t\}) + l,$$

*gdzie  $\{t\} \in (p_{i-1}, p_i)$ ,  $t - \{t\} = m_i \cdot l + j$  dla  $j = 0, \dots, m_i - 1$  oraz  $\alpha_{ij} = \alpha|_{I_j^{(i)}}$ .*

**Dowód.** Punkt i) wynika wprost z definicji  $\gamma$ . By dowieść ii) zauważmy, że ciągłość  $\gamma$  na wskazanym zbiorze wynika z ciągłości  $\alpha$  na odcinkach  $I_j^{(i)}$ . By wykazać różnowartościowość weźmy  $s, t \in \mathbb{R}$  takie, że  $\{s\}, \{t\} \in [0, 1]_q$  oraz załóżmy, że  $\gamma(s) = \gamma(t)$ . Wtedy

$$\alpha(\{t\}) + m_i \cdot (t - \{t\}) + j = \alpha(\{s\}) + m_k \cdot (s - \{s\}) + l$$

gdzie  $\{t\} \in I_j^{(i)}$  i  $\{s\} \in I_l^{(k)}$ . Zatem

$$\alpha(\{t\}) - \alpha(\{s\}) = m_k \cdot (s - \{s\}) - m_i \cdot (t - \{t\}) + l - j,$$

gdzie prawa strona równości jest liczbą całkowitą, natomiast lewa strona leży w przedziale  $(-1, 1)$ , gdyż  $\alpha(\{t\}), \alpha(\{s\}) \in \alpha([0, 1]_q) \subset (0, 1)$ . W konsekwencji  $\alpha(\{t\}) = \alpha(\{s\})$  oraz  $i = k$  (por. definicja przedziałów  $I_j^{(i)}$ ). Powyższa równość daje nam więc kolejną

$$m_i \cdot ((t - \{t\}) - (s - \{s\})) = l - j,$$

która z jednej strony dzieli się przez  $m_i$ , a z drugiej leży w przedziale  $[-m_i + 1, m_i - 1]$ , gdyż  $j, l = 0, \dots, m_i - 1$ . Stąd  $l = j$  i w konsekwencji  $s = t$ , gdyż odwzorowanie  $\alpha$  na odcinkach  $I_j^{(i)}$  jest różnowartościowe.

Suriektywność odwzorowania  $\gamma : \{t \in \mathbb{R} : \{t\} \in [0, 1]_q\} \longrightarrow \{t \in \mathbb{R} : \{t\} \in \alpha([0, 1]_q)\}$  pokażemy wykazując iii). Weźmy dowolny  $t$  taki, że  $\{t\} \in \alpha([0, 1]_q)$ . Wtedy istnieje  $i \in \{1, \dots, n\}$  takie, że  $\{t\} \in \alpha(I_j^{(i)})$  dla każdego  $j = 0, \dots, m_i - 1$ . Dzieląc  $t - \{t\}$  przez  $m_i$  otrzymujemy, iż

$$t - \{t\} = m_i \cdot l + j,$$

dla pewnego  $l \in \mathbb{Z}$  oraz  $j \in \{0, \dots, m_i - 1\}$ . Istnieje dokładnie jeden punkt  $q \in I_j^{(i)}$  taki, że  $\alpha(q) = \{t\}$ , słownie  $q = \alpha_{ij}^{-1}(\{t\})$ . Stąd widzimy, iż

$$\gamma(l + \alpha_{ij}^{-1}(\{t\})) = \alpha(\alpha_{ij}^{-1}(\{t\})) + m_i \cdot l + j = t,$$

skąd odczytujemy formułę na  $\gamma^{-1}$ . ■

Rozważany w powyższym stwierdzeniu zbiór, na którym odwzorowanie  $\gamma$  jest różnowartościowe oznaczmy przez  $D$ :

$$D := \{t \in \mathbb{R} : \{t\} \in [0, 1]_q\} = \mathbb{R} \setminus \{q_i + k : i = 0, \dots, m - 1, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Wtedy

$$\gamma(D) = \{t \in \mathbb{R} : \{t\} \in \alpha([0, 1]_q)\} = \gamma(\mathbb{R}) \setminus \{p_i + k : i = 0, \dots, n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Z punktu widzenia miary Lebesgue'a zbiory  $D$ ,  $\mathbb{R}$  oraz  $\gamma(D)$ ,  $\gamma(\mathbb{R})$  są równe (ich różnice symetryczne mają miarę zero). W szczególności, ze Stwierdzenia 3.11 ii) wynika, że operator  $T_p$  zdefiniowany w przestrzeni  $E = L^p(\mathbb{R})$ ,  $p \in [1, \infty]$ , formułą

$$(T_p f)(t) = |\gamma'(t)|^{\frac{1}{p}} f(\gamma(t)), \quad f \in E, \quad (3.9)$$

(na mocy kawałkami monotoniczności  $\alpha$  pochodna  $\gamma'(t)$  istnieje prawie wszędzie) jest częściową izometrią, a nawet ko-izometrią. Dokładniej,  $T_p$  jest częściową izometrią sprzężoną z izometrią

$$(S_p f)(t) = \begin{cases} |(\gamma^{-1})'(t)|^{\frac{1}{p}} f(\gamma^{-1}(t)), & t \in \gamma(D) \\ 0, & t \notin \gamma(D). \end{cases}$$

Jeśli  $\alpha$  jest suriekcją, to  $T_p = S_p^{-1}$  jest odwracalną izometrią. W przypadku, gdy  $\alpha$  jest odwzorowaniem ciągłym otrzymujemy

**Twierdzenie 3.12.** *Niech  $\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  będzie dowolnym kawałkami monotonicznym odwzorowaniem ciągłym. Niech  $\mathcal{A} \subset L(L^p(\mathbb{R}))$ ,  $p \in [1, \infty]$ , będzie algebrą operatorów mnożenia przez funkcje okresowe o okresie 1, ciągłe na odcinku  $[0, 1]$  i posiadające granicę lewostronną w 1. Niech operator  $T_p$  będzie dany wzorem (3.9), gdzie  $\gamma$  jest zadane formułą (3.8). Wtedy operator*

$$aT_p, \quad \text{dla } a \in \mathcal{A},$$

jest konkretnym operatorem ważonego przesunięcia związanym z układem  $([0, 1], \alpha)$ . Przy utożsamieniu  $\mathcal{A} = C([0, 1])$  otoczką ideału  $J = \{a \in \mathcal{A} : S_p T_p a = a\}$  jest najmniejszy (w sensie Stwierdzenia 1.26) z możliwych zbiorów:  $Y = \overline{[0, 1] \setminus \alpha([0, 1])}$ .

**Dowód.** Korzystając ze Stwierdzenia 3.11 nietrudno spostrzec, że warunki Definicji 3.1 spełnione są dla następujących obiektów:  $\gamma$  oraz  $D$  zdefiniowanych powyżej,  $\varphi(t) = \{t\}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , oraz  $\Omega_0 = [0, 1]$ . W szczególności

$$\varphi(\mathbb{R} \setminus \gamma(D)) = \varphi([0, 1] \setminus \gamma(D)) = [0, 1] \setminus \alpha([0, 1]_q)$$

i  $\text{ess } \varphi(\mathbb{R} \setminus \gamma(D)) = \overline{[0, 1] \setminus \alpha([0, 1])}$ . Zatem teza wynika ze Stwierdzenia 3.5.  $\blacksquare$

Wracając do ogólnego przypadku (tzn. gdy  $\alpha$  jest jedynie kawałkami ciągłe), niech  $\delta(\cdot) = T_p(\cdot)S_p$  oraz  $\delta_*(\cdot) = S_p(\cdot)T_p$  będą operatorami na  $L(E)$ , por. Stwierdzenie 1.14. Dla operatora  $a$  mnożenia przez funkcję  $a(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$  zachodzą relacje

$$\delta(a)(t) = a(\gamma(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.10)$$

$$\delta_*(a)(t) = \begin{cases} a(\gamma^{-1}(t)), & t \in \gamma(D), \\ 0, & t \notin \gamma(D). \end{cases} \quad (3.11)$$

W ważnym dla nas kontekście rozszerzeń algebr za pomocą odwzorowania  $\delta_*$  interesującym jest następujące

**Stwierdzenie 3.13.** *Niech  $M = NWW\{m_i \neq 0 : i = 1, \dots, n\}$  będzie najmniejsza wspólną wielokrotnością liczb  $m_i \neq 0$ , danych przez (3.7) i niech  $\mathcal{A}_{\text{per}(k)}$  będzie algebrą operatorów mnożenia przez okresowe funkcje z  $L^\infty(\mathbb{R})$  o okresie  $k \in \mathbb{N}$ . Wtedy*

$$\delta(\mathcal{A}_{\text{per}(1)}) \subset \mathcal{A}_{\text{per}(1)},$$

$$\delta_*(\mathcal{A}_{\text{per}(1)}) \subset \mathcal{A}_{\text{per}(k)} \iff M \text{ dzieli } k.$$



**Dowód.** Inkluzja  $\delta(\mathcal{A}_{per(1)}) \subset \mathcal{A}_{per(1)}$  wynika z (3.10) oraz ze Stwierdzenia 3.8 i). By dowieść inkluzji  $\delta_*(\mathcal{A}_{per(1)}) \subset \mathcal{A}_{per(M)}$ , w świetle (3.11), należy wykazać, że dla prawie wszystkich (ze względu na miarę Lebesgue'a) punktów  $t$  zachodzi albo

$$t, t + M \in \gamma(D) \quad \text{i} \quad \{\gamma^{-1}(t + M)\} = \{\gamma^{-1}(t)\},$$

albo oba punkty  $t$  i  $t + M$  nie leżą w  $\gamma(D)$ . Z konstrukcji odwzorowania  $\gamma$  wynika jednak, że jeśli  $\{t\} \neq p_i$ , dla  $i \in \{0, \dots, n\}$ , to  $t$  leży w  $\gamma(D)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $t + k \in \gamma(D)$  dla każdego  $k \in \mathbb{Z}$ . Wystarczy więc rozważyć przypadek, gdy  $t$  oraz  $t + M$  leżą w  $\gamma(D)$ , a wtedy równość  $\{\gamma^{-1}(t + M)\} = \{\gamma^{-1}(t)\}$  wynika z podpunktu iii) Stwierdzenia 3.8.

Niech teraz  $k$  będzie dowolną liczbą która nie dzieli się przez  $M$ . Wtedy dla pewnego  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $m_i$  nie dzieli  $k$  i by pokazać, że  $\delta_*(\mathcal{A}_{per(1)}) \not\subset \mathcal{A}_{per(k)}$  wystarczy wziąć dowolną funkcję z  $\mathcal{A}_{per(1)}$  przyjmującą różne wartości na różnych przedziałach  $I_j^{(i)}$ ,  $j = 0, \dots, m_i - 1$ . Rzeczywiście, połóżmy na przykład

$$a(t) := \{t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wtedy dla każdego  $t \in \mathbb{R}$  takiego, że  $\{t\} \in (p_{i-1}, p_i)$  reszty  $j$  i  $j'$  z dzielenia przez  $m_i$  odpowiednio liczb  $t - \{t\}$  oraz  $t - \{t\} + k$  są różne:  $j \neq j'$ . Zatem wartości

$$a(\gamma^{-1}(t)) = a(\alpha_{ij}^{-1}(t)) = \alpha_{ij}^{-1}(t) \in I_j^{(i)},$$

$$a(\gamma^{-1}(t + k)) = a(\alpha_{ij'}^{-1}(t)) = \alpha_{ij'}^{-1}(t) \in I_{j'}^{(i)}$$

są różne i w konsekwencji  $\delta_*(a) \notin \mathcal{A}_{per(k)}$ . ■

### 3.3.2 Operatory generujące odwzorowania na grafach

Ustalmy ciągłe, kawałkami monotoniczne odwzorowanie  $\alpha : X \rightarrow X$  na skończonym grafie skierowanym  $X$ ;  $X$  jest jednowymiarową przestrzenią topologiczną będącą skończoną sumą łuków (krawędzi), przecinających się ewentualnie w punktach końcowych (wierzchołkach). Na każdym takim łuku obieramy orientację i monotoniczność  $\alpha$  rozumiemy w sensie tej orientacji.

Aby uogólnić Twierdzenie 3.12 tak, by obejmowało układ  $(X, \alpha)$  zastosujemy konstrukcję z poprzedniego podrozdziału do układu  $([0, 1], \beta)$  powstałego z  $(X, \alpha)$  poprzez „ułożenie” krawędzi grafu na odcinku  $[0, 1]$ . W tym celu ponumerujemy (w dowolny sposób) krawędzie  $e_1, \dots, e_n$  grafu  $X$  i oznaczmy przez  $V \subset X$  zbiór jego wierzchołków. Niech  $\Psi : X \setminus V \rightarrow [0, 1]$  będzie odwzorowaniem przekształcającym krawędź  $e_i \setminus V$  (bez wierzchołków) zgodnie z orientacją na odcinek  $(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n})$ :

$$\Psi(e_i \setminus V) = \left( \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Dla każdego  $i = 1, \dots, n$  zbiór

$$\Psi(\alpha^{-1}(V) \cap e_i) = \{j_1^{(i)}, \dots, j_{m_i}^{(i)}\}$$

jest skończony. Odwzorowanie  $\beta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  poza zbiorem  $\bigcup_{i=1}^n \{\frac{i-1}{n}, j_1^{(i)}, \dots, j_{m_i}^{(i)}\}$  określmmy wzorem

$$\beta(x) = \Psi(\alpha(\Psi^{-1}(x))), \quad x \in \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right) \setminus \{j_1^{(i)}, \dots, j_{m_i}^{(i)}\}. \quad (3.12)$$

Następnie przedłużmy je na odcinek  $[0, 1]$  w taki sposób, żeby było prawostronnie ciągłe, a w jedyńce również lewostronnie ciągłe. Otrzymujemy wtedy kawałkami ciągłe oraz kawałkami monotoniczne odwzorowanie  $\beta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ .

Niech  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie odwzorowaniem zdefiniowanym w Stwierdzeniu 3.11 zastosowanym do odwzorowania  $\beta$  i niech  $T_p$ ,  $p \in [1, \infty]$ , będzie częściową izometrią daną wzorem (3.9). Rozważmy algebrę  $\mathcal{A} \subset L(L^p(\mathbb{R}))$  składającą się z operatorów mnożenia przez ograniczone funkcje  $a(t)$  spełniające relacje

$$a(t+1) = a(t), \quad a|_{\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)} \in C\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\text{koniec } e_i \text{ jest początkiem } e_j \implies \lim_{t \rightarrow \frac{i}{n}^-} a(t) = a\left(\frac{j-1}{n}\right), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Wtedy algebra  $\mathcal{A}$  jest izomorficzna z algebrą  $C(X)$ ; izomorfizm  $\pi : C(X) \rightarrow \mathcal{A}$  jest wyznaczony przez warunek

$$\pi(a)(t) = a(\Psi^{-1}(\{t\})), \quad \{t\} \in X \setminus V. \quad (3.13)$$

Mówiąc jeszcze inaczej dla odwzorowania  $\varphi(t) := \Psi^{-1}(\{t\})$  zdefiniowanego na prawie całej prostej  $\mathbb{R}$ , zbioru  $\Omega_0 = [0, 1]$  oraz odwzorowania  $\gamma$  spełnione są warunki Definicji 3.1.

**Twierdzenie 3.14.** *Przy powyższych oznaczeniach, dla każdego  $a \in \mathcal{A}$ , operator  $aT_p$  jest konkretnym ważonym operatorem przesunięcia na przestrzeni  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $p \in [1, \infty]$ , związanym z jednowymiarowym układem dynamicznym  $(X, \alpha)$ .*

*Ponadto otoczka ideału*

$$J = \{a \in C(X) : S_p T_p \pi(a) = \pi(a)\}$$

*jest najmniejszą z możliwych (por. Stwierdzenie 1.26), czyli*

$$\text{hull}(J) = \overline{X \setminus \alpha(X)}.$$

*W szczególności operator  $T_p$  jest (odwracalną) izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy  $\alpha$  jest surjekcją.*

**Dowód.** Jedynym co wymaga wyjaśnienia, por. Twierdzenie 3.12, jest postać otoczki ideału  $J$ . Wynika ona stąd, iż dla prawie wszystkich  $t \in \mathbb{R}$  zachodzą następujące równości

$$\begin{aligned} (S_p T_p)(t) &= \chi_{\gamma(\mathbb{R})}(t) = \chi_{\beta([0,1])}(\{t\}) = \chi_{\Psi(\alpha(X) \setminus V)}(\{t\}) \\ &= \chi_{\alpha(X) \setminus V}(\Psi^{-1}(\{t\})) = \chi_{\alpha(X)}(\Psi^{-1}(\{t\})), \end{aligned}$$

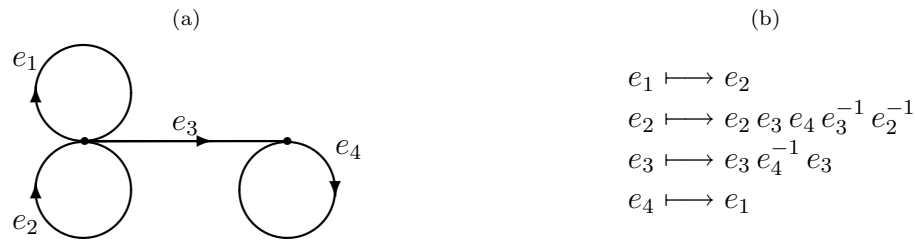
co w świetle postaci (3.13) reprezentacji  $\pi$  daje równość  $\text{hull}(J) = \overline{X \setminus \alpha(X)}$ .  $\blacksquare$

Układy jednowymiarowe  $(X, \alpha)$ , tj. odwzorowania na grafach, zwyczajowo opisuje się poprzez tzw. *reguły owijania* (ang. wrapping rules), patrz [Yi01], [Dev89], [Wil67]. Reguły te mówią, na które krawędzie, w jakiej kolejności i w jakim kierunku  $\alpha$  odwzorowuje daną krawędź. W poniższych przykładach będziemy używać zapisu multiplikatywnego.

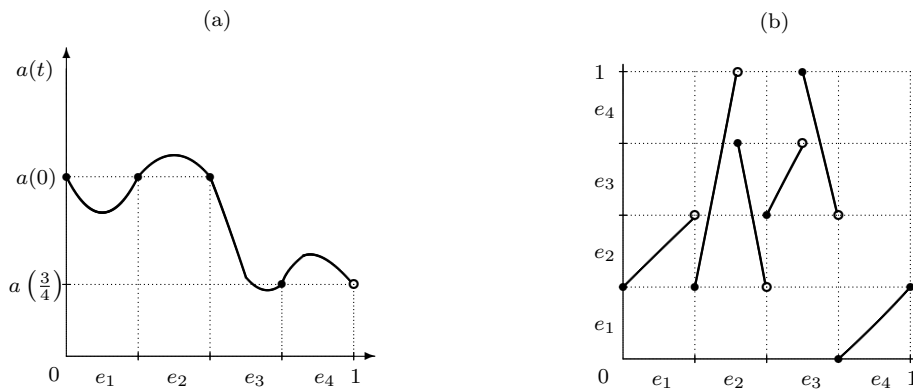
**Przykład 3.15 (Solenoidy).** W przypadku układu  $(S^1, \alpha)$ , gdzie  $\alpha(z) = z^N$ ,  $z \in S^1$ , traktując  $\alpha$  jako odwzorowanie grafu składającego się z jednego wierzchołka i jednej krawędzi  $e_1$ , można je opisać za pomocą reguły owijania  $e_1 \mapsto \underbrace{e_1 e_1 \dots e_1}_N$ . Wtedy algebra

$\mathcal{A}$  i operator  $T_p$ , o których mowa w Twierdzeniu 3.14 pokrywają się z identycznie oznaczonymi obiektami w Podrozdziale 3.2. W szczególności widmo algebry  $\mathcal{B} = \overline{\text{span}}\{\cup_{n \in \mathbb{N}} T_p^{-n} \mathcal{A} T_p^n\}$  jest  $N$ -adycznym solenoidem, patrz Twierdzenie 3.8.

**Przykład 3.16 (Atraktor Plykina).** Rozważmy graf  $X$  składający się z dwu wierzchołków i czterech krawędzi  $e_1, e_2, e_3, e_4$  przedstawiony na Rysunku 3.3 (a). Niech  $\alpha : X \rightarrow X$  będzie odwzorowaniem danym przez reguły owijania na Rysunku 3.3 (b).



Rysunek 3.3: Graf  $X$  związany z atraktorem Plykina (a); reguły nawijania zadające odwzorowanie  $\alpha : X \rightarrow X$  (b).

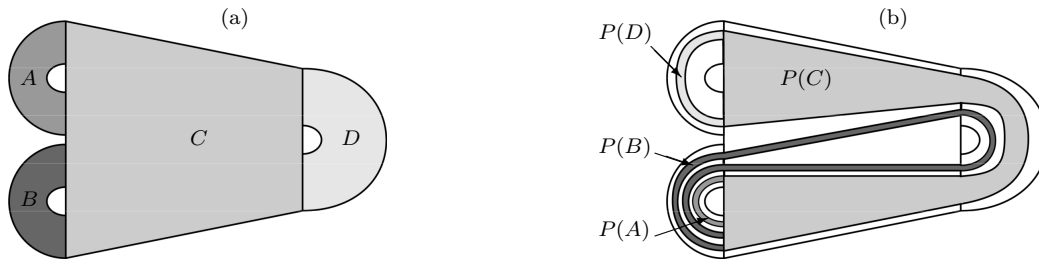


Rysunek 3.4: Wykres odwzorowania funkcji  $a(t)$  na  $[0, 1)$  dla  $a \in \mathcal{A}$  (a); Wykres odwzorowania  $\beta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  (b).

Niech algebra  $\mathcal{A} \subset L(L^p(\mathbb{R}))$ ,  $p \in [1, \infty]$ , składa się z operatorów  $a$  mnożenia przez ograniczone funkcje  $a(t)$  okresowe o okresie jeden, ciągłe na przedziale  $[0, 1)$  i spełniające relacje

$$a(0) = a\left(\frac{1}{4}\right) = a\left(\frac{1}{2}\right), \quad a\left(\frac{3}{4}\right) = \lim_{t \rightarrow 1^-} a(t),$$

patrz Rysunek 3.4 (a), gdzie dla pogładowości odcinki  $(\frac{i-1}{4}, \frac{i}{4})$  zostały ponumerowane odpowiadającymi im krawędziami  $e_i$  grafu  $X$ . Algebra  $\mathcal{A}$  jest izomorficzna z  $C(X)$ . Niech  $\beta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  będzie prawostronnie ciągłym odwzorowaniem o wykresie danym na Rysunku (3.4) (b); odwzorowanie  $\beta$  spełnia (3.12). Niech  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie odwzorowaniem powstałym z  $\beta$  w sposób opisany w Stwierdzeniu 3.11. Wtedy operator  $(T_p f)(t) = |\gamma'(t)|^{\frac{1}{p}} f(\gamma(t))$  jest na  $L^p(\mathbb{R})$  odwracalną izometrią i  $\delta(\cdot) = T_p(\cdot)T_p^{-1}$  jest endomorfizmem  $\mathcal{A}$ , który przy utożsamieniu  $\mathcal{A}$  z  $C(X)$  jest operatorem kompozycji z odwzorowaniem  $\alpha$ . Ponadto, widmo  $\tilde{X}$  algebry  $\mathcal{B} = \overline{\text{span}}\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_p^{-n} \mathcal{A} T_p^n\}$  jest homeomorficzne z atraktorem Plykina.



Rysunek 3.5: Atraktor Plykina.

Dokładniej, *atraktor Plykina* jest zbiorem postaci  $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} P^n(R)$ , gdzie  $R = A \cup B \cup C \cup D$  jest obszarem przedstawionym na Rysunku 3.5 (a), a  $P : R \rightarrow R$  jest odwzorowaniem, działanie którego obrazuje Rysunek 3.5 (b). Układ  $(\Lambda, P)$  jest topologicznie sprzężony z granicą odwrotną oraz homeomorfizmem indukowanym przez odwzorowanie  $\alpha$ , patrz [Dev89, 2.5]. Zatem

*algebrę  $\mathcal{B}$  można utożsamić z algebrą funkcji  $C(\Lambda)$  na atraktorze Plykina  $\Lambda$ . Wtedy automorfizm  $\delta : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ , gdzie  $\delta(\cdot) = T_p(\cdot)T_p^{-1}$ , staje się operatorem złożenia z homeomorfizmem  $P : \Lambda \rightarrow \Lambda$ .*

**Przykład 3.17 (Kafelkowania Fibonacciego).** Niech  $(X, \alpha)$  będzie jednowymiarowym układem dynamicznym, gdzie  $X$  jest grafem składającym się z trzech wierzchołków i czterech krawędzi  $e_1, e_2, e_3, e_4$ , patrz Rysunek 3.6 (a), a  $\alpha$  jest dane przez reguły owijania na Rysunku 3.6 (b).



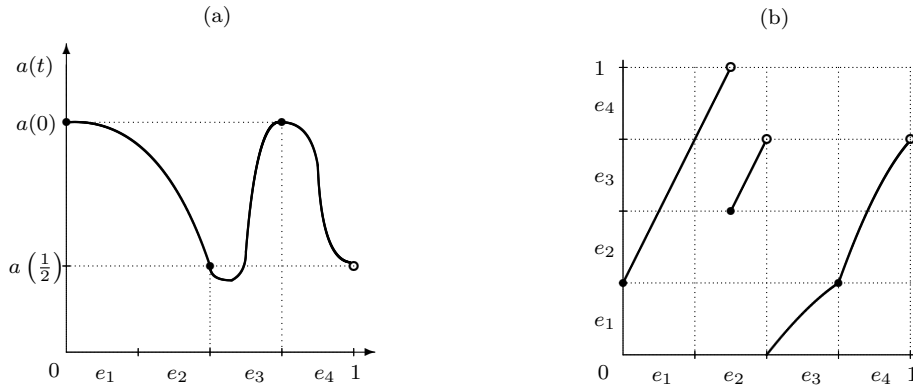
Rysunek 3.6: Graf  $X$  związany z kafelkowaniem Fibonacciego (a); reguły owijania odwzorowania  $\alpha : X \rightarrow X$  (b).

Niech algebra  $\mathcal{A} \subset L(L^p(\mathbb{R}))$ ,  $p \in [1, \infty]$ , składa się z operatorów mnożenia przez ograniczone funkcje  $a(t)$  okresowe o okresie jeden, ciągle na przedziale  $[0, 1)$  i spełniające

relacje

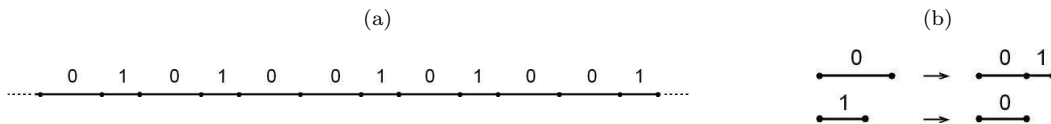
$$a(0) = a\left(\frac{3}{4}\right), \quad a\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{t \rightarrow 1^-} a(t),$$

patrz Rysunek 3.7 (a). Wtedy  $\mathcal{A} \cong C(X)$ .



Rysunek 3.7: Wykres odwzorowania funkcji  $a(t)$  na  $[0, 1)$  dla  $a \in \mathcal{A}$  (a); Wykres odwzorowania  $\beta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  (b).

Wykres odwzorowania  $\beta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  spełniającego (3.12) jest przedstawiony na Rysunku 3.7 (b). Jeśli  $\gamma$  jest odwzorowaniem danym wzorem (3.8), gdzie w miejsce  $\alpha$  stoi  $\beta$ , to operator  $(T_p f)(t) = |\gamma'(t)|^{\frac{1}{p}} f(\gamma(t))$  jest na  $L^p(\mathbb{R})$  odwracalną izometrią generującą na widmie algebry  $\mathcal{A}$  układ  $(X, \alpha)$ . Natomiast na widmie algebry  $\mathcal{B} = \overline{\text{span}}\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_p^{-n} \mathcal{A} T_p^n\}$  operator  $T_p$  generuje układ  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$ , który jest topologicznie sprzężony z układem kafelkowań Fibonacciego.



Rysunek 3.8: Typowe kafelkowanie Fibonacciego (a); reguła podstawiania dla kafelkowań Fibonacciego (b).

*Kafelkowania Fibonacciego* prostej rzeczywistej powstają z kopii dwu kafelków: zerem oznaczamy kafelek o długości będącej złotą liczbą  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ; jedynek oznaczamy kafelek o długości 1, patrz Rysunek 3.8 (a). Reguła podstawiania:  $0 \rightarrow 01, 1 \rightarrow 0$ , dla tychże kafelkowań zadana jest przez złoty podziałem, patrz Rysunek 3.8 (b), i generuje ona homeomorfizm na przestrzeni wszystkich kafelkowań Fibonacciego wyposażonej w pewną naturalną topologię, patrz [AP98]. Andersona i Putnama [AP98] pokazali, że otrzymany w ten sposób układ jest topologicznie sprzężony z układem  $(\varprojlim (X, \alpha), \tilde{\alpha})$ . Zatem mówiąc obrazowo, Stwierdzenie 3.5 i Twierdzenie 3.14 implikują, iż

*idealom maksymalnym algebry  $\mathcal{B}$  odpowiadają kafelkowania Fibonacciego i przy tej odpowiedniości operator  $T_p$  generuje na widmie  $\mathcal{B}$  homeomorfizm  $\tilde{\alpha}$  dany przez regułę podstawiania  $0 \rightarrow 01, 1 \rightarrow 0$ .*

### 3.4 Symboliczne układy dynamiczne

W tym podrozdziale omówimy naturalne rozszerzenia nieodwracalnych symbolicznych układów dynamicznych zwanych *przesunięciami skończonego typu* (ang. shift of finite type) lub też *topologicznymi przesunięciami Markowa* [BS03]. Takie układy zadane są przez graf skierowany, lub równoważnie przez macierz incydencji takiego grafu.

Niech  $A = (A(i, j))_{i, j \in \{1, \dots, N\}}$  będzie macierzą kwadratową o wyrazach w zbiorze  $\{0, 1\}$ . Macierz  $A$  będziemy nazywać *macierzą incydencji*. Definiuje ona graf skierowany  $G_A$  o wierzchołkach  $\{1, \dots, N\}$  i krawędziach danych relacją:

$$\text{wierzchołek } i \text{ wysyła krawędź do wierzchołka } j \iff A(i, j) = 1.$$

Jako stałe założenie przyjmujemy, iż  $A$  nie posiada wierszy zerowych (równoważnie każdy wierzchołek grafu  $G_A$  wysyła co najmniej jedną krawędź). Z macierzą  $A$  (czy też grafem  $G_A$ ) wiąże się następujące dwie zwarte przestrzenie topologiczne

$$\Sigma_A = \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}} : A(x_k, x_{k+1}) = 1, k \in \mathbb{N}\},$$

$$\bar{\Sigma}_A = \{(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}} : A(x_k, x_{k+1}) = 1, k \in \mathbb{Z}\}$$

wyposażone w topologię produktową, gdzie  $\{1, \dots, N\}$  traktujemy jako przestrzeń dyskretną. *Jednostronne przesunięcie Markowa*  $\sigma_A$  definiuje się na przestrzeni  $\Sigma_A$ , a *dwustronne przesunięcie Markowa*  $\bar{\sigma}_A$  na  $\bar{\Sigma}_A$ ; oba odwzorowania przesuują dany ciąg w prawo

$$\begin{aligned} (\sigma_A x)_k &= x_{k+1}, & \text{dla } k \in \mathbb{N} \text{ i } x \in \Sigma_A, \\ (\bar{\sigma}_A x)_k &= x_{k+1}, & \text{dla } k \in \mathbb{Z} \text{ i } x \in \bar{\Sigma}_A. \end{aligned}$$

Jasnym jest, iż  $\bar{\sigma}_A$  jest homeomorfizmem. Natomiast  $\sigma_A$  jest iniekcją wtedy i tylko wtedy, gdy  $A$  jest macierzą permutacji. Co więcej,  $\sigma_A$  jest suriekcją wtedy i tylko wtedy, gdy  $A$  nie posiada kolumn zerowych, a dokładniej obraz  $\sigma_A$  jest zbiorem domknięto-otwartym danym wzorem

$$\sigma_A(\Sigma_A) = \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \Sigma_A : \sum_{i=1}^N A(i, x_0) > 0\}.$$

Opiszemy naturalne rozszerzenie układu  $(\Sigma_A, \sigma_A)$  związane z (najmniejszym możliwym) zbiorem  $Y = \Sigma_A \setminus \sigma_A(\Sigma_A)$ , patrz Definicja 1.32. Zaczniemy od przypadku, gdy  $\sigma_A$  jest suriekcją.

**Stwierdzenie 3.18.** *Jeśli macierz incydencji  $A$  nie posiada zerowych kolumn, to naturalne rozszerzenie jednostronnego przesunięcia Markowa  $(\Sigma_A, \sigma_A)$  związane ze zbiorem  $Y = \emptyset$  jest topologicznie sprzężone z dwustronnym przesunięciem Markowa  $(\bar{\Sigma}_A, \bar{\sigma}_A)$ .*

**Dowód.** Niech  $(\tilde{X}_A, \tilde{\sigma}_A)$  będzie naturalnym rozszerzeniem  $(\Sigma_A, \sigma_A)$  związanym z  $Y = \emptyset$  i niech  $\tilde{x} \in \tilde{X}_A$ . Wtedy  $\tilde{x} = (x_0, x_1, \dots)$  gdzie  $x_n = (x_{n,k})_{k \in \mathbb{N}} \in X_A$  oraz  $\sigma_A^m(x_{n+m}) = x_n$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ . Stąd dla  $l, n, m \in \mathbb{N}$  mamy  $x_{n+l, m+l} = x_{n, m}$ . Ciąg  $\bar{x} = (\bar{x}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ , gdzie

$$\bar{x}_k := x_{n, m}, \quad k = m - n \in \mathbb{Z}$$

jest elementem przestrzeni  $\bar{\Sigma}_A$  i w szczególności wzór

$$\Upsilon(\tilde{x}) = (\dots, x_{n,0}, \dots, x_{1,0}, \dot{x}_{0,0}, x_{0,1}, \dots, x_{0,n}, \dots), \quad (3.14)$$

gdzie kropka nad  $x_{0,0}$  oznacza zerową współrzędną, definiuje odwzorowanie  $\Upsilon : \widetilde{X}_A \rightarrow \bar{X}_A$ . Odwzorowanie to jest bijekcją, a odwzorowanie do niego odwrotne przyjmuje postać

$$\Upsilon^{-1}((\bar{x}_k)_{k \in \mathbb{Z}}) = (x_0, x_1, \dots), \quad \text{gdzie} \quad x_n := (\bar{x}_{-n}, \bar{x}_{-n+1}, \dots) \in \Sigma_A, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ciągłość  $\Upsilon$  sprawdza się bezpośrednio (czyli  $\Upsilon$  jest homeomorfizmem). W końcu przypomnijmy, że dla  $\tilde{x} \in \widetilde{X}_A$  mamy  $\tilde{\sigma}_A(\tilde{x}) = (\sigma_A(x_0), x_0, \dots)$ , a przy wyżej wprowadzonych oznaczeniach  $\sigma_A(x_0) = (x_{0,1}, x_{0,2}, \dots)$ . Stąd

$$\Upsilon(\tilde{\sigma}_A(\tilde{x})) = (\dots, x_{n,0}, \dots, x_{1,0}, x_{0,0}, \dot{x}_{0,1}, \dots, x_{0,n}, \dots) = \bar{\sigma}_A(\Upsilon(\tilde{x})),$$

co oznacza, że  $\Upsilon$  sprzęga układy  $(\widetilde{X}_A, \tilde{\sigma}_A)$  i  $(\bar{\sigma}_A, \bar{X}_A)$ . ■

Jeśli  $A$  posiada choćby jedną kolumnę zerową, to naturalne rozszerzenie układu  $(X_A, \sigma_A)$  nie jest topologicznie sprzężone z  $(\bar{X}_A, \bar{\sigma}_A)$ . Jednakże możemy otrzymać ogólny rezultat zwiększając wyjściowy alfabet  $\{1, \dots, N\}$  oraz macierz incydencji  $A$ .

**Stwierdzenie 3.19.** *Niech  $A = (A(i, j))_{i, j \in \{1, \dots, N\}}$  będzie macierzą incydencji. Zdefiniujmy większą macierz incydencji  $B = (B(i, j))_{i, j \in \{0, 1, \dots, N\}}$ , patrz Rysunek 3.9, wzorem*

$$B(i, j) = \begin{cases} A(i, j), & \text{jeśli } i, j \in \{1, \dots, N\}, \\ 1, & \text{jeśli } i = 0 \text{ oraz } j = 0, \text{ lub } j\text{-ta kolumna } A \text{ jest zerowa,} \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Wtedy domknięto-otwarty zbiór  $\bar{\Sigma}_B^+ = \{(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \bar{\Sigma}_B : x_0 \neq 0\}$  jest niezmienniczy ze względu na  $\bar{\sigma}_B$  i naturalne rozszerzenie  $(\Sigma_A, \sigma_A)$  związane z  $Y = \Sigma_A \setminus \sigma_A(\Sigma_A)$  jest topologicznie sprzężone z układem  $(\bar{\Sigma}_B^+, \bar{\sigma}_B)$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{1N} \\ 0 & a_{21} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{N1} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{NN} \\ 1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Rysunek 3.9: Macierze incydencji  $A$  i  $B$ .

**Dowód.** Potraktujmy przestrzeń  $\bar{X}_A$  jako (domknięty) podzbiór  $\{0, 1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$  i przypomnijmy, że  $\widetilde{X}_A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_{A,n} \cup X_{A,\infty}$ . Argument z dowodu Stwierdzenia 3.18 pokazuje, że wzór (3.14) zadaje homeomorfizm  $\Upsilon : X_{A,\infty} \rightarrow \bar{X}_A$ . Przedłużmy, go na zbiory  $X_{A,n}$  wzorem

$$\Upsilon(\tilde{x}) = (\dots, 0, 0, x_{n,0}, \dots, x_{1,0}, \dot{x}_{0,0}, x_{0,1}, \dots, x_{0,n}, \dots)$$

gdzie  $\tilde{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n, 0, \dots) \in X_{A,n}$   $x_m = (x_{m,k})_{k \in \mathbb{N}} \in X_A$ ,  $m = 0, \dots, n-1$ , oraz  $x_{n-1} \in Y = \Sigma_A \setminus \sigma_A(\Sigma_A)$ , co oznacza, że  $\sum_{i=1}^N A(i, x_n) = 0$ . Podobnie jak w dowodzie Stwierdzenia 3.18 sprawdza się, że odwzorowanie  $\Upsilon : \widetilde{X}_A \rightarrow \{0, 1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$  jest ciągłą iniekcją oraz zachodzi równość  $\Upsilon(\tilde{\sigma}_A(\tilde{x})) = \bar{\sigma}_B(\Upsilon(\tilde{x}))$ ,  $\tilde{x} \in \widetilde{X}_A$ . Ponadto z definicji  $B$  wynika, że  $\Upsilon$  odwzorowuje  $X_{A,n}$  na zbiór

$$\begin{aligned} \{(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \{0, 1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}} : x_k = 0, k < -n; \sum_{i=1}^N A(i, x_n) = 0; A(x_k, x_{k+1}) = 1, k > -n\} \\ = \{(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \bar{\Sigma}_B : x_{-(n+1)} = 0\}, \end{aligned}$$

zatem  $\Upsilon(\widetilde{X}_A) = \Upsilon(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_{A,n} \cup X_{A,\infty}) = \{(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \bar{\Sigma}_B : x_0 \neq 0\} = \bar{\Sigma}_B^+$ . ■

**Przykład 3.20.** Niech  $T_{\mathbb{N}}, S_{\mathbb{N}}$  będą operatorami przesunięcia działającymi na przestrzeni  $E = \ell^p(\mathbb{N})$ ,  $p \in [1, \infty]$ , patrz Przykład 1.13, i niech  $\mathcal{A} \subset L(E)$  będzie algebrą operatorów mnożenia przez ciągi postaci  $a = (a(0), a(1), a(1), a(1), \dots)$ ,  $a(0), a(1) \in \mathbb{C}$ . Wtedy dla  $a \in \mathcal{A}$  mamy

$$T_{\mathbb{N}}aS_{\mathbb{N}} = (a(1), a(1), a(1), \dots) \in \mathcal{A}, \quad S_{\mathbb{N}}aT_{\mathbb{N}} = (0, a(0), a(1), a(1), \dots).$$

Zatem operator  $T_{\mathbb{N}}$  generuje na dwuelementowym widmie  $X = \{x_0, x_1\}$  algebry  $\mathcal{A}$  odwzorowanie stałe:  $\alpha(\{x_0, x_1\}) = \{x_1\}$ . Zaś na widmie algebry  $\mathcal{B} = \overline{\text{span}}\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_{\mathbb{N}}^n \mathcal{A} T_{\mathbb{N}}^n\}$  operator  $T_{\mathbb{N}}$  generuje układ dynamiczny  $(\widetilde{X}, \tilde{\alpha})$  będący naturalnym rozszerzeniem  $(X, \alpha)$  związanym z  $Y = X \setminus \alpha(X) = \{x_0\}$ . Układ  $(X, \alpha)$  można utożsamić z jednostronnym przesunięciem Markowa  $(\Sigma_A, \sigma_A)$  danym przez macierz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , lub



Rysunek 3.10: Grafy skierowane zadające przesunięcia Markowa z Przykładu 3.20.

równoważnie przez graf  $G_A$  przedstawiony na Rysunku 3.10 (a). Zatem układ  $(\widetilde{X}, \tilde{\alpha})$  można utożsamić z układem  $(\bar{\Sigma}_B^+, \bar{\sigma}_B)$  opisanym w Stwierdzeniu 3.19. Nietrudno odczytać z grafu  $G_B$ , patrz Rysunek 3.10 (b), odpowiadającą macierz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

że przestrzeń  $\bar{\Sigma}_B^+$  składa się z następujących elementów

$$\tilde{x}_\infty = (\dots, 1, \dot{1}, 1, 1, \dots), \quad \tilde{x}_n = (\dots, 1, \underbrace{\dot{1}, 1, \dots, 1}_n, 2, 0, 0, 0, \dots), \quad n \in \mathbb{N},$$

gdzie kropka nad liczbą wskazuje współrzędną zerową. Stąd naturalne rozszerzenie układu  $(\Sigma_A, \sigma_A) = (X, \alpha)$  możemy utożsamić z parą  $(\widetilde{X}, \tilde{\alpha})$ , gdzie  $\widetilde{X} = \bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$



jest jednopunktowym uzwarceniem przestrzeni dyskretnej  $\mathbb{N}$ , a odwzorowanie  $\tilde{\alpha}$  jest dane wzorem

$$\tilde{\alpha}(n) = n + 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \tilde{\alpha}(\infty) = \infty.$$

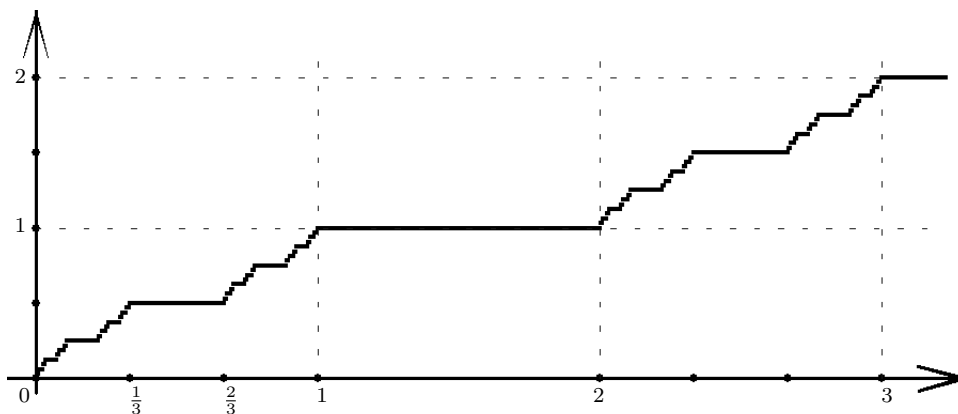
Powyższy opis można otrzymać bezpośrednio, gdyż nietrudno spostrzec, że algebra  $\mathcal{B}$  składa się operatorów mnożenia przez ciągi zbieżne, czyli  $\mathcal{B} \cong C(\overline{\mathbb{N}})$ .

### 3.4.1 Operatory generujące pełne przesunięcia Markowa. Podkowy Smale'a

Teraz przedstawimy operatory generujące szczególnie ważny przypadek wyżej omówionych, symbolicznych układów dynamicznych, zadanych przez macierz  $A$ , której wszystkie wyrazy są równe 1 (równoważnie graf  $G_A$  jest pełny). Przesunięcia Markowa  $(\Sigma_A, \sigma_A)$  i  $(\overline{X}_A, \overline{\sigma}_A)$  odpowiadające takim macierzom będziemy nazywać *pełnymi przesunięciami Markowa* i korzystając z faktu, iż układy te są jednoznacznie wyznaczone przez wymiar  $N$  macierzy  $A$ , jednostronne przesunięcia pełne będziemy oznaczać przez  $(\Sigma_N, \sigma_N)$ , a dwustronne przez  $(\overline{\Sigma}_N, \overline{\sigma}_N)$ .

Ustalmy  $N = 2, 3, \dots$ . Reprezentację algebry  $C(\Sigma_N)$  zdefiniujemy na przestrzeni Banacha  $L^p_\eta(\mathbb{R}_+)$ , gdzie  $p \in [1, \infty]$ , a miara  $\eta$  jest osobliwa (ze względu na miarę Lebesgue'a). Miarę  $\eta$  zdefiniujemy za pomocą dystrybuanty  $F$  będącej przedłużeniem odwzorowania, którego wykres zwany jest diabelskimi schodami Cantora, patrz Rysunek 3.11.

W tym celu rozpatrzmy podzbiór  $\Omega_N \subset \mathbb{R}_+$  wszystkich liczb, których rozwinięcie o



Rysunek 3.11: Wykres dystrybuanty miary  $\eta$  dla  $N = 2$  – diabelskie schody Cantora przedłużone na półprostą  $\mathbb{R}_+$ .

podstawie  $2N - 1$  składa wyłącznie z liczb parzystych:

$$\Omega_N = \left\{ \sum_{k=-\infty}^n a_k (2N - 1)^k : a_k \in \{0, 2, \dots, 2N - 2\}, k \leq n, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zdefiniujemy odwzorowanie  $F$  na zbiorze  $\Omega_N$  wzorem

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^n \frac{a_k}{2} N^k, \quad t = \sum_{k=-\infty}^n a_k (2N - 1)^k \in \Omega_N$$

i przedłużmy je na  $\mathbb{R}_+$  wzorem:  $F(t) = F(\max\{t' \in \Omega_N : t' \leq t\})$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . Jako niemalejąca i prawostronnie ciągła, funkcja  $F$  jest dystrybuantą  $\sigma$ -skończonej miary  $\eta$  na  $\mathbb{R}_+$ :

$$\eta([0, t]) = F(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Nośnikiem miary  $\eta$  jest zbiór  $\Omega_N$ . Odwzorowanie  $\gamma(t) := (2N - 1)t$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  zachowuje zbiór  $\Omega_N$ ,  $\gamma : \Omega_N \rightarrow \Omega_N$  jest homeomorfizmem i dla każdego  $t \in \Omega_N$  zachodzi równość

$$F((2N - 1)t) = NF(t).$$

Rozważmy przestrzeń  $E = L^p_\eta(\mathbb{R}_+)$ ,  $p \in [1, \infty]$ . Z powyższych uwag wynika, że operator

$$(T_p f)(t) = N^{\frac{1}{p}} f((2N - 1)t), \quad f \in L^p_\eta(\mathbb{R}_+),$$

jest poprawnie określona, odwracalna izometria. Niech  $\mathcal{A} \subset L(E)$  będzie algebrą składającą się z operatorów mnożenia przez funkcje  $a(t)$  okresowe o okresie 2, ciągłe na odcinku  $[0, 1]$ :

$$a(t + 2) = a(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad a|_{[0,1]} \in C([0, 1]). \quad (3.15)$$

Postać miary  $\eta$  implikuje, iż  $\mathcal{A} \cong C(\Sigma_N)$  (równoważnie algebrę  $\mathcal{A}$  można także zadać np. za pomocą relacji (2.1)).

**Twierdzenie 3.21.** *Przy powyższych oznaczeniach*

- i) dla każdego  $a \in \mathcal{A}$ , operator  $aT_p$  jest konkretnym ważonym operatorem przesunięcia na przestrzeni  $L^p_\eta(\mathbb{R}_+)$ ,  $p \in [1, \infty]$ , związanym z jednostronnym pełnym przesunięciem Markowa  $(\Sigma_N, \sigma_N)$ ;
- ii) algebra  $\mathcal{B} = \overline{\text{span}} \left\{ \bigcup_{n=0}^{\infty} S_p^n \mathcal{A} T_p^n \right\}$  jest izomorficzna z algebrą funkcji ciągłych na przestrzeni  $\overline{\Sigma}_N$  i przy utożsamieniu  $\mathcal{B} = C(\overline{\Sigma}_N)$  operator  $T_p$  generuje na widmie  $\mathcal{B}$  dwustronne przesunięcie Markowa  $(\overline{\Sigma}_N, \overline{\sigma}_N)$ .

**Dowód.** Niech  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \Sigma_N$  będzie dowolnym borelowskim odwzorowaniem takim, że dla  $t = \sum_{k=-\infty}^n a_k (2N - 1)^k \in \Omega_N$  mamy

$$\varphi(t) = \left( \frac{a_{-1}}{2} + 1, \frac{a_{-2}}{2} + 1, \frac{a_{-3}}{2} + 1, \dots \right) \in \Sigma_N.$$

Wtedy  $\varphi : [0, 1] \cap \Omega_N \rightarrow \Sigma_N$  jest homeomorfizmem, miara  $\eta \circ \varphi|_{[0,1] \cap \Omega_N}$  jest probabilistyczną miarą produktową na  $\Sigma_N$  i w szczególności spełniony jest warunek 1) Definicji 3.1. Sprawdzenie pozostałych warunków Definicji 3.1 nie nastęrcza trudności (przy-  
pomnijmy iż  $\gamma(t) = (2N - 1)t$ ). Zatem, jako że wzór  $\pi(a)(t) := a(\varphi(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  zadaje izometryczną reprezentację  $\pi : C(\Sigma_N) \rightarrow L(E)$  taką, że  $\mathcal{A} = \pi(C(\Sigma_N))$ , otrzymujemy tezę i).

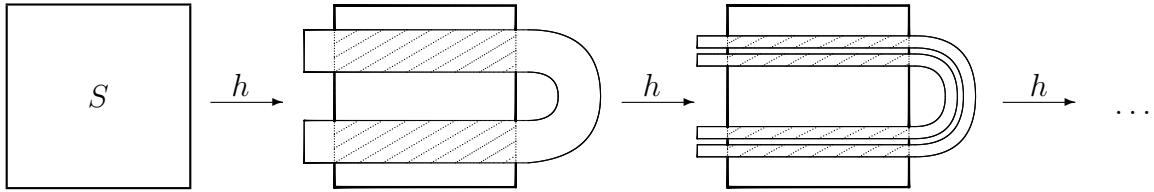
Teza ii) wynika z i) oraz ze Stwierzeń 3.5, 3.18. ■

Topologiczne, dwustronne przesunięcia Markowa reprezentują się jako atraktory zwane podkowami Smale'a [Szl82], [BS03], [Dev89]. Umożliwia to geometryczną interpretację przestrzeni ideałów maksymalnych algebry rozszerzonej  $\mathcal{B}$ .

**Przykład 3.22 (Podkowa Smale’a).** Rozpatrzmy przypadek, gdy  $N = 2$ , to jest niech  $\eta$  będzie miarą o dystrybucji przedstawionej na Rysunku 3.11 i niech operator  $T_p \in L(L_\eta^p(\mathbb{R}_+))$  będzie dany wzorem

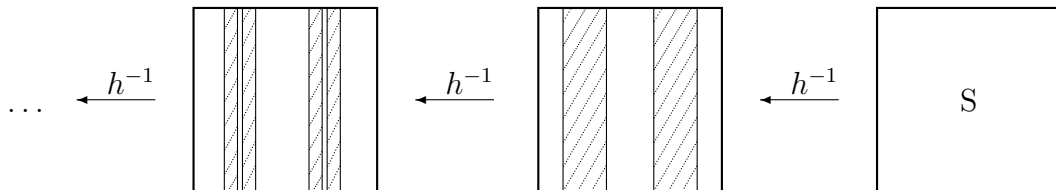
$$(T_p f)(t) = 2^{\frac{1}{p}} f(3t), \quad f \in L_\eta^p(\mathbb{R}_+).$$

Operator  $T_p$  generuje na widmie algebry  $\mathcal{A}$  składającej się z operatorów mnożenia przez ograniczone funkcje spełniające (3.15), układ topologicznie sprzężony z jednostronnym przesunięciem Markowa  $(\Sigma_2, \sigma_2)$ . Zaś na widmie algebry rozszerzonej  $\mathcal{B} = \overline{\text{span}}\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T_p^{-n} \mathcal{A} T_p^n\}, T_p$  generuje układ topologicznie sprzężony z shiftem dwustronnym  $(\overline{\Sigma}_2, \overline{\sigma}_2)$ . Geometrycznej reprezentacji tego układu (jako atraktora) dostarcza klasyczna *podkowa Smale’a*. Przypomnijmy pokrótce konstrukcję tego układu dynamicznego.



Rysunek 3.12: Iteracje odwzorowania podkowy Smale’a.

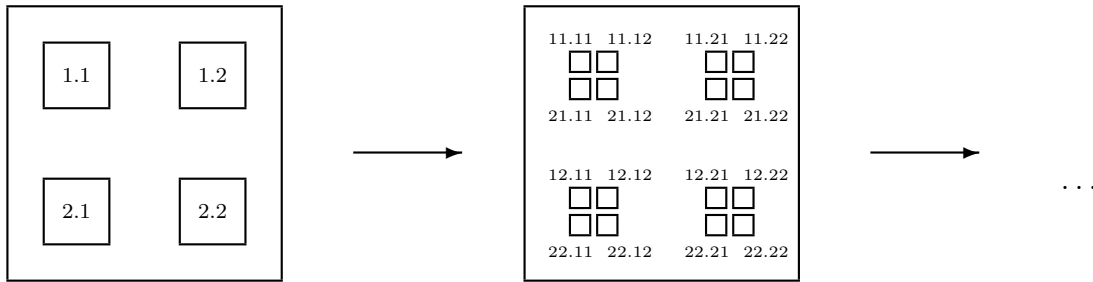
Niech  $h : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  będzie odwzorowaniem przekształcającym kwadrat  $S \subset \mathbb{R}^2$  na zbiór przypominający podkowę zgodnie z Rysunkiem 3.12. Wtedy zbiór  $H^+ = \bigcap_{n=0}^{\infty} h^n(S)$  jest iloczynem kartezjańskim odcinka (horyzontalnie) i zbioru Cantora (wertykalnie). Analogicznie, dla przeciwobrazów odwzorowania  $h$ , zbiór  $H^- = \bigcap_{n=1}^{\infty} h^{-n}(S)$  jest



Rysunek 3.13: Przeciwobrazy odwzorowania podkowy Smale’a.

iloczynem kartezjańskim odcinka (wertykalnie) i zbioru Cantora (horyzontalnie), Rysunek 3.13.

Atraktor  $H = H^+ \cap H^- = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} h^n(S)$  nazywany jest *zbiorem podkowy*. Odwzorowanie  $h : H \rightarrow H$  jest homeomorfizmem, i „koduując” punkty zbioru  $H$  za pomocą dwustronnych ciągów jedynek i dwójek zgodnie Rysunkiem 3.14, można utożsamić układ  $(H, h)$  z dwustronnym shiftem pełnym  $(\overline{\Sigma}_2, \overline{\sigma}_2)$ , patrz [Szl82], [BS03], [Dev89].

Rysunek 3.14: Kodowanie punktów zbioru podkowy  $H$ .

### 3.5 Nieodwracalne operatory generujące odwracalne układy dynamiczne

Zasadniczą własnością algebraiczno-operatorowej metody rozszerzania układów dynamicznych przedstawioną w rozdziale 1 jest to, iż prowadzi ona od układów nieodwracalnych do układów odwracalnych. Dlatego, nieco zaskakującym jest, że ciekawe i nietrywialne wyniki można również otrzymać stosując tę metodę do układów odwracalnych. W procedurze tego typu interesujące zjawiska związane są z dowolnością wyboru zbioru  $Y$  (równoważnie ideału  $J$ , patrz paragraf 1.4.1) i zachodzą tylko dla operatorów nieodwracalnych. Jak postaramy się pokazać w niniejszym podrozdziale takie rozważania w sposób naturalny pojawiają się przy badaniu kompresji operatorów odwracalnych. Następujące stwierdzenie opisuje ogólną strukturę obiektów, o których będzie tu mowa.

**Stwierdzenie 3.23.** *Jeśli  $\alpha : X \rightarrow X$  jest homeomorfizmem i  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  jest naturalnym rozszerzeniem układu  $(X, \alpha)$  związanym ze zbiorem  $Y \subset X$ , patrz Definicja 1.32, to  $\tilde{X}$  możemy traktować jako domknięty podzbiór*

$$\tilde{X} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_N \cup X_\infty \subset \bar{\mathbb{N}} \times X$$

przestrzeni produktowej, gdzie  $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  jest jednopunktowym uzwarceniem przestrzeni dyskretnej  $\mathbb{N}$ ,

$$X_\infty = \{\infty\} \times X, \quad X_N = \{N\} \times \alpha^N(Y), \quad N \in \mathbb{N},$$

częściowy homeomorfizm  $\tilde{\alpha} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  działa według wzoru

$$\tilde{\alpha}(N, x) = (N + 1, \alpha(x)), \quad \tilde{\alpha}(\infty, x) = (\infty, \alpha(x)).$$

**Dowód.** Zdefiniujemy homeomorfizm  $\Psi$  przestrzeni  $\tilde{X} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_N \cup X_\infty$  opisanej w tezie Twierdzenia 1.28 na domkniętą podprzestrzeń  $\bar{\mathbb{N}} \times X$  za pomocą rzutu  $\Phi : \tilde{X} \rightarrow X$ , patrz (1.22):

$$\Psi(\tilde{x}) := (\infty, \Phi(\tilde{x})), \quad \text{dla } \tilde{x} \in X_\infty, \quad \Psi(\tilde{x}) := (N, \Phi(\tilde{x})), \quad \text{dla } \tilde{x} \in X_N, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Stąd, że  $\alpha$  jest homeomorfizmem  $\Psi : \bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_N \cup X_\infty \rightarrow \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \{N\} \times \alpha^N(Y) \cup \{\infty\} \times X$  jest bijekcją. Nietrudno spostrzec, iż  $\Psi$  jest homeomorfizmem i przy utożsamieniu  $\tilde{X}$  z  $\Psi(\tilde{X})$  zachodzi teza dowodzonego stwierdzenia. ■

### 3.5.1 Nieodwracalne operatory generujące homeomorfizmy okręgu jako kompresje operatorów odwracalnych

Niech  $\alpha : S^1 \rightarrow S^1$  będzie zachowującym orientację homeomorfizmem okręgu oraz niech  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie jego *podniesieniem* do  $\mathbb{R}$ , tzn.  $\gamma$  jest ciągłą funkcją taką, iż

$$\alpha(e^{2\pi it}) = e^{2\pi i\gamma(t)}, \quad t \in [0, 1].$$

Odwzorowanie  $\gamma$  jest monotonicznie rosnącym homeomorfizmem takim, że  $\gamma(t+1) = \gamma(t) + 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , wyznaczonym przez  $\alpha$  z dokładnością do przesunięcia całkowitoliczbowego.

Niech  $\mathbf{E} = L^p(\mathbb{R})$ ,  $p \in [1, \infty]$  i rozważmy operator  $\mathbf{T}_p \in L(\mathbf{E})$ :

$$(\mathbf{T}_p f)(t) = |\gamma'(t)|^{\frac{1}{p}} f(\gamma(t))$$

gdzie  $\frac{1}{\infty} = 0$  (pochodna  $\gamma'(t)$  istnieje prawie wszędzie na mocy monotoniczności  $\gamma$ ).

Wtedy  $\mathbf{T}_p$  jest odwracalną izometrią:  $(\mathbf{T}_p^{-1} f)(t) = |(\gamma^{-1})'(t)|^{\frac{1}{p}} f(\gamma^{-1}(t))$  i jeśli  $\mathbf{A} \subset L(\mathbf{E})$  jest algebrą operatorów mnożenia przez ciągłe funkcje okresowe o okresie 1:  $\mathbf{A} \cong C(S^1)$ , to

$$\mathbf{T}_p \mathbf{A} \mathbf{T}_p^{-1} \subset \mathbf{A}, \quad \mathbf{T}_p^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_p \subset \mathbf{A}, \quad (3.16)$$

a dokładniej mamy

**Stwierdzenie 3.24.** *Dla każdego  $a \in \mathbf{A}$  operatory  $a\mathbf{T}_p$  i  $a\mathbf{T}_p^{-1}$  są konkretnymi operatorami ważonego przesunięcia związanymi odpowiednio z układem  $(S^1, \alpha)$  i  $(S^1, \alpha^{-1})$ .*

**Dowód.** Wystarczy położyć  $\Omega_0 = [0, 1]$  i  $\varphi(t) = \{t\}$ , gdzie  $\{t\}$  jest częścią ułamkową liczby  $t \in \mathbb{R}$ . ■

Rozważmy teraz kompresje wyżej wprowadzonych obiektów do przestrzeni  $E := L^p(\mathbb{R}_+ \cup \{0\})$  traktowanej jako podprzestrzeń przestrzeni  $\mathbf{E} = L^p(\mathbb{R})$ . Dokładniej, oznaczmy przez  $P : \mathbf{E} \rightarrow E$  rzut  $\mathbf{E}$  na  $E$  i połóżmy

$$T_p := P(\mathbf{T}_p)P, \quad S_p := P(\mathbf{T}_p^{-1})P, \quad \mathcal{A} := PAP.$$

Wtedy algebra  $\mathcal{A} \subset L(E)$  jest izomorficzna z  $C(S^1)$ , a operatory  $T_p, S_p \in L(E)$  są wzajemnie sprzężonymi częściowymi izometriami.

**Stwierdzenie 3.25.** *Zachodzi jedna z możliwości:*

i) albo  $\gamma(0) > 0$  i wtedy  $T_p$  jest nieodwracalną ko-izometrią:

$$T_p \mathcal{A} S_p \subset \mathcal{A}, \quad S_p \mathcal{A} T_p \not\subset \mathcal{A},$$

operator  $aT_p$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , jest konkretnym operatorem ważonego przesunięcia związanym z  $(S^1, \alpha)$  oraz  $\text{hull}(\{a \in \mathcal{A} : S_p T_p a = a\}) = \{e^{2\pi it} : t \in [0, \gamma(0)]\}$ ,

ii) albo  $\gamma(0) = 0$  i wtedy  $T_p$  jest odwracalną izometrią:  $S_p = T_p^{-1}$  oraz

$$T_p \mathcal{A} T_p^{-1} \subset \mathcal{A}, \quad T_p^{-1} \mathcal{A} T_p \subset \mathcal{A},$$

dla  $a \in \mathcal{A}$  operatory  $aT_p$  i  $aT_p^{-1}$  są konkretnymi operatorami ważonego przesunięcia związanymi odpowiednio z układem  $(S^1, \alpha)$  i  $(S^1, \alpha^{-1})$ ,

iii) albo  $\gamma(0) < 0$  i wtedy  $T_p$  jest nieodwracalną izometrią:

$$S_p \mathcal{A} T_p \subset \mathcal{A}, \quad T_p \mathcal{A} S_p \not\subset \mathcal{A},$$

operator  $aS_p$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , jest konkretnym operatorem ważonego przesunięcia związanym z  $(S^1, \alpha^{-1})$  oraz  $\text{hull}(\{a \in \mathcal{A} : T_p S_p a = a\}) = \{e^{2\pi i t} : t \in [0, \gamma^{-1}(0)]\}$ .

**Dowód.** Jeśli  $\gamma(0) > 0$ , to

$$(T_p f)(t) = |\gamma'(t)|^{\frac{1}{p}} f(\gamma(t)), \quad (S_p f)(t) = \begin{cases} |(\gamma^{-1})'(t)|^{\frac{1}{p}} f(\gamma^{-1}(t)), & t \in [\gamma(0), \infty) \\ 0, & t \in [0, \gamma(0)). \end{cases}$$

Kładąc  $\Omega_0 = [0, 1]$  oraz  $\varphi(t) = \{t\}$  otrzymujemy tezę punktu i). W szczególności, rzut  $S_p T_p$  jest operatorem mnożenia przez funkcję charakterystyczną  $\chi_{\gamma(\mathbb{R})} = \chi_{[\gamma(0), \infty)}$ , skąd  $\text{hull}(\{a \in \mathcal{A} : S_p T_p a = a\}) = \{e^{2\pi i t} : t \in [0, \gamma(0)]\}$ . Punkt ii) nie nastęrcza trudności. Natomiast tezę punktu iii) można otrzymać analogicznie jak tezę punktu i) zamieniając rolami  $\gamma$  i  $\gamma^{-1}$ . ■

Istotną wadą obiektów po kompresji, z punktu widzenia naszych rozważań, jest ewentualna utrata jednej z relacji (3.16). Zgodnie z rezultatami rozdziału 1 możemy jednak zawsze tę relację „odzyskać” przechodząc do większej algebry. Aby to bliżej wyjaśnić załóżmy, że

$$\gamma(0) > 0$$

(przypadek, gdy  $\gamma(0) < 0$  rozpatruje się analogicznie). Połóżmy

$$\mathcal{B} = \overline{\text{span}} \left\{ \bigcup_{n=0}^{\infty} S_p^n \mathcal{A} T_p^n \right\}.$$

W świetle Twierdzenia 1.22,  $\mathcal{B}$  jest najmniejszą algebrą Banacha zawierającą  $\mathcal{A}$  oraz taką, że

$$T_p \mathcal{B} S_p \subset \mathcal{B}, \quad S_p \mathcal{B} T_p \subset \mathcal{B}.$$

Ponadto mamy

**Twierdzenie 3.26.** Niech  $\gamma(0) > 0$ . Algebra  $\mathcal{B}$  jest izomorficzna z algebrą funkcji  $C(\widetilde{X})$  na domkniętym podzbiorze przestrzeni produktowej  $\overline{\mathbb{N}} \times S^1$ . Przy czym

i) jeśli  $\gamma(0) \geq 1$ , to  $\widetilde{X} = \overline{\mathbb{N}} \times S^1$ , patrz Rysunek 3.15 (a).

ii) jeśli  $\gamma(0) \in (0, 1)$ , to  $\widetilde{X} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_N \cup X_\infty$ , gdzie  $X_\infty = \{\infty\} \times S^1$  jest okręgiem, a dla  $N \in \mathbb{N}$  zbiór  $X_N$  jest łukiem

$$X_N = \{N\} \times [\alpha^N(1), \alpha^{N+1}(1)],$$

gdzie  $[\alpha^N(1), \alpha^{N+1}(1)]$  oznacza łuk na o początku  $\alpha^N(1)$  i końcu  $\alpha^{N+1}(1)$ , patrz Rysunek 3.15 (b).

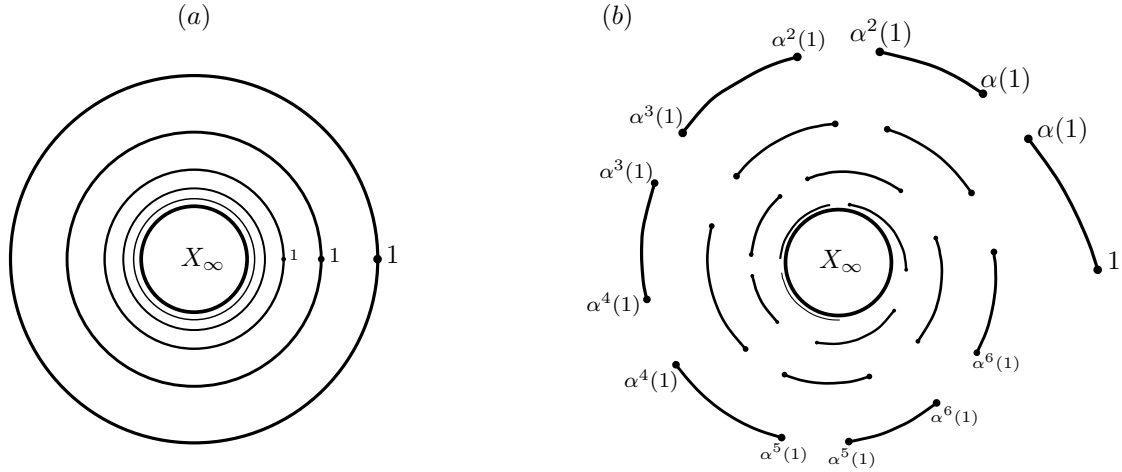
Przy utożsamieniu  $\mathcal{B} = C(\widetilde{X})$  operator  $T_p$  generuje na  $\widetilde{X}$  odwzorowanie  $\tilde{\alpha}$  działające według wzoru

$$\tilde{\alpha}(N, x) = (N + 1, \alpha(x)), \quad \tilde{\alpha}(\infty, x) = (\infty, \alpha(x)).$$

**Dowód.** Na mocy Stwierdzenia 3.25 i Twierdzenia 1.28 układ  $(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$  jest naturalnym rozszerzeniem  $(S^1, \alpha)$  związanym ze zbiorem

$$Y = \{e^{2\pi it} : t \in [0, \gamma(0)]\}$$

który albo jest okręgiem  $S^1$ , gdy  $\gamma(0) > 1$ , albo łukiem na okręgu  $S^1$  o początku  $1 = e^{2\pi i \cdot 0}$  i końcu  $\alpha(1) = e^{2\pi i \gamma(0)}$ . Wystarczy więc zastosować Stwierdzenie 3.23. ■



Rysunek 3.15: Widmo algebry  $\mathcal{B}$  związanej z homeomorfizmem okręgu.

Z powyższego twierdzenia wynika w szczególności, że algebra  $\mathcal{B}$  zależy nie tylko od homeomorfizmu  $\alpha$ , ale także od wyboru jego podniesienia  $\gamma$ . Na przykład, jeśli  $\gamma(0) \geq 1$ , to niezależnie od  $\alpha$  mamy

$$\mathcal{B} \cong C(\overline{\mathbb{N}} \times S^1).$$

Jeśli natomiast  $\gamma(0) \in (0, 1)$ , to struktura algebry  $\mathcal{B}$  zależy jedynie od orbity punktu  $1 \in S^1$ . Bliżej to zagadnienie omówimy w następującym paragrafie.

### 3.5.2 Klasyfikacja algebr rozszerzonych przez operatory związane z homeomorfizmami okręgu za pomocą liczb obrotu

W obecnym podrozdziale przedstawimy klasyfikację algebr opisanych w podpunkcie ii) Twierdzenia 3.26. W tym celu przypomnijmy [FKS87], [Szl82], [BS03], [Dev89], że jeśli  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest podniesieniem do  $\mathbb{R}$  homeomorfizmu okręgu  $\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ , to granica  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma(t)}{n}$  nie zależy od  $t \in \mathbb{R}$ , a jej część ułamkowa

$$\tau(\alpha) := \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma(t)}{n} \right\} \in [0, 1) \quad (3.17)$$

nie zależy również od wyboru podniesienia  $\gamma$ . Wielkość  $\tau(\alpha)$  nazywana jest *liczbą obrotu* odwzorowania  $\alpha$ . Została ona wprowadzona w 1885 roku przez H. Poincaré

[Poi85] i jest ważnym niezmiennikiem dla układów dynamicznych na okręgu, co tłumaczy następujące twierdzenie, por. [FKS87], [Szl82], [BS03], [Dev89]. Symbolem  $\Theta_\tau$ ,  $\tau \in [0, 1)$ , będziemy oznaczać obrót okręgu o kąt  $2\pi\tau$ :  $\Theta_\tau(z) = z \cdot e^{2\pi i\tau}$ ,  $z \in S^1$ .

**Twierdzenie 3.27** (Klasyfikacja Poincaré). *Niech  $\alpha : S^1 \rightarrow S^1$  będzie zachowującym orientację homeomorfizmem okręgu.*

- 1) *Jeśli  $\tau(\alpha) = \frac{m}{n}$ , gdzie  $\frac{m}{n}$  jest ułamkiem nieskracalnym, to  $\alpha$  posiada punkty okresowe i wszystkie orbity okresowe mają okres  $n$ .*
- 2) *Jeśli  $\tau(\alpha) \notin \mathbb{Q}$ , to  $\alpha$  nie posiada punktów okresowych i zbiór  $\Omega(\alpha)$  składający się z punktów skupienia dowolnej orbity  $\{\alpha(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  nie zależy wyboru punktu  $x \in S^1$ . Zachodzą dwa podprzypadki*
  - a) *Jeśli  $\Omega(\alpha) = S^1$ , czyli gdy  $\alpha$  jest homeomorfizmem tranzytywnym, to układ  $(S^1, \alpha)$  jest topologicznie sprzężony z układem  $(S^1, \Theta_{\tau(\alpha)})$ .*
  - b) *Jeśli  $\alpha$  jest homeomorfizmem intranzytywnym, to  $\Omega(\alpha)$  jest doskonałym nigdziegęstym podzbiorem  $S^1$  i istnieje ciągła suriekcja  $\phi : \Omega(\alpha) \rightarrow S^1$  pół-sprzęgająca układ  $(\Omega(\alpha), \alpha)$  z układem  $(S^1, \Theta_{\tau(\alpha)})$ .*

Zauważmy, że każdy zachowujący orientację homeomorfizm okręgu, dla którego  $1 \in S^1$  nie jest punktem stałym, posiada dokładnie jedno podniesienie  $\gamma$  spełniające

$$0 < \gamma(0) < 1. \quad (3.18)$$

Zatem przy założeniu (3.18), które przyjmujemy w całym tym ustępie, zarówno operatory  $T_p, S_p$  jak i algebra  $\mathcal{B} \cong C(\widetilde{X})$ , zdefiniowane w poprzednim podrozdziale zależą jedynie od homeomorfizmu  $\alpha$ . Tym samym uzasadniony jest zapis

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\alpha \quad \text{oraz} \quad \widetilde{X} = \widetilde{X}_\alpha,$$

który będziemy stosować od tej pory. Przypomnijmy, Twierdzenie 3.26 ii), że przestrzeń  $X_\alpha$  składa się z okręgu  $X_\infty$  oraz ciągu łuków  $\{X_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ .

**Twierdzenie 3.28.** *Niech  $\alpha : S^1 \rightarrow S^1$  będzie zachowującym orientację homeomorfizmem okręgu.*

- 1) *Jeśli  $\tau(\alpha) = \frac{m}{n}$ , gdzie  $\frac{m}{n}$  jest ułamkiem nieskracalnym, to zbiór punktów skupienia punktów końcowych łuków  $\{X_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  tworzy  $n$ -elementowy podzbiór  $X_\infty$  oraz*

$$\mathcal{B}_\alpha \cong \mathcal{B}_{\Theta_{\frac{m}{n}}}.$$

- 2) *Jeśli  $\tau(\alpha) \notin \mathbb{Q}$ , to zachodzą dwa podprzypadki*

- a) *Gdy  $\alpha$  jest homeomorfizmem tranzytywnym, to  $X_\infty$  jest zbiorem punktów skupienia punktów końcowych łuków  $\{X_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  oraz*

$$\mathcal{B}_\alpha \cong \mathcal{B}_{\Theta_{\tau(\alpha)}}.$$



b) Gdy  $\alpha$  jest homeomorfizmem intranzytywnym, to zbiór punktów skupienia punktów końcowych łuków  $\{X_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  tworzy doskonały nigdziegęsty podzbiór  $X_\infty$ . W szczególności

$$\mathcal{B}_\alpha \neq \mathcal{B}_{\Theta_\tau}, \quad \tau \in [0, 1).$$

**Dowód.** Zbiór punktów skupienia punktów końcowych łuków  $\{X_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  pokrywa się ze zbiorem  $\{\infty\} \times \Omega(\alpha) \subset X_\infty$ , gdzie  $\Omega(\alpha)$  jest zbiorem punktów skupienia orbity  $\{\alpha^N(1)\}_{N \in \mathbb{N}}$ . Korzystając z Twierdzenia 3.27 mamy następujące przypadki.

1) Gdy  $\tau(\alpha) = \frac{m}{n}$ , to  $\Omega(\alpha)$  składa się z  $n$  punktów tworzących orbitę okresową odwzorowania  $\alpha$ . Dokładniej istnieje  $n$  punktów  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in S^1$  ponumerowanych zgodnie z orientacją oraz takich, że

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \alpha^{Nn+k}(1) = x_{km}, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Stąd oraz z postaci przestrzeni  $\widetilde{X}_\alpha$ , patrz Twierdzenie 3.26 ii), wynika, że

$$\lim_{N \rightarrow \infty} X_{Nn+k} = \{\infty\} \times [x_{km \pmod{n}}, x_{(k+1)m \pmod{n}}], \quad k = 0, \dots, n-1,$$

tj. ciąg łuków  $\{X_{Nn+k}\}_{N \in \mathbb{N}}$  zbiega w metryce Hausdorffa do łuku na  $X_\infty$  o początku  $(\infty, x_{kn \pmod{m}})$  i końcu  $(\infty, x_{(k+1)n \pmod{m}})$ . Rozpatrzmy odwzorowanie  $\phi : \widetilde{X}_\alpha \rightarrow \widetilde{X}_{\Theta_\tau}$  które „liniowo” przeprowadza łuki według schematu:

$$\{\infty\} \times [x_k, x_{k+1 \pmod{n}}] \xrightarrow{\phi} \{\infty\} \times [e^{2\pi i \frac{k}{n}}, e^{2\pi i \frac{k+1}{n}}], \quad k = 0, \dots, n-1,$$

$$\{N\} \times [\alpha^N(1), \alpha^{N+1}(1)] \xrightarrow{\phi} \{N\} \times [e^{2\pi i \frac{N}{n}}, e^{2\pi i \frac{N+1}{n}}], \quad N \in \mathbb{N}.$$

Nietrudno spostrzec, że  $\phi$  jest homeomorfizmem, a zatem algebry  $\mathcal{B}_\alpha = C(\widetilde{X}_\alpha)$  i  $\mathcal{B}_{\Theta_\tau} = C(\widetilde{X}_{\Theta_\tau})$  są izomorficzne.

2a) Jeśli  $\tau(\alpha) \notin \mathbb{Q}$  i  $\alpha$  jest homeomorfizmem tranzytywnym, to  $\{\infty\} \times \Omega(\alpha) = \{\infty\} \times S^1 = X_\infty$  i istnieje homeomorfizm  $\phi : S^1 \rightarrow S^1$  taki, że diagram

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\alpha} & S^1 \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ S^1 & \xrightarrow{\Theta_{\tau(\alpha)}} & S^1 \end{array}$$

jest przemienny, gdzie  $\Theta_{\tau(\alpha)}$  jest obrotem o kąt  $2\pi\tau(\alpha)$ . Ponadto  $\phi$  można wybrać tak, by  $\phi(1) = 1$ , patrz np. [BS03, Dowód Tw. 7.1.9]. Stąd wynika, że odwzorowanie  $id \times \phi : \widetilde{X}_\alpha \rightarrow \widetilde{X}_{\Theta_{\tau(\alpha)}}$ :

$$(id \times \phi)(N, x) = (N, \phi(x)), \quad (N, x) \in X_N, \quad N \in \overline{\mathbb{N}},$$

jest homeomorfizmem. Zatem  $\mathcal{B}_\alpha \cong \mathcal{B}_{\Theta_{\tau(\alpha)}}$ .

2b) jeśli  $\tau(\alpha) \notin \mathbb{Q}$  i  $\alpha$  jest homeomorfizmem intranzytywnym, to  $\{\infty\} \times \Omega(\alpha)$  jest doskonałym nigdziegęstym podzbiorem  $X_\infty$ . Zatem przestrzeń  $\widetilde{X}_\alpha$  nie jest homeomorficzna z żadną z przestrzeni  $\widetilde{X}_{\Theta_\tau}$ ,  $\tau \in [0, 1)$ , równoważnie  $\mathcal{B}_\alpha \neq \mathcal{B}_{\Theta_\tau}$ ,  $\tau \in [0, 1)$ .

■

Liczba obrotu jest „niezmiennikiem” homeomorfizmów okręgu w następującym sensie: jeśli  $\phi$  jest topologicznym sprzężeniem układów  $(S^1, \alpha)$  i  $(S^1, \alpha')$ , to albo  $\tau(\alpha) = \tau(\alpha')$ , jeśli  $\phi$  zachowuje orientację, albo  $\tau(\alpha) + \tau(\alpha') = 1$ , jeśli  $\phi$  orientację zmienia. Dla algebr  $\mathcal{B}_\alpha$  liczba obrotu jest już niezmiennikiem *sensu stricto*.

**Twierdzenie 3.29.** *Jeśli algebry  $\mathcal{B}_\alpha$  i  $\mathcal{B}_{\alpha'}$  są izomorficzne, to  $\tau(\alpha) = \tau(\alpha')$ .*

**Dowód.** Jeśli  $\mathcal{B}_\alpha$  i  $\mathcal{B}_{\alpha'}$  są izomorficzne to istnieje homeomorfizm  $\phi : \widetilde{X}_\alpha \rightarrow \widetilde{X}_{\alpha'}$ , gdzie  $\widetilde{X}_\alpha = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_N$  i  $\widetilde{X}_{\alpha'} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} X'_N$  są przestrzeniami ideałów maksymalnych algebr  $\mathcal{B}_\alpha$  i  $\mathcal{B}_{\alpha'}$ . Odwzorowanie  $\phi$ , jako homeomorfizm, musi przeprowadzać łuki  $\{X_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  na łuki  $\{X'_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ , okrąg  $X_\infty$  na okrąg  $X'_\infty$ , a zbiór punktów skupienia  $\Omega(\alpha) \subset X_\infty$  punktów końcowych łuków  $\{X_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  na zbiór skupienia  $\Omega(\alpha') \subset X'_\infty$  punktów końcowych łuków  $\{X'_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ . Dla uproszczenia notacji przyjmijmy dalej utożsamienie  $X_\infty = X'_\infty = S^1$ . Twierdzimy, że  $\phi$  ustala sprzężenie między układami  $(\Omega(\alpha), \alpha)$  i  $(\Omega(\alpha'), \alpha')$  lub  $(\Omega(\alpha), \alpha)$  i  $(\Omega(\alpha'), \alpha'^{-1})$  w zależności od tego, czy  $\phi : X_\infty \rightarrow X'_\infty$  zachowuje, czy zmienia orientację. Jeśli to wykażemy, to stosując standardowy argument otrzymamy, że albo  $\tau(\alpha) = \tau(\alpha')$ , albo  $\tau(\alpha) + \tau(\alpha'^{-1}) = 1$ , gdzie podstawiając  $\tau(\alpha'^{-1}) = 1 - \tau(\alpha')$  również otrzymamy  $\tau(\alpha) = \tau(\alpha')$  i dowód będzie zakończony.

By wykazać stwierdzenie, z którego powyżej wnioskowaliśmy, ustalmy ciąg  $\{\alpha^{N_k}(1)\}_{k \in \mathbb{N}}$  zbieżny do dowolnie wybranego punktu  $x_0 \in \Omega(\alpha)$ . Wtedy ciąg  $\{\alpha^{N_k+1}(1)\}_{k \in \mathbb{N}}$  zbiega do punktu  $\alpha(x_0)$ , a ciąg łuków  $\{X_{N_k}\}_{N \in \mathbb{N}}$  zbiega (w metryce Hausdorffa) do łuku  $[x_0, \alpha(x_0)]$ .

Jeśli  $\phi : X_\infty \rightarrow X'_\infty$  zachowuje orientację, to prawie wszystkie łuki z ciągu  $\{X_{N_k}\}_{N \in \mathbb{N}}$  przejdą (zgodnie z orientacją) na prawie wszystkie łuki z ciągu  $\{\phi(X_{N_k})\}_{N \in \mathbb{N}}$ , a zatem

$$[\phi(x_0), \phi(\alpha(x_0))] = \phi([x_0, \alpha(x_0)]) = \phi(\lim_{k \rightarrow \infty} X_{N_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(X_{N_k}) = [\phi(x_0), \alpha'(\phi(x_0))],$$

skąd  $\phi(\Theta_q(x_0)) = \Theta_{q'}(\phi(x_0))$ . Czyli  $\phi$  sprzęga układy  $(\Omega(\alpha), \alpha)$ ,  $(\Omega(\alpha'), \alpha')$ .

Jeśli  $\phi : X_\infty \rightarrow X'_\infty$  zmienia orientację, to argumentując analogicznie jak powyżej

$$\begin{aligned} [\phi(\alpha(x_0)), \phi(x_0)] &= \phi([x_0, \alpha(x_0)]) = \phi(\lim_{k \rightarrow \infty} X_{N_k}) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(X_{N_k}) = [\alpha'^{-1}(\phi(x_0)), \phi(x_0)], \end{aligned}$$

skąd  $\phi(\alpha(x_0)) = \alpha'^{-1}(\phi(x_0))$ . Czyli  $\phi$  sprzęga układy  $(\Omega(\alpha), \alpha)$ ,  $(\Omega(\alpha'), \alpha'^{-1})$ . ■

Stosując klasyczny rezultat A. Denjoy [Den32], który mówi, że każdy dyfeomorfizm okręgu o skończonej wariancji i niewymiernej liczbie obrotu jest tranzytywny otrzymujemy, że w klasie algebr rozszerzonych  $\mathcal{B}_\alpha$  związanych z dyfeomorfizmami o skończonej wariancji liczba obrotu jest nie tylko niezmiennikiem, lecz wręcz ich równoważnikiem.

**Twierdzenie 3.30.** *Jeśli jeden z homeomorfizmów  $\alpha$ ,  $\alpha'$  jest dyfeomorfizmem o skończonej wariancji, to algebry  $\mathcal{B}_\alpha$  i  $\mathcal{B}_{\alpha'}$  są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy  $\tau(\alpha) = \tau(\alpha')$ .*

**Dowód.** Zastosować Twierdzenia 3.28, 3.29 oraz Twierdzenie Denjoy, patrz np. [FKS87], [Szl82], [BS03], [Dev89]. ■

### 3.5.3 Operatory generujące przesunięcia na torusie

Rozważania zawarte w poprzednich podrozdziałach można do pewnego stopnia uogólnić na przypadek operatorów generujących homeomorfizmy na  $d$ -wymiarowym torusie  $\mathbb{T}^d$ . Jednakże, jak pokażemy w Przykładzie 3.33 próba klasyfikacji (analogicznej do tej zawartej w podrozdziale 3.5.2) powstałych w ten sposób algebr, już w najprostszym przypadku przesunięć na torusie  $\mathbb{T}^2$ , napotyka trudności.

Przesunięciem o wektor  $h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}_+^d$  na torusie  $\mathbb{T}^d$  będziemy nazywać odwzorowanie  $\alpha : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ , które w zapisie addytywnym:  $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ , dane jest wzorem

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_d) = (x_1 + h_1 \pmod{1}, x_2 + h_2 \pmod{1}, \dots, x_d + h_d \pmod{1}).$$

Niech  $E = L^p(\mathbb{R}_+^d)$ ,  $p \in [1, \infty]$ . Ustalmy wektor  $h \in \mathbb{R}_+^d$  i zdefiniujmy operatory

$$(Tf)(t) = f(t + h), \quad (Sf)(t) = \begin{cases} f(t - h), & t - h \in \mathbb{R}_+^d \\ 0, & t - h \notin \mathbb{R}_+^d, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}_+^d.$$

Jasnym jest, że  $T, S \in L(E)$  są wzajemnie sprzężonymi izometriami częściowymi. Niech  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , będą standardowymi wersorami w  $\mathbb{R}_+^d$  i niech  $\mathcal{A} \subset L(E)$  będzie algebrą operatorów mnożenia przez okresowe funkcje ciągłe o okresach  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ :

$$\mathcal{A} = \{a \in C(\mathbb{R}_+^d) : a(t + e_i) = a(t), \quad t \in \mathbb{R}_+^d, \quad i = 1, \dots, d\}.$$

Wtedy mamy naturalny izomorfizm  $\mathcal{A} \cong C(\mathbb{T}^d)$  oraz zachodzi

**Stwierdzenie 3.31.** *Operator  $aT$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , jest konkretnym operatorem ważonego przesunięcia związanym z układem  $(\mathbb{T}^d, \alpha)$ , gdzie  $\alpha$  jest przesunięciem na  $\mathbb{T}^d$  o wektor  $h$ . Ponadto otoczką  $Y$  ideału*

$$J = \{a \in \mathcal{A} : STa = a\}$$

jest cały torus  $\mathbb{T}^d$  albo torus  $\mathbb{T}^d$  z wyciętym  $d$ -wymiarowym płatem, a dokładniej:

$$Y = \begin{cases} \mathbb{T}^d, & \text{jeśli } h_i \geq 1 \text{ dla pewnego } i, \\ \mathbb{T}^d \setminus (h_1, 1) \times (h_2, 1) \times \dots \times (h_d, 1) & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

gdzie  $h = (h_1, h_2, \dots, h_d)$ .

**Dowód.** By wykazać, że operator  $aT$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , jest konkretnym operatorem ważonego przesunięcia wystarczy położyć  $\gamma(t) := t + h$ ,  $t \in \mathbb{R}_+^d$ ,  $\Omega_0 := (0, 1) \times \dots \times (0, 1) \subset \mathbb{R}_+^d$  i  $\varphi(t) := (t_1 \pmod{1}, \dots, t_d \pmod{1})$ , gdzie  $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ . Postać otoczki ideału  $J$  wynika stąd, że  $ST$  jest operatorem mnożenia przez funkcję charakterystyczną stożka

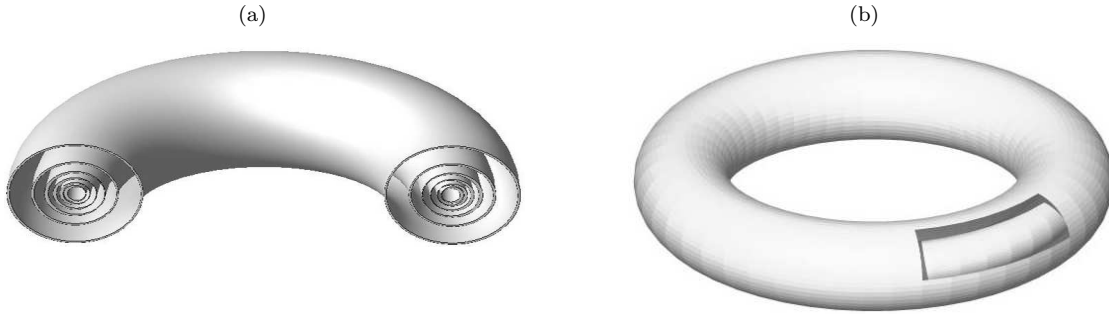
$$\{t = (t_1, t_2, \dots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d : t_i \geq h_i, \quad i = 1, \dots, d\}.$$

■

Biorąc pod uwagę Stwierdzenia 3.31, 3.23 oraz Twierdzenie 1.28 otrzymujemy następujący opis algebry rozszerzonej

$$\mathcal{B} := \overline{\text{span}} \left\{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S^n AT^n \right\}$$

oraz działającego na niej częściowego automorfizmu  $T(\cdot)S$ .



Rysunek 3.16: Widmo algebry związanej z przesunięciami na torusie  $\mathbb{T}^2$ .

**Twierdzenie 3.32.** Algebra  $\mathcal{B}$  jest izomorficzna z algebrą funkcji ciągłych na:

- przestrzeni  $\bar{\mathbb{N}} \times \mathbb{T}^d$ , gdy  $h_i \geq 1$  dla pewnego  $i = 1, \dots, d$ , lub w przeciwnym razie
- podprzestrzeni  $\tilde{X} = \bigcup_{N \in \bar{\mathbb{N}}} X_N \subset \bar{\mathbb{N}} \times \mathbb{T}^d$  składającą się z torusa  $X_\infty = \{\infty\} \times \mathbb{T}^d$  oraz ciągu torusów z wyciętymi  $d$ -wymiarowymi płacami:

$$X_N = \{N\} \times \mathbb{T}^d \setminus \alpha^N((h_1, 1) \times \dots \times (h_d, 1)),$$

gdzie  $\alpha$  jest przesunięciem na  $\mathbb{T}^d$  o wektor  $h$ ,  $N \in \bar{\mathbb{N}}$ .

Operator  $T$  generuje na widmie algebry  $\mathcal{B}$  częściowy homeomorfizm działający zgodnie ze wzorami  $\tilde{\alpha}(N, x) = (N + 1, \alpha(x))$  i  $\tilde{\alpha}(\infty, x) = (\infty, \alpha(x))$ .

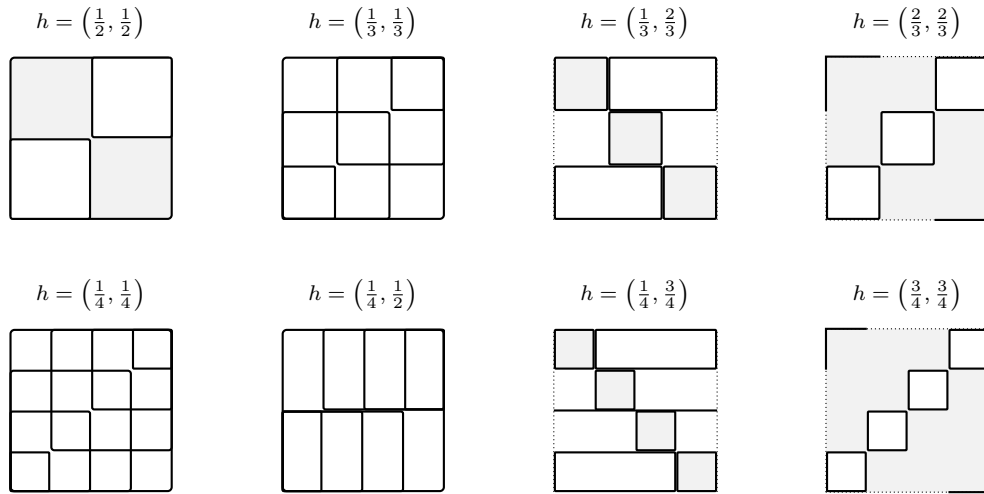
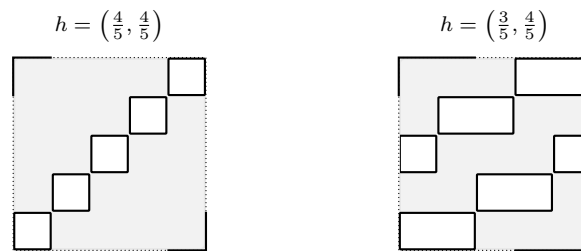
Zarówno algebra  $\mathcal{B}$  jak i jej widmo  $\tilde{X}$  zależą jedynie od wyboru wektora  $h$ . Rozpatrując różne wektory będziemy pisać  $\mathcal{B}_h$  oraz  $\tilde{X}_h$  mając na myśli obiekty odpowiadające wektorowi  $h$ . W szczególności, dla  $h$  nie leżących w  $d$ -wymiarowej kostce  $(0, 1)^d \subset \mathbb{R}^d$  wszystkie algebry  $\mathcal{B}_h$  są parami izomorficzne:

$$\mathcal{B}_h \cong C(\bar{\mathbb{N}} \times \mathbb{T}^d).$$

Przekrój przez przestrzeń  $\bar{\mathbb{N}} \times \mathbb{T}^d$ , dla  $d = 2$ , przedstawia Rysunek 3.16 (a). Jeśli natomiast  $h = (h_1, h_2, \dots, h_d) \in (0, 1)^d$ , to przestrzeń ideałów maksymalnych  $\tilde{X}_h$  algebry  $\mathcal{B}_h$  można wyobrazić sobie jako (cały) torus  $X_\infty$  oraz ciąg torusów  $X_N$ ,  $N \in \bar{\mathbb{N}}$ , z wyciętymi oknami ( $d$ -wymiarowymi płacami) o ustalonych wymiarach:  $1 - h_1, 1 - h_2, \dots, 1 - h_d$ , patrz Rysunek 3.16 (b). Ciąg ten zbiega do torusa  $X_\infty$  w ten sposób, że  $X_{N+1}$  leży wewnątrz  $X_N$ , a jego okno przesunięte jest w stosunku do okna w  $X_N$  o wektor  $h$ . Okna w torusach  $\{X_N\}_{N \in \bar{\mathbb{N}}}$  zbiegając do  $X_\infty$  „odbijają w nim ślad”, który jest topologicznym niezmiennikiem pozwalającym rozróżniać między widmami algebr  $\mathcal{B}_h$ . W szczególności, dla  $d = 1$  brzegami takich okien są punkty końcowe łuków  $X_N$ ,  $N \in \bar{\mathbb{N}}$ , których analiza doprowadziła nas, patrz Twierdzenie 3.29, do stwierdzenia, że

$$\mathcal{B}_h \cong \mathcal{B}_{h'} \iff h = h'.$$

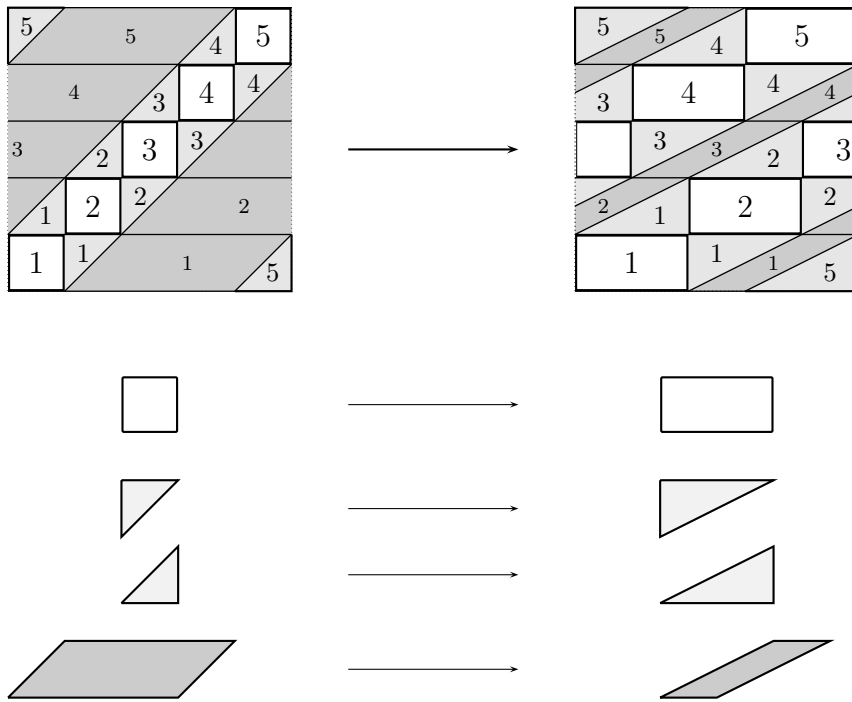
Okazuje się, że dla  $d \geq 2$ , struktura algebry  $\mathcal{B}_h$  nie determinuje wartości współrzędnych wektora  $h$ .

Rysunek 3.17: „Niehomeomorficzne siatki okien” odbite na torusie  $X_\infty$ .Rysunek 3.18: ”Homeomorficzne siatki okien” odbite na torusie  $X_\infty$ .

**Przykład 3.33.** Niech  $d = 2$  i niech współrzędne wektora  $h = \left(\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}\right) \in (0, 1) \times (0, 1)$  będą ułkami nieskracalnymi. Wtedy odwzorowanie  $\alpha_h$  jest okresowe o okresie  $n = NWW(n_1, n_2)$  i dla każdego  $k = 0, \dots, n - 1$ , brzegi okien w ciągu  $\{X_{nN+k}\}_{N \in \mathbb{N}}$  zbiegają do pewnego prostokąta na torusie  $X_\infty$ , rozważanym jako kwadrat z utożsamionymi bokami naprzeciwległymi. Prostokąty te tworzą siatkę na  $X_\infty$ , której punkty są topologicznie scharakteryzowane przez własność, że każde ich otoczenie przecina niepusto brzeg okna w nieskończenie wielu elementach rodziny  $\{X_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ . Ponadto w  $X_\infty$  można wyróżnić punkty nie leżące pod żadnym oknem jako takie, których każde otoczenie przecina prawie wszystkie elementy rodziny  $\{X_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ .

Na Rysunku 3.17 przedstawiliśmy siatki na  $X_\infty$  odpowiadające wybranym wektorom; kolor szary oznacza zbiory punktów nie leżących pod żadnym oknem. Z rysunków tych wynika, że dla rozważanych wektorów  $h$  przestrzenie  $\tilde{X}_h$  są parami niehomeomorficzne, czyli algebry  $\mathcal{B}_h$  są parami nieizomorficzne. Z drugiej strony nie trudno zauważyć, że istnieje homeomorfizm  $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  przekształcający na siebie siatki odpowiadające wektorom  $h = \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$  i  $h' = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ , Rysunek 3.18. Schematyczny opis takiego homeomorfizmu przedstawiony jest na Rysunku 3.19. Odwzorowanie

$$id \times \varphi : \tilde{X}_{\left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)} \rightarrow \tilde{X}_{\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)}$$



Rysunek 3.19: Homeomorfizm torusa ustalający  $\widetilde{X}_{(\frac{4}{5}, \frac{4}{5})} \cong \widetilde{X}_{(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})}$ .

jest poprawnie określonym homeomorfizmem, a stąd

$$\mathcal{B}_{(\frac{4}{5}, \frac{4}{5})} \cong \mathcal{B}_{(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})}.$$

### Uwagi do rozdziału 3

Na genezę Definicji 3.1 składają się te własności ważonych operatorów kompozycji, które spełnione są przez wszystkie operatory występujące w niniejszej pracy oraz którymi będziemy posługiwać się w dowodzie Twierdzenia 8.6. Zatem postać Definicji 3.1 podyktowana jest tu jedynie opracowanym dowodem i dostępnymi przykładami. Operatory omówione w tym rozdziale, a w szczególności konstrukcje z podrozdziału 3.3, pokazują, że definicja ta jest względnie naturalna.

Solenoid 2-adyczny jako grupę topologiczną rozważał L. Vietoris [Vie27]. Na nowo, na drodze geometrycznej opisanej w podrozdziale 3.2, odkrył go D. van Dantzig [Dan30]. Następnie S. Smale rozslawił go jako przykład, niebędącego orbitą okresową, atraktora strukturalnie stabilnego układu dynamicznego [Dev89]. Solenoid jako przestrzeń ideałów maksymalnych algebry operatorów po raz pierwszy otrzymał autor w [Kwa05'], patrz też [KL08]. Dowody Stwierżeń 3.18, 3.19 pochodzą z [Kwa05'], przy czym Stwierdzenie 3.18 w standardowym kontekście granic odwrotnych jest dobrze znane.

W związku z przedstawioną w paragrafie 3.5.2 klasyfikacją algebr  $\mathcal{B}_\alpha$ , warto wspomnieć klasyczny rezultat M. A. Rieffela [Rie81], który za pomocą liczb obrotu otrzymał klasyfikację  $C^*$ -algebr  $A_\alpha = C^*(\mathcal{A}, U_\alpha)$ , gdzie  $\mathcal{A} = C(S^1)$ , a  $U_\alpha$  jest operatorem unitarnym generującym na widmie  $S^1$  obrót  $\alpha$  o kąt niewymierny.

## Rozdział 4

# Promień spektralny operatorów przesunięcia z wagą

W tym rozdziale uogólnimy formułę wariacyjną (6) otrzymaną w [Leb79], [Kit79] tak, by wyrażała promień spektralny ważonych operatorów przesunięcia rozumianych w naszym, szerszym sensie (Definicja 1.19). W rzeczywistości otrzymamy dwa rodzaje zasad wariacyjnych, na wyjściowej przestrzeni  $X$  i na przestrzeni rozszerzonej  $\tilde{X}$ . Związek między tymi formułami oraz sama natura zasad wariacyjnych zostanie dokładnie omówiona i wyjaśniona na przykładach obejmujących wszystkie operatory rozważane w rozdziale 2 i 3. Przedstawione przykłady obrazują m. in. ścisły związek pomiędzy spektralnymi własnościami rozpatrywanych operatorów, a teorią ergodyczną generowanych przez nie topologicznych układów dynamicznych.

### 4.1 Zasady wariacyjne. Miary $\alpha$ -niezmiennicze i $\alpha$ -ergodyczne.

Ustalmy (abstrakcyjny) ważony operator przesunięcia  $aT$  z wagą w algebrze  $\mathcal{A}$ , działający w przestrzeni Banacha  $E$ , patrz Definicja 1.19. Niech  $S$  będzie częściową izometrią sprzężoną z  $T$  i niech  $\delta$  oraz  $\delta_*$  będą związanymi z  $S$  i  $T$  odwzorowaniami na przestrzeni operatorów  $L(E)$ , patrz (1.5), (1.6). Wtedy  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  jest endomorfizmem, natomiast na algebrze

$$\mathcal{B} = \overline{\text{span}}\left\{\bigcup_{n=0}^{\infty} S^n \mathcal{A} T^n\right\} = \overline{\text{span}}\left\{\bigcup_{n=0}^{\infty} \delta_*^n(\mathcal{A})\right\}$$

oba odwzorowania  $\delta$ ,  $\delta_*$  zadają częściowe automorfizmy, Twierdzenie 1.22. Podstawą naszych rozważań jest uwaga, iż pewne własności spektralne abstrakcyjnego ważonego operatora przesunięcia  $aT : E \rightarrow E$  i endomorfizmu z wagą  $a\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , gdzie  $a \in \mathcal{A}$ , są podobne (w tym kontekście interesujący jest również związek operatorów  $bT$  i  $bS$  z odwzorowaniami  $b\delta, b\delta_* : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  dla  $b \in \mathcal{B}$ ).

**Stwierdzenie 4.1.** *Dla  $a \in \mathcal{A}$  zachodzi równość*

$$r(aT) = r(a\delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a\delta(a) \dots \delta^{n-1}(a)\|^{\frac{1}{n}}.$$

W szczególności  $r(aT) = r(\delta^k(a)T)$  dla każdego  $k \in \mathbb{N}$ .

**Dowód.** Z jednej strony, korzystając ze Stwierdzenia 1.21 oraz faktu iż obrazem częściowej izometrii  $T^n$  jest podprzestrzeń  $T^n S^n E$  dostajemy

$$\|(aT)^n\| = \left\| \prod_{k=0}^{n-1} \delta^k(a)T^n \right\| = \left\| \prod_{k=0}^{n-1} \delta^k(a)T^n S^n \right\| = \left\| \prod_{k=0}^{n-1} \delta^k(a)\delta^n(1) \right\|$$

Z drugiej strony, z kontrakcyjności odwzorowania  $\delta$

$$\|(a\delta)^n\| = \left\| \prod_{k=0}^{n-1} \delta^k(a)\delta^n \right\| = \left\| \prod_{k=0}^{n-1} \delta^k(a)\delta^n(1)\delta^n \right\| \leq \left\| \prod_{k=0}^{n-1} \delta^k(a)\delta^n(1) \right\|$$

oraz z definicji normy operatorowej

$$\left\| \prod_{k=0}^{n-1} \delta^k(a)\delta^n(1) \right\| = \|(a\delta)^n(1)\| \leq \|(a\delta)^n\|.$$

Zatem  $\|(a\delta)^n\| = \|(aT)^n\| = \left\| \prod_{k=0}^{n-1} \delta^k(a)\delta^n(1) \right\|$ , skąd

$$r(aT) = r(a\delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a\delta(a) \dots \delta^{n-1}(a)\delta^n(1)\|^{1/n}.$$

Patrząc z kolei na oszacowania

$$\begin{aligned} \left\| \prod_{k=0}^{n-1} \delta^k(a)\delta^n(1) \right\| &\leq \left\| \prod_{k=0}^{n-1} \delta^k(a) \right\| = \left\| \prod_{k=0}^{n-2} \delta^k(a)\delta^{n-1}(1)\delta^{n-1}(a) \right\| \\ &\leq \left\| \prod_{k=0}^{n-2} \delta^k(a)\delta^{n-1}(1) \right\| \cdot \|a\| \end{aligned}$$

widzimy, iż  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \prod_{k=0}^{n-1} \delta^k(a)\delta^n(1) \right\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \prod_{k=0}^{n-1} \delta^k(a) \right\|^{1/n}$ , co kończy dowód pierwszej części stwierdzenia. Podobne oszacowania jak powyżej pokazują, iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a\delta(a) \dots \delta^{n-1}(a)\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta(a)\delta^2(a) \dots \delta^n(a)\|^{1/n},$$

a stąd  $r(aT) = r(\delta(a)T)$  i poprzez indukcję  $r(aT) = r(\delta^k(a)T)$  dla dowolnego  $k \in \mathbb{N}$ .

■

Jeśli  $b = \sum_{k=0}^m \delta_*^k(a_k)$ , to  $b = \sum_{k=0}^m \delta_*^k(\delta^k(1)a_k)$ , por. Stwierdzenie 1.21 iv), i dlatego bez straty ogólności można założyć, że  $b = \sum_{k=0}^m \delta_*^k(a_k)$ , gdzie  $a_k \in \delta^k(1)\mathcal{A}$ . W świetle tej uwagi następujące stwierdzenie mówi, że dla gęstego zbioru elementów w  $\mathcal{B}$  promień spektralny operatora przesunięcia z wagą  $b$  można wyrazić poprzez promień spektralny operatora przesunięcia z wagą w algebrze  $\mathcal{A}$ .

**Stwierdzenie 4.2.** *Jeśli  $b \in \mathcal{B}$  jest postaci  $b = a_0 + \delta_*(a_1) + \dots + \delta_*^m(a_m)$ , gdzie  $a_k \in \delta^k(1)\mathcal{A}$ , to*

$$r(bT) = r(aT)$$

dla  $a = \delta^m(a_0) + \delta^{m-1}(a_1) + \dots + a_m \in \mathcal{A}$ .



**Dowód.** Stosując do operatora  $bT$  i algebry  $\mathcal{B}$  Stwierdzenie 4.1 z jednej strony mamy  $r(bT) = r(\delta^m(b)T)$ . Z drugiej strony

$$\delta^m(b) = \delta^m\left(a_0 + \delta_*(a_1) + \dots + \delta_*^m(a_m)\right) = \delta^m(a_0) + \delta^{m-1}(a_1) + \dots + a_m,$$

por. Stwierdzenie 1.21 iv).  $\blacksquare$

Niech  $X$  będzie widmem algebry  $\mathcal{A}$  i niech  $\alpha$  będzie częściowym odwzorowaniem dualnym do endomorfizmu  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , por. Definicja 1.3. Przypomnijmy, por. strona 3, iż dla  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta_n$  oznacza dziedzinę, a  $\Delta_{-n}$  przeciwdziedzinę odwzorowania  $\alpha^n$ . Połóżmy ponadto

$$\Delta_{-\infty} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_{-n}, \quad \Delta_{+\infty} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n, \quad \Delta_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \Delta_n.$$

Zbiór  $\Delta_{+\infty}$  zawiera wszystkie punkty, które można iterować (za pomocą  $\alpha$ ) dowolną ilość razy, zbiór  $\Delta_{-\infty}$  składa się z tych punktów które mają niepusty przeciwobraz dowolnego rzędu, natomiast punkty zbioru  $\Delta_\infty = \Delta_{+\infty} \cap \Delta_{-\infty}$  posiadają obie te własności. W szczególności  $\alpha : \Delta_\infty \rightarrow \Delta_\infty$  jest suriekcją.

Aby uniknąć nieścisłości oraz ciągłych powtórzeń zdefiniujemy formalnie pojęcia miary niezmienniczej oraz miary ergodycznej dla odwzorowania częściowego. Stwierdzenie 4.4 pokazuje, że pojęcia te można traktować jako odpowiednie miary pełnego odwzorowania  $\alpha : \Delta_\infty \rightarrow \Delta_\infty$ .

**Definicja 4.3.** Przez *miarę niezmienniczą* ze względu na częściowe odwzorowanie  $\alpha$  (krócej *miarę  $\alpha$ -niezmienniczą*) będziemy rozumieć borelowską, regularną miarę probabilistyczną na  $X$  spełniającą warunek

$$\mu(\alpha^{-1}(\omega)) = \mu(\omega) \quad \text{dla każdego borelowskiego } \omega \subset X.$$

Zbiór wszystkich miar  $\alpha$ -niezmienniczych będziemy oznaczać  $\text{Inv}(X, \alpha)$ . *Miarą ergodyczną* względem  $\alpha$  (lub krócej *miarą  $\alpha$ -ergodyczną*) będziemy nazywać  $\alpha$ -niezmienniczą miarę  $\mu$  taką, że dla każdego borelowskiego zbioru  $\omega \subset X$  zachodzi implikacja

$$\alpha^{-1}(\omega) = \omega \implies \mu(\omega) = 0 \text{ lub } \mu(\omega) = 1.$$

Zbiór miar  $\alpha$ -ergodycznych będziemy oznaczać przez  $\text{Erg}(X, \alpha)$ . W szczególności  $\text{Erg}(X, \alpha) \subset \text{Inv}(X, \alpha)$ .

Z poniższego stwierdzenia wynika m. in., że jeśli  $\Delta_\infty = \emptyset$ , to  $\text{Inv}(X, \alpha) = \emptyset$  i na mocy twierdzenia Bogolubowa-Kryłowa (w klasie przestrzeni metryzowalnych) zachodzi również implikacja odwrotna.

**Stwierdzenie 4.4.** *Jeśli  $\mu \in \text{Inv}(X, \alpha)$ , to  $\text{supp } \mu \subset \Delta_\infty$ . Zatem miary niezmiennicze (ergodyczne) względem częściowego odwzorowania  $\alpha$  można traktować jako miary niezmiennicze (ergodyczne) względem pełnego odwzorowania  $\alpha : \Delta_\infty \rightarrow \Delta_\infty$ :*

$$\text{Inv}(X, \alpha) = \text{Inv}(\Delta_\infty, \alpha), \quad \text{Erg}(X, \alpha) = \text{Erg}(\Delta_\infty, \alpha).$$

**Dowód.** Na mocy ciągłości miary wystarczy pokazać, że  $\mu(\Delta_n) = 1$  oraz  $\mu(\Delta_{-n}) = 1$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ . Dowód pierwszej równości jest łatwy

$$1 = \mu(X) = \mu(\alpha^{-n}(X)) = \mu(\Delta_n).$$

By wykazać, że  $\mu(\Delta_{-n}) = 1$  zauważmy, że dla dowolnego  $k > 0$  mamy

$$\begin{aligned} \mu(\Delta_{-k}) &= \mu(\alpha^{-1}(\Delta_{-k})) = \mu(\alpha^{-1}(\alpha(\Delta_{-k+1}) \cap \Delta_1)) = \mu(\alpha^{-1}(\alpha(\Delta_{-k+1})) \cap \alpha^{-1}(\Delta_1)) \\ &= \mu(\alpha^{-1}(\alpha(\Delta_{-k+1})) \cap \Delta_2) = \mu(\alpha^{-1}(\alpha(\Delta_{-k+1}))) \geq \mu(\Delta_{-k+1}), \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równości  $\Delta_{-k} = \alpha(\Delta_{-k+1} \cap \Delta)$ , wykazanego wyżej faktu, iż  $\mu(\Delta_2) = 1$  oraz monotoniczności miary. Zatem z założenia  $\mu(\Delta_{-k+1}) = 1$  wynika  $\mu(\Delta_{-k}) = 1$  i na mocy indukcji matematycznej  $\mu(\Delta_{-n}) = 1$  dla wszystkich  $n \geq 0$ . ■

W dalszej części podrozdziału będziemy zakładać, że  $\mathcal{A}$  jest *algebrą funkcyjną*, to znaczy, że norma dowolnego elementu  $a \in \mathcal{A}$  pokrywa się z jego promieniem spektralnym:  $\|a\| = r(a)$ ; równoważnie transformacja Gelfanda na  $\mathcal{A}$  jest izometrią, czyli algebrę  $\mathcal{A}$  można traktować jako domkniętą podalgebrę  $C(X)$ , gdzie  $X$  jest widmem  $\mathcal{A}$ , [Żel, 30.1].

**Twierdzenie 4.5 (Zasady wariacyjne I).** *Niech  $\mathcal{A}$  będzie algebrą funkcyjną i niech  $b \in \mathcal{B}$  będzie postaci  $b = a_0 + \delta_*(a_1) + \dots + \delta_*^m(a_m)$ , gdzie  $a_k \in \mathcal{A}$ . Wtedy zachodzi wzór*

$$r(bT) = \max_{\mu \in \text{Erg}(X, \alpha)} \exp \int_{\Delta_\infty} \ln \left| \sum_{k=0}^n \hat{a}_k(\alpha^{n-k}(x)) \right| d\mu, \quad (4.1)$$

gdzie przyjmujemy, że  $\exp(-\infty) = 0$  oraz  $r(bT) = 0$ , jeśli  $\text{Erg}(X, \alpha) = \emptyset$ . W szczególności dla  $a \in \mathcal{A}$  mamy

$$r(aT) = \max_{\mu \in \text{Erg}(X, \alpha)} \exp \int_{\Delta_\infty} \ln |\hat{a}(x)| d\mu. \quad (4.2)$$

**Dowód.** Zaczniemy od wykazania formuły (4.2). Przyjmijmy utożsamienie  $\mathcal{A} \subset C(X)$ . Niech  $\bar{\alpha}$  oznacza dowolne, ciągle przedłużenie funkcji  $\alpha$  z  $\Delta_1$  na  $X$  i niech  $\tilde{a}(x) := a(x)\chi_{\Delta_1}(x)$ ,  $x \in X$ . Wtedy  $\tilde{a} \in C(X)$  i ważony operator kompozycji  $\tilde{a}T_{\bar{\alpha}} : C(X) \rightarrow C(X)$ , tj. operator dany wzorem  $(\tilde{a}T_{\bar{\alpha}}f)(x) = \tilde{a}(x)f(\bar{\alpha}(x))$ , jest przedłużeniem endomorfizmu z wagą  $a\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ . Ze Stwierdzenia 4.1 wynika, że  $r(aT) = r(a\delta) = r(\tilde{a}T_{\bar{\alpha}})$ , a do obliczenia  $r(\tilde{a}T_{\bar{\alpha}})$  możemy zastosować znany wzór [Ant96, Tw. 5.1], otrzymując w ten sposób formułę

$$r(aT) = \max_{\mu \in \text{Erg}(X, \bar{\alpha})} \exp \int_X \ln |\tilde{a}(x)| d\mu.$$

Dla miar  $\mu \in \text{Erg}(X, \bar{\alpha})$ , dla których  $\text{supp } \mu \not\subseteq \Delta_1$  całka w powyższym wzorze jest rozbieżna do  $-\infty$ . Istotne zatem są tylko miary których nośnik zawarty jest w  $\Delta_1$ , a Stwierdzenie 4.4 implikuje, że nośnik takich miar musi zawierać się w  $\Delta_\infty$ . Możemy więc powyższą formułę wariacyjną ograniczyć do całek po zbiorze  $\Delta_\infty$ , co wraz z równościami  $\tilde{a}|_{\Delta_\infty} = a|_{\Delta_\infty}$ ,  $\bar{\alpha}|_{\Delta_\infty} = \alpha|_{\Delta_\infty}$  daje (4.2).

Wzór (4.1) wynika teraz z (4.2) oraz ze Stwierdzenia 4.2. Nie potrzebujemy tu zakładać, że wagi  $a_k$  należą do  $\delta^k(1)\mathcal{A}$ , gdyż  $\delta^k(1) = \chi_{\Delta_k}$ , a istotne są tylko wartości funkcji  $a_k$  na zbiorze  $\Delta_\infty$ . ■

**Uwaga 4.6.** i) Zbiór  $\text{Inv}(X, \alpha)$  jako wypukły, \*-słabo zwarty podzbiór przestrzeni miar Radona  $C(X)^*$  jest sympleksem w sensie Choquet'a, a  $\text{Erg}(X, \alpha)$  jest zbiorem punktów ekstremalnych tego sympleksu, por. [Wal82, Tw. 6.10]. Z zasady maksimum Bauera wynika, że we wzorach (4.1), (4.2) maksimum może być brane po całym sympleksie  $\text{Inv}(X, \alpha)$ , gdyż i tak realizuje się ono na zbiorze punktów ekstremalnych  $\text{Erg}(X, \alpha)$ .

ii) Wzór (4.2) można czasem ulepszyć w następującym sensie. *Zbiorem maksymalizującym* algebry  $\mathcal{A}$  nazywamy każdy domknięty podzbiór  $F \subset X$  taki, że  $\|a\| = \max_{x \in F} |\hat{a}(x)|$  dla każdego  $a \in \mathcal{A}$ . Istnieje jednoznacznie określony minimalny podzbiór maksymalizujący algebry  $\mathcal{A}$  oznaczany przez  $\partial\mathcal{A}$  i nazywany *brzegiem Szyłowa*. Jeśli odwzorowanie  $\alpha$  zachowuje zbiór  $\partial\mathcal{A}$  (tak jest zawsze np., gdy endomorfizm  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  jest epimorfizmem, por. [Żel, Tw. 15.3]), to  $\alpha$  zachowuje  $\partial\mathcal{A} \cap \Delta_\infty$ , a stąd

$$r(aT) = \max_{\mu \in \text{Erg}(X, \alpha)} \exp \int_{\partial\mathcal{A} \cap \Delta_\infty} \ln |\hat{a}(x)| d\mu,$$

gdzie maksimum wystarczy brać po zbiorze  $\text{Erg}(\partial\mathcal{A} \cap \Delta_\infty, \alpha)$  wszystkich miar ergodycznych względem odwzorowania  $\alpha : \partial\mathcal{A} \cap \Delta_\infty \rightarrow \partial\mathcal{A} \cap \Delta_\infty$ .

Zwróćmy uwagę, że funkcje  $\hat{a}_k \in C(X)$  występujące we wzorze (4.1) nie są jednoznacznie wyznaczone przez element  $b = a_0 + Sa_1T + \dots + S^n a_n T^n$ , natomiast wartości funkcji  $\sum_{k=0}^n \hat{a}_k(\alpha^{n-k}(x))$  na zbiorze  $\Delta_\infty$  już tak. Możemy to łatwo wyjaśnić korzystając z otrzymanego w rozdziale 1 opisu widma  $\tilde{X}$  algebry  $\mathcal{B}$ . Przy okazji rozszerzymy poprzednie twierdzenie na przypadek operatorów przesunięcia z dowolną wagą w  $\mathcal{B}$  (niekoniecznie w gęstej podalgebrze  $\text{span}\{\bigcup_{n=0}^\infty S^n \mathcal{A} T^n\}$ ). W tym celu oznaczymy przez  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  częściowy układ dynamiczny generowany przez  $T$  na widmie  $\tilde{X}$  algebry  $\mathcal{B}$ , por. Twierdzenie 1.28, i położmy

$$\tilde{\Delta}_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\Delta}_n,$$

gdzie  $\tilde{\Delta}_n$  jest dziedziną częściowego homeomorfizmu  $\tilde{\alpha}^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . W stosunku do Twierdzenia 4.5 potrzebujemy nieco wzmocnić założenia, gdyż może zdarzyć się tak, że algebra  $\mathcal{B}$  nie jest funkcyjna mimo iż  $\mathcal{A}$  taką jest.

**Twierdzenie 4.7 (Zasady wariacyjne II).** *Jeśli  $\mathcal{B}$  jest algebrą funkcyjną, to dla każdego  $b \in \mathcal{B}$  mamy*

$$r(bT) = \max_{\mu \in \text{Erg}(\tilde{X}, \tilde{\alpha})} \exp \int_{\tilde{\Delta}_\infty} \ln |\hat{b}(\tilde{x})| d\mu.$$

*Ponadto  $b$  jest postaci  $b = a_0 + Sa_1T + \dots + S^n a_n T^n$ ,  $a_k \in \mathcal{A}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , wtedy i tylko wtedy, gdy transformata Gelfanda  $\hat{b} \in C(\tilde{X})$  zależy od skończonej liczby współrzędnych:*

$$\hat{b}(\tilde{x}) = \hat{b}(x_0, \dots, x_n), \quad \text{gdzie} \quad \tilde{x} = (x_0, x_1, \dots) \in \tilde{X},$$

*patrz Twierdzenie 1.28, a wtedy*

$$r(bT) = \max_{\mu \in \text{Erg}(X, \alpha)} \exp \int_{\Delta_\infty} \ln |\hat{b}(\alpha^n(x), \dots, \alpha(x), x)| d\mu$$

*oraz  $\hat{b}(\alpha^n(x), \dots, \alpha(x), x) = \sum_{k=0}^n \hat{a}_k(\alpha^{n-k}(x))$ ,  $x \in \Delta_n$ .*

**Dowód.** Pierwsza część tezy wynika z Twierdzenia 4.5 zastosowanego do algebry  $\mathcal{B}$ . Druga część tezy wynika z Uwagi 1.29 oraz Twierdzenia 4.5. ■

Ciekawym zastosowaniem „odwracalności” układu dynamicznego generowanego przez  $T$  na widmie algebry  $\mathcal{B}$ , jest

**Wniosek 4.8.** *Jeśli  $\mathcal{B}$  jest algebrą funkcyjną, to*

$$r(bT) = r(bS) \quad \text{dla każdego } b \in \mathcal{B}.$$

**Dowód.** Niech  $b \in \mathcal{B}$ . W świetle Twierdzenia 1.23 operator  $bS$  jest ważonym operatorem przesunięcia z wagą w algebrze  $\mathcal{B}$  i  $S$  generuje na  $\tilde{X}$  częściowe odwzorowanie  $\tilde{\alpha}^{-1}$ . Natomiast stąd, że  $\tilde{\alpha} : \tilde{\Delta}_\infty \rightarrow \tilde{\Delta}_\infty$  jest homeomorfizmem, to  $\text{Erg}(\tilde{X}, \tilde{\alpha}) = \text{Erg}(\tilde{X}, \tilde{\alpha}^{-1})$  i stosując Twierdzenie 4.7 otrzymujemy, iż  $r(bS)$  i  $r(bT)$  wyrażają się tym samym wzorem. ■

Mimo, iż z topologicznego punktu widzenia zbiór  $\tilde{\Delta}_\infty$  jest na ogół dużo bardziej skomplikowany niż zbiór  $\Delta_\infty$ , to dla operatorów przesunięcia z wagą w podalgebrze  $\text{span}\{\bigcup_{n=0}^\infty S^n \mathcal{A} T^n\} \subset \mathcal{B}$  formuły w Twierdzeniach 4.5 oraz 4.7 są w pewnym sensie równie efektywne, gdyż istnieje naturalna bijekcja między zbiorami  $\text{Erg}(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  i  $\text{Erg}(X, \alpha)$ .

**Twierdzenie 4.9.** *Niech  $\Phi : \tilde{X} \rightarrow X$  będzie odwzorowaniem dualnym do inkluzji  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ , patrz też wzór (1.22). Wtedy formuła*

$$\mu(\omega) = \tilde{\mu}(\Phi^{-1}(\omega)), \quad (4.3)$$

gdzie  $\omega \subset X$  jest podbiorem borelowskim, ustala afiniczny izomorfizm między sympleksami miar niezmienniczych  $\text{Inv}(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  oraz  $\text{Inv}(X, \alpha)$ . W szczególności izomorfizm ten ustala bijekcję między zbiorami  $\text{Erg}(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  oraz  $\text{Erg}(X, \alpha)$ .

**Dowód.** Nietrudno spostrzec, że odwzorowanie  $\Phi : \tilde{X} \rightarrow X$  pół-sprzęga  $(\tilde{\Delta}_\infty, \tilde{\alpha})$  z  $(\Delta_\infty, \alpha)$ . To znaczy następujący diagram

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Delta}_\infty & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{\Delta}_\infty \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \Delta_\infty & \xrightarrow{\alpha} & \Delta_\infty \end{array} \quad (4.4)$$

jest przemienny, por. (1.23).

Mając na uwadze fakt (Stwierdzenie 4.4), iż miary niezmiennicze skoncentrowane są odpowiednio na zbiorach  $\Delta_\infty$ ,  $\tilde{\Delta}_\infty$ , możemy i będziemy zakładać, iż  $\Delta_\infty = X$  i  $\tilde{\Delta}_\infty = \tilde{X}$ , czyli że  $\alpha : X \rightarrow X$  jest suriekcją, a  $\tilde{\alpha} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  jest homeomorfizmem. Wtedy  $\tilde{X} = \varprojlim (X, \alpha)$  jest granicą odwrotną,  $\tilde{\alpha}$  homeomorfizmem indukowanym przez  $\alpha$ , por. Definicja 1.24.

Jasne jest, że dla dowolnej miary  $\tilde{\mu} \in \text{Inv}(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  wzór (4.3) determinuje pewną miarę  $\mu$  na  $X$ . Przemiennność diagramu (4.4) implikuje, że jest to miara  $\alpha$ -niezmiennicza: dla dowolnego podzbioru borelowskiego  $\omega \subset X$  mamy

$$\mu(\alpha^{-1}(\omega)) = \tilde{\mu}(\Phi^{-1}(\alpha^{-1}(\omega))) = \tilde{\mu}(\tilde{\alpha}^{-1}(\Phi^{-1}(\omega))) = \tilde{\mu}(\Phi^{-1}(\omega)) = \mu(\omega).$$

Aby pokazać, że każdej mierze  $\mu \in \text{Inv}(X, \alpha)$  odpowiada dokładnie jedna miara  $\tilde{\mu} \in \text{Inv}(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  spełniająca (4.3) ustalmy miarę  $\mu \in \text{Inv}(X, \alpha)$ . Skonstruujemy miarę  $\tilde{\mu}$  na  $\sigma$ -ciele zbiorów borelowskich  $B(\tilde{X})$  za pomocą rzutów  $\Phi_n : \tilde{X} \rightarrow X$ :

$$\Phi_n(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) = x_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rozważmy zstępującą rodzinę  $\{B_n(\tilde{X})\}_{n \in \mathbb{N}}$   $\sigma$ -podciał rodziny  $B(\tilde{X})$  daną wzorem

$$B_n(\tilde{X}) = \{\Phi_n^{-1}(\omega) \subset \tilde{X} : \omega \in B(X)\}.$$

Biorąc pod uwagę relację  $\Phi_n^{-1}(\omega) = \Phi_{n+1}^{-1}(\alpha^{-1}(\omega))$ , która wynika z równości  $\Phi_n = \alpha \circ \Phi_{n+1}$  widzimy, że  $B_n(\tilde{X}) \subset B_{n+1}(\tilde{X})$ . Stąd i z definicji topologii produktowej na  $\tilde{X}$  otrzymujemy, że

$$B_1(\tilde{X}) \subset B_2(\tilde{X}) \subset \dots \subset B_n(\tilde{X}) \subset \dots \quad \text{oraz}$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(\tilde{X}) \quad \text{jest ciałem generującym } \sigma\text{-ciało } B(\tilde{X}).$$

Miarę  $\tilde{\mu}$  na ciełe  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(\tilde{X})$  definiujemy wzorem

$$\tilde{\mu}(\Phi_n^{-1}(\omega)) = \mu(\omega), \quad \omega \in B(X).$$

Określenie jest poprawne, gdyż jeżeli  $\Phi_n^{-1}(\omega) = \Phi_m^{-1}(\omega')$ , gdzie  $\omega, \omega' \in B(X)$  i (na przykład)  $n < m$ , to stąd iż  $\Phi_n = \alpha^{m-n} \circ \Phi_m$  mamy  $\Phi_n^{-1}(\omega) = \Phi_m^{-1}(\alpha^{n-m}(\omega))$ , czyli  $\omega' = \alpha^{n-m}(\omega)$ . Na mocy niezmienniczości miary  $\mu$  dostajemy więc

$$\tilde{\mu}(\Phi_n^{-1}(\omega)) = \tilde{\mu}(\Phi_m^{-1}(\omega')).$$

Funkcja zbioru  $\tilde{\mu}$  na  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(\tilde{X})$  jest skończenie addytywna. By wykazać że przedłuża się ona do  $\sigma$ -addytywnej funkcji zbioru na  $B(\tilde{X})$  pokażemy, że jest ona ciągła z góry. Niech  $\{\tilde{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie zstępującym ciągiem elementów ciała  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(\tilde{X})$ , których miary nie zbiegają do zera, to jest

$$\tilde{A}_0 \supset \tilde{A}_1 \supset \dots \supset \tilde{A}_n \supset \dots \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(\tilde{A}_n) = \varepsilon > 0.$$

W szczególności  $\tilde{\mu}(\tilde{A}_n) > \varepsilon$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ . Wykażemy, iż  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n \neq \emptyset$ .

Bez straty ogólności możemy założyć, że zbiory  $\tilde{A}_n$  są postaci  $\tilde{A}_n = \Phi_n^{-1}(A_n)$  gdzie  $A_n \in B(X)$ . Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ , na mocy regularności miary  $\mu$  możemy wybrać zbiór zwarty  $K_n \subset A_n$  taki, że

$$\mu(A_n \setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},$$

czyli innymi słowy  $\tilde{\mu}(\tilde{A}_n \setminus \Phi_n^{-1}(K_n)) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ . Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  połóżmy  $\tilde{D}_n := \bigcap_{i=0}^n \Phi_i^{-1}(K_i)$ . Zbiór  $\tilde{D}_n \subset \tilde{A}_n$  jest zwarty, a stąd, że  $\tilde{A}_n \setminus \tilde{D}_n \subset \bigcup_{k=0}^n \tilde{A}_k \setminus \Phi_k^{-1}(K_k)$  mamy

$$\tilde{\mu}(\tilde{A}_n \setminus \tilde{D}_n) \leq \sum_{k=0}^n \tilde{\mu}(\tilde{A}_k \setminus \Phi_k^{-1}(K_k)) < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

Czyli  $\tilde{\mu}(\tilde{D}_n) > \tilde{\mu}(\tilde{A}_n) - \varepsilon > 0$  i w szczególności  $\tilde{D}_n \neq \emptyset$ . Zatem rodzina  $\{\tilde{D}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jako zstępujący ciąg niepustych zbiorów zwartych posiada niepusty przekrój

$$\emptyset \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{D}_n \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n,$$

co kończy dowód twierdzenia.  $\blacksquare$

## 4.2 Przykłady formuł wariacyjnych

Formuły wariacyjne otrzymane w Twierdzeniach 4.5, 4.7 wyjaśniają naturę promienia spektralnego ważonych operatorów przesunięcia, wskazując na związek własności spektralnych takich operatorów z własnościami ergodycznymi odpowiednich układów dynamicznych. Opis sympleksu miar niezmienniczych  $\text{Inv}(X, \alpha)$ , czy też zbioru jego punktów ekstremalnych  $\text{Erg}(X, \alpha)$  jest jednym z nietrywialnych i podstawowych problemów teorii ergodycznej [Wal82]. Zbiór  $\text{Inv}(X, \alpha)$  posiada zazwyczaj złożoną strukturę i dość charakterystycznym przykładem jest tu *sympleks Poulsena*, czyli metryzowalny sympleks o gęstym zbiorze punktów ekstremalnych [Pou61] (z dokładnością do afinicznego izomorfizmu istnieje dokładnie jeden taki sympleks [LOS78]). Formuły (4.1), (4.2) oznaczają, że obliczenie promienia spektralnego rozważanych operatorów jest równie skomplikowane jak opis wszystkich miar ergodycznych.

**Przykład 4.10 (Operatory generujące przesunięcia Markowa).** Niech  $E = L^p_\eta(\mathbb{R}_+)$ ,  $p \in [1, \infty]$  i niech  $T_p \in L(E)$  będzie operatorem generującym jednostronne, pełne przesunięcie Markowa  $(\Sigma_N, \sigma_N)$  na widmie algebry  $\mathcal{A} \subset L(E)$ , zdefiniowanym w podrozdziale 3.4.1. Znanym faktem jest, że  $\text{Inv}(\Sigma_N, \sigma_N)$  tworzy sympleks Poulsena, por. [BS03, Ćw. 4.6.5]. Elementy  $\text{Inv}(\Sigma_N, \sigma_N)$  można opisać w następujący sposób, [Wal82, Str. 22]:

Jeśli dla skończonych ciągów  $x_0, \dots, x_n \in \{1, \dots, N\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , dane są nieujemne liczby  $p_n(x_0, \dots, x_n)$  spełniające relacje

$$\sum_{x_0 \in \{1, \dots, N\}} p_0(x_0) = 1,$$

$$p_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{x_0 \in \{1, \dots, N\}} p_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{x_{n+1} \in \{1, \dots, N\}} p_n(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}),$$

to wzór

$$\mu(\{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \Sigma_N : x_m = y_0, \dots, x_{m+n} = y_n\}) = p_n(y_0, \dots, y_n), \quad m \in \mathbb{N},$$

jednoznacznie wyznacza miarę  $\mu \in \text{Inv}(\Sigma_N, \sigma_N)$ . Każdy element  $\text{Inv}(\Sigma_N, \sigma_N)$  jest tej postaci. Między innymi do sympleksu  $\text{Inv}(\Sigma_N, \sigma_N)$  należą miary produktowe na  $\Sigma_N = \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$  lub ogólniej *miary Markowa* dane przez rozkład początkowy  $p = (p_1, \dots, p_N)$  oraz macierz stochastyczną  $P = (p_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, N\}}$ , dla których kładziemy

$$p_n(x_0, \dots, x_n) := p_{x_0} p_{x_0, x_1} \cdots p_{x_{n-1}, x_n}.$$

Miara Markowa jest ergodyczna wtedy i tylko wtedy, gdy macierz stochastyczna  $P$  jest nieprzywiedlna.

Elementy sympleksu  $\text{Inv}(\bar{\Sigma}_N, \bar{\sigma}_N)$ , gdzie  $(\bar{\Sigma}_N, \bar{\sigma}_N)$  jest dwustronnym, pełnym przesunięciem Markowa, również są opisane przez liczby  $p_n(x_0, \dots, x_n)$  spełniające wyżej wymienione relacje. Ponadto ustalenie liczb  $p_n(x_0, \dots, x_n)$  wyznacza bijekcję między  $\text{Inv}(\bar{\Sigma}_N, \bar{\sigma}_N)$  oraz  $\text{Inv}(\Sigma_N, \sigma_N)$ , która pokrywa się z izomorfizmem opisanym w Twierdzeniu 4.9.

**I.** Jeśli  $a \in \mathcal{A}$ , to wybierając liczby  $p_n(x_0, \dots, x_n)$  i stosując Twierdzenie 4.5 otrzymujemy oszacowanie promienia spektralnego  $r(aT_p)$ . W pewnych przypadkach może to prowadzić do dokładnego wyniku. Na przykład, jeśli waga  $\hat{a} \in C(\Sigma_N)$  zależy jedynie od skończonej ilości współrzędnych, czyli  $\hat{a}((x_k)_{k \in \mathbb{N}}) = \hat{a}(x_0, \dots, x_M)$ , to we wzorze (4.2) wystarczy całkować po cylindrach postaci  $\{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \Sigma_N : x_0 = y_0, \dots, x_M = y_M\}$ , a stąd

$$r(aT_p) = \max_{p_M} \prod_{x_0, \dots, x_M \in \{1, \dots, N\}} |\hat{a}(x_0, \dots, x_M)|^{p_M(x_0, \dots, x_M)},$$

gdzie maksimum bierzemy po  $N^M$  liczbach  $\{p_M(x_0, \dots, x_M)\}_{x_0, \dots, x_M \in \{1, \dots, N\}}$  takich, że  $\sum_{x_0, \dots, x_M \in \{1, \dots, N\}} p_M(x_0, \dots, x_M) = 1$ .

**II.** Operator  $T_p$  generuje na widmie algebry rozszerzonej  $\mathcal{B} = \overline{\text{span}} \left\{ \bigcup_{n=0}^{\infty} S_p^n \mathcal{A} T_p^n \right\}$  dwustronny przesunięcie Markowa  $(\overline{\Sigma}_N, \overline{\sigma}_N)$ , patrz Twierdzenie 3.21. Operator  $b \in \mathcal{B}$  jest elementem gęstej podalgebry  $\text{span} \left\{ \bigcup_{n=0}^{\infty} S_p^n \mathcal{A} T_p^n \right\}$  wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja  $\hat{b} \in C(\overline{\Sigma}_N)$  zależy od skończonej ilości współrzędnych ujemnych, to jest gdy  $\hat{b}((x_k)_{k \in \mathbb{Z}}) = \hat{b}((x_k)_{k \geq -M})$  dla pewnego  $M \in \mathbb{N}$ , por. wzór (3.14). Na mocy Twierdzenia 4.7 mamy wtedy

$$r(bT_p) = r(aT_p), \quad \text{gdzie } a \in \mathcal{A} \text{ oraz } \hat{a}((x_k)_{k \in \mathbb{N}}) = \hat{b}((x_{k-M})_{k \in \mathbb{N}}),$$

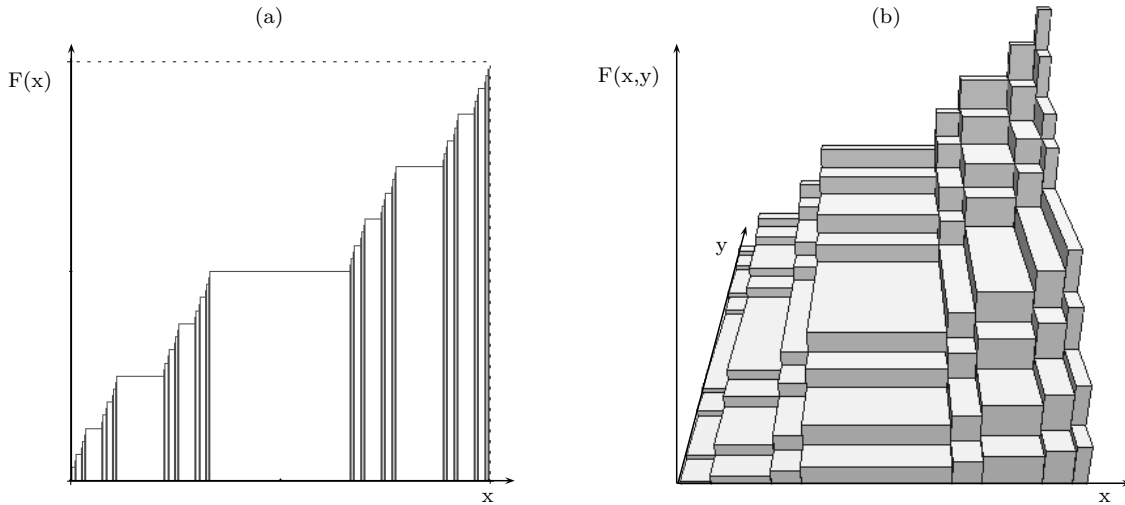
co sprowadza zadanie wyznaczenia  $r(bT_p)$  do sytuacji **I**. Aby jednak obliczyć  $r(bT_p)$  dla dowolnego  $b \in \mathcal{B}$  potrzebujemy całkować po przestrzeni ciągów dwustronnych  $\overline{\Sigma}_N$ , Twierdzenie 4.7. Na przykład dla  $N = 2$  układ  $(\overline{\Sigma}_2, \overline{\sigma}_2)$  możemy utożsamić z podkową Smale'a, Przykład 3.22. Wtedy  $\overline{\Sigma}_2 \subset \mathbb{R}^2$  i miarę  $\tilde{\mu} \in \text{Erg}(\overline{\Sigma}_2, \overline{\sigma}_2)$  możemy traktować jako rozkład prawdopodobieństwa na  $\mathbb{R}^2$ . Dystrybuenta rozkładu miary Markowa o wektorze początkowym  $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  i macierzy stochastycznej  $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  jest przedstawiona na Rysunku 4.1(b). Nośnikiem tej miary jest zbiór podkowy, por. Rysunek 3.12. Przy izomorfizmie z Twierdzenia 4.9 mierze tej odpowiada klasyczna miara Cantora na przestrzeni  $\Sigma_2$  utożsamionej ze zbiorem Cantora, por. Rysunek 4.1(a).

**Przykład 4.11 (Operatory generujące odwzorowania  $z^N$ ).** Zadanie wyznaczenia promienia spektralnego ważonego operatora przesunięcia związanego z układem  $(S^1, \alpha)$ , gdzie  $\alpha(z) = z^N$ ,  $N = 2, 3, \dots$ , można sprowadzić do poprzedniego przykładu. Rzeczywiście, traktując  $S^1$  jako odcinek  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0, 1) \pmod{1}$  funkcja Cantora  $\Psi : \Sigma_N \rightarrow S^1$ :

$$\Psi((x_k)_{k \in \mathbb{N}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k - 1}{N^{k+1}} \pmod{1}$$

jest ciągłą suriekcją (a poza przeliczalnym zbiorem również iniekcją) taką, że diagram

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_N & \xrightarrow{\sigma_N} & \Sigma_N \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ S^1 & \xrightarrow{\alpha} & S^1 \end{array}$$



Rysunek 4.1: Dystrybuanty miar Markowa na zbiorze Cantora i zbiorze podkowy.

jest przemienny. Stąd każdej mierze  $\eta \in \text{Inv}(\Sigma_N, \sigma_N)$  odpowiada dokładnie jedna miara  $\mu \in \text{Inv}(S^1, \alpha)$  taka, że

$$\mu(\omega) = \eta(\Psi^{-1}(\omega)), \quad \text{dla borelowskiego podzbioru } \omega \subset S^1.$$

Odpowiedniość ta ustala bijekcję między zbiorami  $\text{Erg}(\Sigma_N, \sigma_N) \setminus \{\delta_{(1,1,1,\dots)}\}$  i  $\text{Erg}(S^1, \alpha)$ , gdzie  $\delta_{(1,1,1,\dots)}$  jest miarą Diraca punktu  $(1, 1, 1, \dots) \in \Sigma_N$ . W szczególności  $\text{Inv}(S^1, \alpha)$  jest sympleksem Poulsena.

Niech teraz  $T_p \in L(L^p(\mathbb{R}))$  i  $\mathcal{A} \subset L(L^p(\mathbb{R}))$  będą takie jak w podrozdziale 3.2. Widmo algebry  $\mathcal{A}$  utożsamiamy z okręgiem  $S^1$ , operator  $T_p$  generuje na  $S^1$  odwzorowanie  $\alpha$ .

**I.** Jeśli  $a \in \mathcal{A}$ , to z powyższych rozważań oraz Twierdzenia 4.5 wynika, że

$$r(aT_p) = \max_{\mu \in \text{Erg}(\Sigma_N, \sigma_N)} \exp \int_{\Sigma_N} \ln |\hat{a}(\Psi(x))| d\mu,$$

co sprowadza obliczenie  $r(aT_p)$  do rozważań z Przykładu 4.10. W szczególności, jako, że  $\sigma_N$ -ergodycznej mierze produktowej na  $\Sigma_N = \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$  danej przez rozkład jednostajny  $p = (\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$  odpowiada unormowana miara Lebesgue'a  $m$  na  $S^1$  otrzymujemy oszacowanie

$$r(aT_p) \geq \exp \int_{S^1} \ln |\hat{a}(x)| dm.$$

**II.** Podobne wzory możemy wypisać dla operatorów  $bT_p$  z wagą w algebrze rozszerzonej  $\mathcal{B} = \overline{\text{span}} \left\{ \bigcup_{n=0}^{\infty} T_p^{-n} \mathcal{A} T_p^n \right\}$ . Utożsamiając widmo algebry  $\mathcal{B}$  z  $N$ -adycznym solenoidem  $\mathcal{S}$ , patrz podrozdział 3.2, operator  $T_p$  generuje na  $\mathcal{S}$  odwzorowanie  $F$  dane wzorem (3.5). Odwzorowanie  $\tilde{\Psi} : \bar{\Sigma}_N \rightarrow \mathcal{S}$

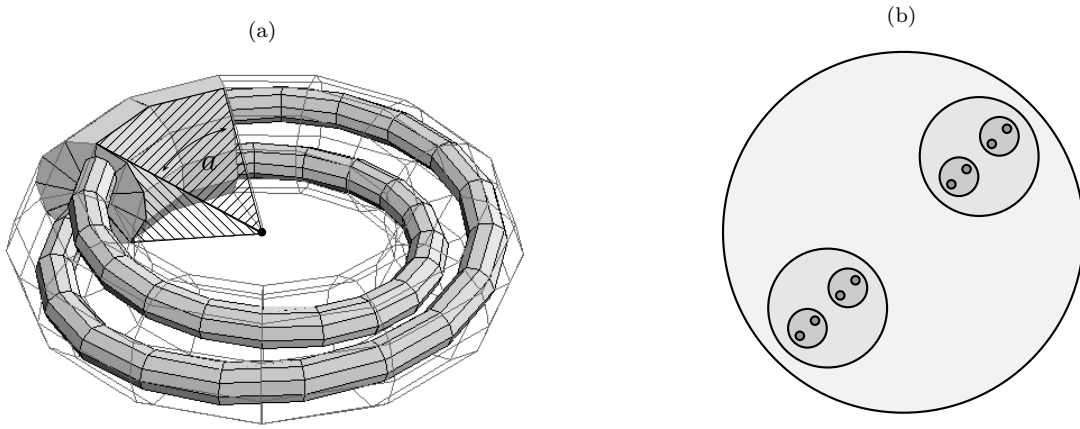
$$\tilde{\Psi}((x_k)_{k \in \mathbb{Z}}) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k - 1}{N^{k+1}} \pmod{1}, \dots, \sum_{k=-n}^{\infty} \frac{x_k - 1}{N^{k+n+1}} \pmod{1}, \dots \right),$$

gdzie  $\mathcal{S}$  traktujemy jako granicę odwrotną  $\varprojlim (S^1, \alpha)$ , pół-sprzęga układy  $(\bar{\Sigma}_N, \bar{\sigma}_N)$  oraz  $(\mathcal{S}, F)$ . Dla każdego  $b \in \mathcal{B}$  zachodzi zatem

$$r(bT_p) = \max_{\mu \in \text{Erg}(\bar{\Sigma}_N, \bar{\sigma}_N)} \exp \int_{\bar{\Sigma}_N} \ln |\hat{a}(\tilde{\Psi}(x))| d\mu.$$



Przy izomorfizmie z Twierdzenia 4.9 mierze Lebesgue'a na okręgu  $S^1$  odpowiada miara  $\tilde{m}$  na Solenoidzie  $\mathcal{S}$ , która lokalnie jest miarą produktową miary Lebesgue'a z miarą Cantora. Wyjaśnijmy to w przypadku, gdy  $N = 2$ . Rozważmy podzbiór 2-adycznego solenoidu  $\mathcal{S}$  przedstawiony na Rysunku 4.2(a), gdzie  $a$  jest kątem wycinka mierzonoego jako część kąta pełnego unormowanego do 1. Iteracje torusa względem odwzorowania (3.5) tworzą na jego przekroju „ser Cantora”, patrz Rysunek 4.2(b). Zatem w naturalny sposób rozważany zbiór możemy utożsamić z iloczynem kartezjańskim  $[a_1, a_2] \times \mathcal{C}$  odcinka o długości  $a$ , ze zbiorem Cantora  $\mathcal{C}$ . Miara  $\tilde{m}$  na wyróżnionym podzbiorku pokrywa się z produktem miary Lebesgue'a na  $[a_1, a_2]$  z miarą Cantora na  $\mathcal{C}$  (dystrybuantę miary Cantora przedstawia Rysunek 4.1(a)).



Rysunek 4.2: Miara naturalna na solenoidzie.

W szczególności mamy oszacowanie

$$r(bT_p) \geq \exp \int_{\mathcal{S}} \ln |\hat{a}(x)| d\tilde{m},$$

gdzie  $\tilde{m}$  jest opisaną wyżej miarą naturalną na solenoidzie.

**Przykład 4.12 (Operatory generujące odwzorowania logistyczne).** Niech  $\mathcal{A}$  oraz  $T_\lambda$ ,  $\lambda \in (0, 1]$ , będą takie jak w rozdziale 2. Wtedy widmo  $\mathcal{A}$  możemy utożsamić z odcinkiem  $[0, 1]$ :  $\mathcal{A} \cong C([0, 1])$ , a operator  $T_\lambda$  generuje na  $[0, 1]$  odwzorowanie logistyczne  $\alpha_\lambda(x) = 4\lambda x(1-x)$ . Przypomnijmy, iż  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , jest ciągiem wartości parametru  $\lambda$ , w których następuje pierwsza kaskada bifurkacji podwojenia okresu  $\alpha_\lambda$  oraz przyjmujemy oznaczenia  $\lambda_{-1} = 0$ ,  $\lambda_0 = \frac{1}{4}$  i  $\lambda_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$ .

**I.** Niech  $a \in \mathcal{A}$ . Dla  $\lambda \in (\lambda_{n-1}, \lambda_n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mamy następujące orbity okresowe

$$\{0\}, \quad \{\omega_{1,1}\}, \quad \{\omega_{2,1}, \omega_{2,2}\}, \quad \dots, \quad \{\omega_{2^{n-1},1}, \dots, \omega_{2^{n-1},2^{n-1}}\}.$$

Każdej orbicie  $\{\omega_{2^k,1}, \dots, \omega_{2^k,2^k}\}$  odpowiada miara ergodyczna  $\frac{1}{2^k}(\delta_{\omega_{2^k,1}} + \dots + \delta_{\omega_{2^k,2^k}})$ , a punktowi stałemu 0 odpowiada miara Diraca  $\delta_0$ . Dla  $\lambda < \lambda_\infty$  wszystkie miary ergodyczne są tej postaci. Zatem jeśli  $\lambda \in (0, \lambda_\infty)$ , to istnieje  $n \in \mathbb{N}$  takie, że  $\lambda \in (\lambda_{n-1}, \lambda_n]$  i formuła (4.2) przyjmuje postać

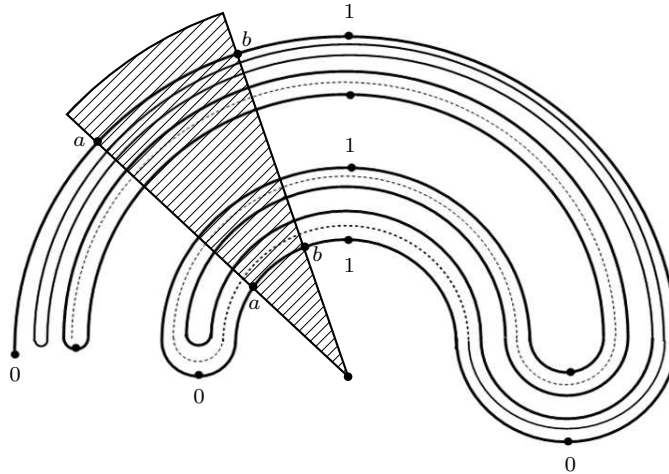
$$r(aT_\lambda) = \max \left\{ |\hat{a}(0)|, \max_{0 \leq k \leq n-1} \sqrt[2^k]{|\hat{a}(\omega_{2^k,1}) \cdot \dots \cdot \hat{a}(\omega_{2^k,2^k})|} \right\}. \quad (4.5)$$

Wraz ze wzrostem parametru  $\lambda$  od 0 do  $\lambda_\infty$  sympleks  $\text{Inv}([0, 1], \alpha_\lambda)$  ulega stopniowej komplikacji. Sympleks  $\text{Inv}([0, 1], \alpha_{\lambda_n})$  posiada  $2^n$  punktów ekstremalnych i można go traktować jako ścianę sympleksu  $\text{Inv}([0, 1], \alpha_{\lambda_{n+1}})$  posiadającego  $2^{n+1}$  punktów ekstremalnych. Analogia między ciągiem  $\{\text{Inv}([0, 1], \alpha_{\lambda_n})\}_{n \in \mathbb{N}}$  oraz ciągiem sympleksów z konstrukcji Poulsena [Pou61] nie jest przypadkowa, gdyż dla parametru  $\lambda \in [\lambda_\infty, 1]$  sytuacja przypomina tę z poprzednich dwu przykładów. W szczególności dla  $\lambda = 1$  zbiór miar niezmienniczych względem odwzorowania  $\alpha_1(x) = 4x(1-x)$  ma strukturę sympleksu Poulsena, co można zauważyć np. pół-sprzęgając układ  $(S^1, \alpha)$ , gdzie  $\alpha(z) = z^2$ , z układem  $([0, 1], \alpha_1)$ , patrz [Dev89, Str. 51], por. Przykład 4.10. Podobna sytuacja będzie miała miejsce dla parametru  $\lambda$  przyjmującego którąś z wartości ciągu  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  zdefiniowanego w ustępie 2.4.1. Ciekawym faktem zauważonym w 1947 roku przez S. Ulama i J. von Neumanna [UN47], jest istnienie (dokładnie jednej)  $\alpha_1$ -ergodycznej miary absolutnie ciągłej względem miary Lebesgue'a, która dana jest przez gęstość

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}, \quad x \in [0, 1].$$

W szczególności, mamy więc oszacowanie

$$r(aT_1) \geq \exp \int_0^1 \frac{\ln |\hat{a}(x)|}{\pi\sqrt{x(1-x)}} dx.$$



Rysunek 4.3: Miara naturalna na B-J-K continuum.

**II.** Niech  $b \in \mathcal{B}$ . Jeśli  $b$  jest postaci  $b = a_0 + Sa_1T + \dots + S^n a_n T^n$ ,  $a_k \in \mathcal{A}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , to zgodnie z Twierdzeniami 4.7, 4.5 promień spektralny operatora  $bT_\lambda$  pokrywa się z promieniem spektralnym operatora  $aT_\lambda$  z odpowiednią wagą  $a$  należącą do  $\mathcal{A}$ . Na ogół, by obliczyć  $r(bT_\lambda)$  musimy całkować po przestrzeni rozszerzonej  $\tilde{X}_\lambda$ , opisanej w rozdziale 2. Jeśli np.  $\lambda \in (0, \lambda_\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_{n-1}, \lambda_n]$ , to promień spektralny wyraża się wzorem

$$r(bT_\lambda) = \max \left\{ |\hat{b}(\tilde{0})|, \max_{0 \leq k \leq n-1} \sqrt[2^k]{|\hat{b}(\tilde{\omega}_{2^k, 1}) \cdot \dots \cdot \hat{b}(\tilde{\omega}_{2^k, 2^k})|} \right\} \quad \text{dla } \lambda \in (\lambda_{n-1}, \lambda_n],$$

gdzie  $\tilde{0}$  jest końcem promienia  $R$ , a  $\tilde{\omega}_{2^k, i}$  są punktami continuum węzowego  $X_\infty$  opisanymi w Twierdzeniu 2.9. Analogicznie otrzymujemy oszacowanie na  $r(bT_\lambda)$  w przedziałach parametru  $\lambda$  obejmujących okna stabilnych orbit okresowych o okresach nieparzystych oraz następujące po nich kaskady bifurkacji, por. ustęp 2.4.2. Po  $m$ -tej bifurkacji następującej po oknie orbity stabilnej o okresie  $2n + 1$ , czyli dla  $\lambda \in (\lambda_m^{(n)}, \lambda_{m+1}^{(n)}]$ ,  $n > 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , mamy

$$r(bT_\lambda) \geq \max \left\{ |\hat{b}(\tilde{0})|, \max_{0 \leq k \leq n-1} \sqrt[2^k(2n+1)]{|\hat{b}(\tilde{\omega}_{2^k(2n+1), 1}) \cdot \dots \cdot \hat{b}(\tilde{\omega}_{2^k(2n+1), 2^k(2n+1)})|} \right\},$$

gdzie  $\tilde{0}$  jest końcem promienia  $R$ , a  $\tilde{\omega}_{2^k(2n+1), i}$  są punktami continuum  $C_{2^m(2n+1)}$  opisanymi w Twierdzeniu 2.14. Z Twierdzenia Szarkowskiego (Twierdzenie 2.7) wynika, że odwzorowanie  $\tilde{\alpha}_\lambda$ , gdzie  $\lambda \in (\lambda_m^{(n)}, \lambda_{m+1}^{(n)}]$ , posiada nieskończenie wiele orbit okresowych. Zatem na ogół powyższej nierówności nie możemy zastąpić równością.

Aby otrzymać oszacowanie promienia spektralnego  $r(bT_1)$  zauważmy, że na B-J-K continuum  $\tilde{X}_1$  (Rysunek 2.2) istnieje naturalna miara  $\tilde{m}$  zdefiniowana w następujący sposób. Utożsammy wycinek  $\tilde{X}_1$  postaci przedstawionej na Rysunku 4.3 z iloczynem kartezjańskim  $[a, b] \times \mathcal{C}$  odcinka ze zbiorem Cantora i niech  $\tilde{m}$  będzie (na każdym takim wycinku  $[a, b] \times \mathcal{C}$ ) miarą produktową miary Lebesgue'a na  $[a, b]$  z miarą Cantora na  $\mathcal{C}$ . Alternatywnie utożsamiając B-J-K continuum z granicą odwrotną  $\varprojlim (X, \alpha_T)$ , gdzie  $\alpha_T$  jest odwzorowaniem trójkątnym, por. uwagi na stronie 30,  $\tilde{m}$  możemy zdefiniować jako  $\tilde{\alpha}_T$ -niezmienniczą miarę na  $\varprojlim (X, \alpha_T)$  taką, że

$$\tilde{m}(\Phi^{-1}([a, b])) = b - a,$$

por. Twierdzenie 4.9. Parafrazując wynik S. Ulama i J. von Neumanna możemy powiedzieć, że na B-J-K continuum  $\tilde{X}_1$  istnieje dokładnie jedna  $\tilde{\alpha}_1$ -ergodyczna miara absolutnie ciągła względem miary  $\tilde{m}$ , dana przez gęstość

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = f(\Phi(\tilde{x})) = \frac{1}{\pi \sqrt{\Phi(\tilde{x})(1 - \Phi(\tilde{x}))}}, \quad \tilde{x} \in \tilde{X}_1,$$

której wykres przedstawia Rysunek 4.4. Daje nam to oszacowanie

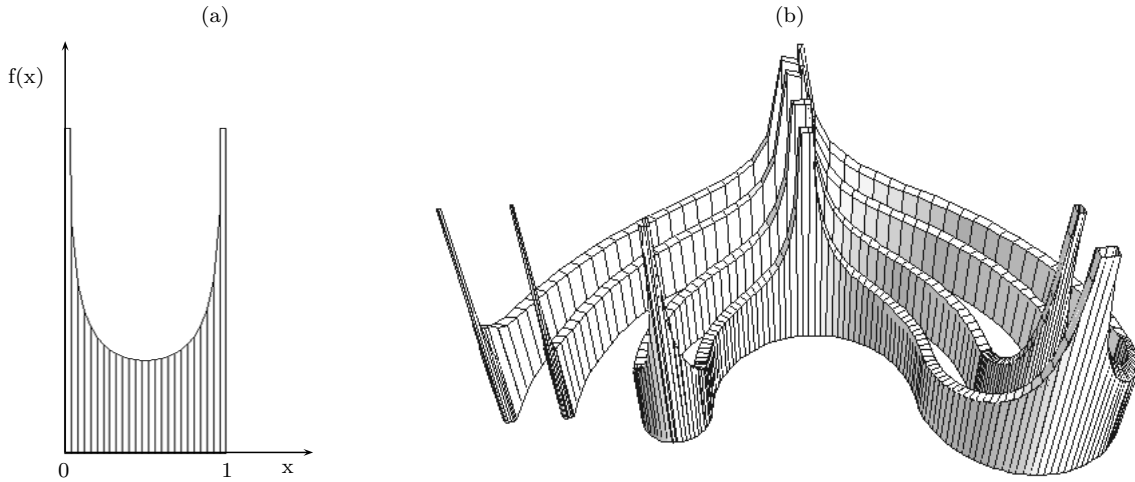
$$r(bT_1) \geq \exp \int_{\tilde{X}_1} \frac{\ln |\hat{b}(\tilde{x})|}{\pi \sqrt{\Phi(\tilde{x})(1 - \Phi(\tilde{x}))}} d\tilde{m}, \quad b \in \mathcal{B}.$$

Jeśli  $\lambda$  osiąga wartość  $\mu_n$  zdefiniowaną na stronie 39, to przestrzeń  $X_\infty$  jest sumą  $2^n - 1$  promieni oraz  $2^n$  kopii  $B_1, B_2, \dots, B_{2^n}$  B-J-K continuum, patrz Twierdzenie 2.12, por. Rysunek 2.12. Oznaczając przez  $\tilde{m}_i$ , zdefiniowaną powyżej, miarę naturalną na continuum  $B_i$ , dla  $b \in \mathcal{B}$  otrzymujemy oszacowania

$$r(bT_{\mu_n}) \geq \sqrt[2^n]{\prod_{i=1}^{2^n} \exp \int_{B_i} \frac{\ln |\hat{b}(\tilde{x})|}{\pi \sqrt{\Phi(\tilde{x})(1 - \Phi(\tilde{x}))}} d\tilde{m}_i},$$

$$r(bT_{\mu_n}) \geq \max \left\{ |\hat{b}(\tilde{0})|, \max_{0 \leq k \leq n-1} \sqrt[2^k]{|\hat{b}(\tilde{\omega}_{2^k, 1}) \cdot \dots \cdot \hat{b}(\tilde{\omega}_{2^k, 2^k})|} \right\},$$

gdzie  $\tilde{0} = (0, 0, 0, \dots) \in X_\infty$ , a  $\tilde{\omega}_{2^k, i}$  są punktami opisanymi w Twierdzeniu 2.12.



Rysunek 4.4: Gęstość Ulama-Von Neummana na: odcinku (a); B-J-K continuum (b).

Wyjaśnimy teraz związek otrzymanej przez nas zasady wariacyjnej ze znaną formułą [Hal82, Problem 91] wyrażającą promień spektralny klasycznego operatora przesunięcia z wagą.

**Przykład 4.13 (Klasyczne operatory przesunięcia z wagą).** Niech  $aT_{\mathbb{N}}$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , będzie klasycznym operatorem przesunięcia z wagą działającym w jednej z przestrzeni  $\ell^p(\mathbb{N})$ ,  $p \in [1, \infty]$ ,  $c(\mathbb{N})$  lub  $c_0(\mathbb{N})$ , por. Przykład 1.20. Operator  $T_{\mathbb{N}}$  generuje na widmie  $\beta(\mathbb{N})$  algebry  $\mathcal{A}$  odwzorowanie  $\alpha$ , gdzie  $\alpha(n) = n + 1$  dla  $n \in \mathbb{N} \subset \beta(\mathbb{N})$ , por. Przykład 3.3. Zbiór  $\Delta_{\infty} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \alpha^n(\beta(\mathbb{N}))$  pokrywa się z narostem  $\beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$  i każda  $\alpha$ -niezmiennicza miara skupiona jest na  $\beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$ . Innymi słowy, funkcjonał  $\phi_{\mu} \in (C(\beta(\mathbb{N})))^*$  odpowiadający mierze  $\mu \in \text{Inv}(\beta(\mathbb{N}), \alpha)$  spełnia warunki

$$\|\phi_{\mu}\| = \phi_{\mu}(1) = 1, \quad \phi_{\mu}(a \circ \alpha) = \phi_{\mu}(a),$$

czyli traktowany jako funkcjonał na rzeczywistej przestrzeni  $\ell_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mathbb{N})$  jest granicą Banacha. Co więcej każda *granica Banacha* jest tej postaci. Zatem oznaczając przez  $\text{BLim}$  zbiór granic Banacha otrzymujemy następującą formułę

$$r(aT_{\mathbb{N}}) = \max_{\phi \in \text{BLim}} \exp \phi(\{\ln |a(n)|\}_{n \in \mathbb{N}}). \quad (4.6)$$

W tym kontekście ważną klasę tworzą tak zwane *ciągi niemal zbieżne*, czyli takie elementy  $a \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mathbb{N})$  dla których wartość  $\phi(a)$  nie zależy od wyboru granicy Banacha  $\phi \in \text{BLim}$ . Ciągami niemal zbieżnymi są np. ciągi zbieżne, ciągi okresowe oraz kombinacje liniowe takich ciągów. Ogólnie G.G. Lorentz [Lor48] pokazał, że  $a = \{a(n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mathbb{N})$  jest niemal zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mathbb{N})$  ciągów średnich  $a_n(k) := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a(k+i)$  jest zbieżny w przestrzeni  $\ell_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mathbb{N})$  do ciągu stałego. Dla dowolnego ciągu  $a \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mathbb{N})$  o wyrazach nieujemnych twierdzenie to wynika z faktu, że

$$\max_{\phi \in \text{BLim}} \phi(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a(k+i).$$

Zatem dla dowolnej wagi  $a \in \mathcal{A}$  wzór na promień spektralny, patrz (4.6), przyjmuje postać

$$r(aT_{\mathbb{N}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} |a(k+i)|},$$

por. [Hal82, Problem 91]. Jeśli waga  $a \in \mathcal{A}$  jest taka, że ciąg  $\{\ln |a(n)|\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest niemal zbieżny, to we wzorze (4.6) wystarczy zastosować dowolnie wybraną granicę Banacha; dla najbardziej znanej granicy Banacha, jaką jest granica średnich Cesàro otrzymujemy wtedy  $r(aT_{\mathbb{N}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} |a(k)|}$ .

Przypomnijmy, iż w przypadku odwzorowania pełnego  $\alpha : X \rightarrow X$  punkt  $x_0 \in X$  nazywa się *niebłądzącym* [Wal82], [Szl82], jeśli dla jego dowolnego otwartego otoczenia  $U$  istnieje  $n$  takie, że  $\alpha^{-n}(U) \cap U \neq \emptyset$  (definicja ta ma sens również dla odwzorowań częściowych i wynika z niej, że punkt niebłądzący jest elementem  $\Delta_{\infty}$ ). Zbiór punktów *niebłądzących* będziemy oznaczmy przez  $\Omega(\alpha)$ . Jest to domknięty,  $\alpha$ -niezmienniczy zbiór [Wal82, Tw. 5.5], a co ważne nośnik każdej  $\alpha$ -niezmienniczej miary zawarty jest w  $\Omega(\alpha)$  [Wal82, Tw. 6.15].

**Przykład 4.14 (Operatory generujące homeomorfizmy okręgu).** Rozważmy operatory, o których mowa w punkcie i) Stwierdzenia 3.25. To znaczy niech

$$(T_p f)(t) = |\gamma'(t)|^{\frac{1}{p}} f(\gamma(t)), \quad (S_p f)(t) = \begin{cases} |(\gamma^{-1})'(t)|^{\frac{1}{p}} f(\gamma^{-1}(t)), & t \in [\gamma(0), \infty) \\ 0, & t \notin [0, \gamma(0)). \end{cases}$$

będą operatorami działającymi w przestrzeni  $E = L^p(\mathbb{R}_+ \cup \{0\})$ ,  $p \in [1, \infty]$ , gdzie  $\gamma : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  jest ciągłą monotonicznie rosnącą funkcją spełniającą warunki

$$\gamma(t+1) = \gamma(t) + 1, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \gamma(0) > 0.$$

Niech  $\mathcal{A} \subset L(E)$  będzie algebrą operatorów mnożenia przez ciągłe funkcje okresowe o okresie 1, której widmo utożsamiać będziemy z okręgiem  $S^1$ . Wtedy operator  $T_p$  generuje na widmie  $\mathcal{A}$  zachowujący orientację homeomorfizm  $\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ .

**I.** Niech  $a \in \mathcal{A}$ . W zależności od liczby obrotu  $\tau(\alpha)$  homeomorfizmu  $\alpha$  zachodzą następujące przypadki, por. Twierdzenie 3.27.

1. Jeśli  $\tau(\alpha) = \frac{m}{n}$ , gdzie  $\frac{m}{n}$  ułamkiem nieskracalnym, to zbiór punktów niewędrujących  $\Omega(\alpha)$  składa się z punktów okresowych o okresie  $n$  i jedynymi miarami  $\alpha$ -ergodycznymi są miary postaci

$$\mu_x := \frac{1}{n}(\delta_x + \delta_{\alpha(x)} + \dots + \delta_{\alpha^{n-1}(x)}),$$

gdzie  $x \in \Omega(\alpha)$ . Zatem promień spektralny operatora  $aT_p$  wyraża się jako maksimum po średnich geometrycznych

$$r(aT_p) = \max_{x_0 \in \Omega(\alpha)} \exp \int_{S^1} \ln |\hat{a}(x)| d\mu_{x_0} = \max_{x_0 \in \Omega(\alpha)} \left[ \prod_{i=0}^{n-1} |\hat{a}(\alpha^i(x_0))| \right]^{\frac{1}{n}}.$$

W szczególności, jeśli  $\gamma$  jest przesunięciem o  $\frac{m}{n}$ , to  $\alpha$  jest obrotem o kąt  $\frac{2\pi m}{n}$ , a wtedy

$$r(aT_p) = \max_{x_0 \in S^1} \left[ \prod_{k=0}^{n-1} |\hat{a}(x_0 \cdot e^{\frac{2k\pi i}{n}})| \right]^{\frac{1}{n}} = \max_{t \in [0, \frac{1}{n})} \left[ \prod_{k=0}^{n-1} \left| a\left(t + \frac{k}{n}\right) \right| \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (4.7)$$

2. Jeśli  $\tau(\alpha)$  jest liczbą niewymierną, to  $\alpha$  nie posiada punktów okresowych i jest pół-sprzężone z obrotem  $\Theta_{\tau(\alpha)}$  o kąt  $2\pi\tau(\alpha)$  [FKS87, Tw. 3], tzn. istnieje ciągła suriekcja  $\phi : S^1 \rightarrow S^1$  taka, że diagram

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\alpha} & S^1 \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ S^1 & \xrightarrow{\Theta_{\tau(\alpha)}} & S^1 \end{array}$$

jest przemienny. Zachodzą dwa podprzypadki [FKS87, Tw. 4],[BS03, Tw. 7.1.9].

- (a) Jeśli  $\Omega(\alpha) = S^1$ , to  $\phi$  jest homeomorfizmem i tym samym  $\alpha$  jest topologicznie sprzężone z  $\Theta_{\tau(\alpha)}$ . Stąd oraz z faktu, iż jedyną miarą ergodyczną względem  $\Theta_{\tau(\alpha)}$  jest miara Lebesgue'a  $\mu$  otrzymujemy

$$r(aT_p) = \exp \int_{S^1} \ln |\hat{a}(\phi^{-1}(x))| d\mu. \quad (4.8)$$

- (b) Jeśli  $\Omega(\alpha) \neq S^1$ , to  $\Omega(\alpha)$  jest doskonałym zbiorem nigdziegęstym. Wtedy pomijając przeliczalną ilość punktów z  $\Omega(\alpha)$  można otrzymać podzbiór  $\Omega_1(\alpha) \subset \Omega(\alpha)$  taki, że  $\phi : \Omega_1(\alpha) \rightarrow S^1$  jest bijekcją. Stąd, podobnie jak powyżej, istnieje tylko jedna miara  $\alpha$ -ergodyczna  $\nu$  i jest ona powiązana z miarą Lebesgue'a  $\mu$  wzorem

$$\mu(\omega) = \nu(\phi^{-1}(\omega)), \quad \omega \subset S^1$$

(miara  $\nu$  jest skupiona na zbiorze nigdziegęstym  $\Omega(\alpha)$ ). W konsekwencji

$$r(aT_p) = \exp \int_{S^1} \ln |\hat{a}(x)| d\nu. \quad (4.9)$$

Wspomnijmy, iż metodę konstrukcji dyfeomorfizmów okręgu o niewymiernej liczbie obrotu i nigdziegęstym zbiorze punktów niebłądzących podał w 1916 roku P. Bohl [Boh]. Dzisiaj konstrukcja ta nazywana jest przykładem (czy też kontrprzykładem) Denjoy, gdyż jest ona związana z popularnym Twierdzeniem Denjoy [Den32], które mówi, że jeśli dyfeomorfizm  $\alpha$  ma ograniczoną wariację i nie posiada punktów okresowych, to jest tranzytywny:  $\Omega(\alpha) = S^1$ .

**II.** Niech  $b$  będzie elementem algebry rozszerzonej  $\mathcal{B} = \overline{\text{span}} \left\{ \bigcup_{n=0}^{\infty} S_p^n \mathcal{A} T_p^n \right\}$ , por. Twierdzenie 3.26, podrozdział 3.5.2. Jeśli  $b$  jest postaci

$$b = a_0 + S_p a_1 T_p + \dots + S_p^n a_n T_p^n, \quad (4.10)$$

to  $b$  jest operatorem mnożenia przez funkcję ciągłą oraz okresową o okresie 1 na każdym z przedziałów  $[0, \gamma(0))$ ,  $[\gamma(0), \gamma^2(0))$ , ...,  $[\gamma^{n-1}(0), \gamma^n(0))$ ,  $[\gamma^n(0), +\infty)$ . Z jednej strony, promień spektralny  $r(bT)$  jest całkowicie zdeterminowany przez funkcję  $\sum_{k=0}^n \hat{a}_k \circ \alpha^{n-k}$ , Twierdzenie 4.5, a z drugiej przez wartości funkcji  $\hat{b}$  na podzbiórze  $\Delta_\infty = \{\infty\} \times S^1$  widma  $\widetilde{X}$  algebry  $\mathcal{B}$ , patrz Twierdzenie 3.26. Twierdzenia 4.5, 4.7 prowadzą do tej samej formuły, gdyż

$$\sum_{k=0}^n \hat{a}_k \left( \alpha^{n-k}(e^{2\pi i t}) \right) = \hat{b}(\infty, e^{2\pi i t}) = b(t) \quad \text{dla} \quad t \in [\gamma^n(0), +\infty).$$

W konsekwencji dla operatora  $b \in \mathcal{B}$  postaci (4.10) mamy

$$r(bT_p) = r(b_n T_p), \quad \text{gdzie } b_n(t) := b(t + \gamma^n(0)), \quad b_n \in \mathcal{A},$$

co sprowadza problem do przypadku już rozpatrzonego. Ogólnie, dla dowolnego  $b \in \mathcal{B}$ , mają zastosowanie wzory otrzymane w przypadku **I**, przy czym w miejsce funkcji  $\hat{a}$  na okręgu  $S^1$  należy rozpatrywać funkcję  $\hat{b}$  na okręgu  $\{\infty\} \times S^1 \subset \widetilde{X}$ .

**Przykład 4.15 (Operatory generujące przesunięcia na torusie).** Rozpatrzmy operatory rozważane w podrozdziale 3.5.3. Niech  $h = (h_1, \dots, h_N) \in \mathbb{R}_+^d$  i niech

$$(Tf)(t) = f(t + h), \quad (Sf)(t) = \begin{cases} f(t - h), & t - h \in \mathbb{R}_+^d \\ 0, & t - h \notin \mathbb{R}_+^d, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}_+^d.$$

będą operatorami działającymi w przestrzeni  $E = L^p(\mathbb{R}_+^d)$ ,  $p \in [1, \infty]$ . Widmo algebry  $\mathcal{A} \subset L(E)$  operatorów mnożenia przez okresowe funkcje ciągłe o okresach  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , utożsamiamy z torusem  $\mathbb{T}^d$ . Operator  $T$  generuje na widmie algebry  $\mathcal{A}$  przesunięcie  $\alpha : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  o wektor  $h$ .

Oznaczmy przez  $\beta_x$  domknięcie trajektorii punktu  $x \in \mathbb{T}^d$ :  $\beta_x = \overline{\{\alpha^k(x); k \in \mathbb{Z}\}}$ . Zbiór  $\beta_x$  jest podzbiorem wymiaru  $n$  równego pomniejszonej o jeden ilości liniowo niezależnych nad  $\mathbb{Q}$  liczb spośród  $1, h_1, h_2, \dots, h_N$ , por. [FKS87]. Zatem torus  $\mathbb{T}^d$  rozpada się na sumę rozłączną zbiorów  $\beta_x$ , a każdy z nich jest nośnikiem dokładnie jednej  $\alpha$ -ergodycznej miary  $\mu_x$  – zbiór  $\beta_x$  ma naturalną strukturę zwartej grupy topologicznej z działaniem  $\alpha^k(x) \cdot \alpha^m(x) := \alpha^{k+m}(x)$ , a  $\mu_x$  jest miarą Haara tej grupy. Wszystkie miary  $\alpha$ -ergodyczne są tej postaci.

**I.** Dla  $a \in \mathcal{A}$  otrzymujemy zatem wzór

$$r(aT) = \max_{\beta_x} \exp \int_{\beta_x} \ln |\hat{a}(y)| d\mu_x(y).$$

W szczególności, gdy  $d = 2$  oznacza to, co następuje:

1. Jeśli  $h_1 = \frac{n_1}{m_1}$  i  $h_2 = \frac{n_2}{m_2}$ , gdzie liczby  $n_i, m_i$  są względnie pierwsze,  $i = 1, 2$ , to każdy punkt  $x \in \mathbb{T}^2$  jest okresowy o okresie będącym najmniejszą wspólną wielokrotnością  $NWW(m_1, m_2)$  mianowników  $m_1, m_2$ . Zatem

$$r(aT) = \max_{x \in \mathbb{T}^2} \left[ \prod_{i=0}^{M-1} |\hat{a}(\alpha^i(x))| \right]^{\frac{1}{M}}, \quad M := NWW(m_1, m_2).$$

2. Jeśli  $h_1 = \frac{n}{m}$ ,  $h_2 \notin \mathbb{Q}$  i  $n, m$  są względnie pierwsze, to  $\beta_x$  jest sumą  $n$  okręgów równoległych do okręgu  $\{1\} \times S^1$  i

$$\ln r(aT) = \max_{t_0 \in [0, \frac{1}{n})} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[0,1)} \ln \left| a \left( t_0 + \frac{k}{n}, t \right) \right| dt.$$

3. Jeśli  $h_1 \notin \mathbb{Q}$ ,  $h_2 = \frac{n}{m}$  i  $n, m$  są względnie pierwsze, to  $\beta_x$  jest sumą  $n$  okręgów równoległych do okręgu  $S^1 \times \{1\}$  i

$$\ln r(aT) = \max_{t_0 \in [0, \frac{1}{n})} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[0,1)} \ln \left| a \left( t, t_0 + \frac{k}{n} \right) \right| dt.$$

4. Jeśli  $h_1, h_2 \notin \mathbb{Q}$  i  $h_1, h_2$  są wymiernie zależne, to istnieje ułamek  $\frac{n}{m}$  nieskracalny taki, że  $nh_1 = mh_2$ . Wtedy każda orbita  $\beta_x$  jest okręgiem położonym pod kątem  $\frac{n}{m}$  do okręgu  $S^1 \times \{1\}$  oraz

$$r(aT) = \max_{t_0 \in [0,1)} \exp \int_{[0,1)} \ln \left| a(t_0 + nt, mt) \right| dt.$$

5. Jeśli  $h_1, h_2 \notin \mathbb{Q}$  i  $h_1, h_2$  są wymiernie niezależne, to  $\beta_x = \mathbb{T}^2$ ,  $x \in \mathbb{T}^2$ , a stąd

$$r(aT) = \exp \int_0^1 \int_0^1 \ln |a(t, s)| dt ds.$$

**II.** Niech  $b \in \mathcal{B} = \overline{\text{span}} \{ \cup_{n=0}^{\infty} S^n \mathcal{A} T^n \}$ . Widmo  $\tilde{X}$  algebry  $\mathcal{B}$  składa się z ciągu parami homeomorficznych  $d$ -wymiarowych rozmaitości  $X_N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , zbiegających do  $d$ -wymiarowego torusa  $X_{\infty} = \{\infty\} \times \mathbb{T}^d$ , patrz Twierdzenie 3.32. Dla operatora  $b \in \mathcal{B}$  postaci  $b = a_0 + S a_1 T + \dots + S^n a_n T^n$  podobne rozważania jak w przykładzie poprzednim prowadzą do wniosku, że

$$r(bT) = r(b_n T), \quad \text{gdzie} \quad b_n(t) := b(t + nh), \quad b_n \in \mathcal{A}.$$

Natomiast ogólnie, wzory otrzymane w przypadku **I** pozostają prawdziwe, przy czym należy całkować funkcję  $\tilde{b}$  na torusie  $X_{\infty} = \{\infty\} \times \mathbb{T}^d$ .

## Uwagi do rozdziału 4

Zasadę wariacyjną typu (4.2) wyznaczającą promień spektralny *automorfizmu* z wagą  $a\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , funkcyjnej algebry Banacha  $\mathcal{A}$ , otrzymał A. K. Kitover [Kit79]. Niezależnie, A. V. Lebedev [Leb79] wykazał, iż taką formułą dany jest promień spektralny operatora  $aT : E \rightarrow E$  w przestrzeni Banacha  $E$ , gdzie  $a$  jest elementem funkcyjnej algebry Banacha  $\mathcal{A}$ , a  $T$  jest *odwracalną izometrią* taką, że  $T \mathcal{A} T^{-1} = \mathcal{A}$ . Formalnie słabszy rezultat Kitovera, w świetle Stwierdzenia 4.1, jest wynikowi Lebedeva równoważny. W tym rozdziale badaliśmy formuły wariacyjne podobnej natury dla promienia spektralnego operatorów ważonego przesunięcia  $aT$  generujących *nieodwracalne* układy dynamiczne. Na podstawie rezultatów rozdziału 1 oraz Stwierdzenia



4.1 otrzymaliśmy ogólne zasady wariacyjne dwóch typów: na wyjściowej przestrzeni  $X$  (Twierdzenie 4.5) oraz na przestrzeni rozszerzonej  $\widetilde{X}$ , (Twierdzenie 4.7).

Zasadnicza część dowodu Twierdzenia 4.9 jest wersją twierdzenia Kołmogorowa o istnieniu miary. W przypadku granic odwrotnych twierdzenie to jest dobrze znane, jednakże żadne, dostępne autorowi źródła nie podają dowodu tego faktu, por. [FKS87, str. 206], [DJ05, Lem. 3.2]. Co więcej źródła te przemilczają np. regularność rozważanych miar, która zdaje się być tu istotna.

Formuły analogiczne do tychże omówionych w przykładzie 4.14, jako promień spektralny ważonego operatora kompozycji z homeomorfizmem okręgu na przestrzeni  $C(S^1)$ , otrzymał w swojej rozprawie doktorskiej A. V. Lebedev [Leb80], por. [AL94, Przykład 5.11].



## Rozdział 5

# Zbiór modułów wartości spektralnych ważonego operatora przesunięcia

Zaczynając od niniejszego rozdziału, krok po kroku, przedstawimy kompletny opis widma ważonych operatorów przesunięcia  $aT$ . W tym rozdziale pokażemy, że każdej spójnej składowej zbioru

$$|\sigma(aT)| := \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(aT)\}$$

odpowiada domknięty,  $\alpha$ -niezmienniczy podzbiór  $\omega$  widma  $X$  algebry wag  $\mathcal{A}$  taki, że końce spójnej składowej  $|\sigma(aT)|$  wyrażają się przez formuły wariacyjne typu (4.1), (4.2) (otrzymane w poprzednim rozdziale), na zbiorze  $\omega$ . W przypadku, gdy widmo operatora  $aT$  jest niezmiennicze ze względu na obroty wokół zera, patrz podrozdział 6.2, rezultat ten daje pełny opis widma  $\sigma(aT)$ .

W obecnych rozważaniach fundamentalnym jest Twierdzenie 5.1 mówiące, że rzut Riesz'a odpowiadający izolowanej spójnej składowej zbioru  $|\sigma(aT)|$  należy do algebry  $\mathcal{A}$ . W podrozdziale 5.3 omówimy górne oszacowania ilości składowych zbiorów postaci  $|\sigma(aT)|$  dla wszystkich wag  $a$  jednocześnie oraz porównamy takie oszacowania dla wag w algebrze  $\mathcal{A}$  oraz algebrze rozszerzonej  $\mathcal{B} = \overline{\text{span}} \{\cup_{n=0}^{\infty} S^n \mathcal{A} T^n\}$ .

### 5.1 Przynależność rzutu Riesz'a do algebry wag

W obecnym podrozdziale zakładamy, że  $aT$  jest abstrakcyjnym operatorem przesunięcia na przestrzeni Banacha  $E$ , z wagą w algebrze Banacha  $\mathcal{A} \subset L(E)$  izomorficznej z algebrą funkcji  $C(X)$ :

$$\mathcal{A} \cong C(X).$$

Przez  $(X, \alpha)$  oznaczamy częściowy układ dynamiczny generowany przez  $T$  na widmie algebry  $\mathcal{A}$ . Podzbiór  $\omega \subset X$  będziemy nazywać  $\alpha$ -niezmienniczym, jeśli

$$\alpha^{-1}(\omega) = \omega \cap \Delta_1,$$

por. uzupełnienia C. Podstawową rolę w obecnym rozdziale będzie pełnić poniższe

**Twierdzenie 5.1.** *Niech  $\sigma(aT) \cap S^1 = \emptyset$ . Wtedy rzut Riesza*

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} (\lambda - aT)^{-1} d\lambda$$

*odpowiadający części widma  $\sigma(aT)$  leżącej wewnątrz koła  $D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  jest elementem algebry  $\mathcal{A}$ . Dokładniej  $\hat{P} = \chi_\omega \in C(X)$ , gdzie  $\omega$  jest domknięto-otwartym,  $\alpha$ -niezmiennicznym podzbiorem  $X$  takim, że*

$$\{x \in X : \hat{a}(x) = 0\} \subset \omega, \quad X \setminus \omega \subset \Delta_\infty.$$

**Dowód.** Z definicji rzutu  $P$ , patrz np. [RS90], podprzestrzenie  $E_1 = PE$  i  $E_2 = \ker P$  są zachowywane przez operator  $aT$  oraz

$$\sigma(aT|_{E_1}) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

$$\sigma(aT|_{E_2}) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}.$$

Stąd istnieje  $n_0 \in \mathbb{N}$  oraz  $\varepsilon > 0$  takie, że

$$\|(aT)^n e_1\| < (1 - \varepsilon) \|e_1\| \quad \text{dla każdego } e_1 \in E_1, \text{ gdy } n > n_0, \quad (5.1)$$

$$\|(aT)^n e_2\| > (1 + \varepsilon) \|e_2\| \quad \text{dla każdego } e_2 \in E_2, \text{ gdy } n > n_0. \quad (5.2)$$

Dowód twierdzenia oprzemy na następujących dwu lematach.

**Lemat 5.2.** *Podprzestrzenie  $E_1$  i  $E_2$  są niezmiennicze ze względu na działanie wszystkich operatorów leżących w algebrze  $\mathcal{A}$ .*

**Dowód.** Niech  $e \in E$  i rozpatrzmy rozkład  $e = e_1 + e_2$  na składniki z odpowiednich podprzestrzeni  $e_i \in E_i$ ,  $i = 1, 2$ . Wtedy

$$\|(aT)^n e\| = \|(aT)^n (e_1 + e_2)\| \geq \|(aT)^n e_2\| - \|(aT)^n e_1\|.$$

Warunki (5.1), (5.2) implikują, że w przypadku, gdy  $e_2 \neq 0$ , mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(aT)^n e\| = \infty,$$

a w przypadku, gdy  $e_2 = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(aT)^n e\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(aT)^n e_1\| = 0.$$

W szczególności, podprzestrzeń  $E_1$  jest wyznaczona przez następujący warunek

$$e \in E_1 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (aT)^n e = 0. \quad (5.3)$$

Ustalmy teraz operator  $b \in \mathcal{A}$ . Przestrzeń  $E_1$  jest niezmiennicza ze względu na działanie operatora  $b$ , gdyż dla dowolnego  $e \in E_1$  mamy

$$\|(aT)^n b e\| = \|\delta^n(b)(aT)^n e\| \leq \|b\| \|(aT)^n e\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

co w świetle (5.3) oznacza, że  $be \in E_1$ , czyli  $bE_1 \subset E_1$ .

Aby wykazać, że przestrzeń  $E_2$  również jest niezmiennicza ze względu na działanie operatora  $b$  rozpatrzmy operator sprzężony  $(aT)^*$  do  $aT$ . Skoro  $\sigma(aT) \cap S^1 = \emptyset$ , to  $\sigma((aT)^*) \cap S^1 = \emptyset$  i na przestrzeni dualnej  $E^*$  mamy odpowiedni rozkład spektralny:

$$E^* = E_{1*} \oplus E_{2*}$$

gdzie

$$\sigma((aT)^*|_{E_{1*}}) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

$$\sigma((aT)^*|_{E_{2*}}) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}.$$

Analogicznie jak powyżej pokazuje się, że przestrzeń  $E_{1*}$  jest niezmiennicza ze względu na działanie operatora  $b^*$ , to jest  $b^*E_{1*} \subset E_{1*}$ . Znanym ogólnym faktem, patrz np. [AL94, Lemat 7.3], jest, iż podprzestrzenie spektralne  $E_i, E_{i*}, i = 1, 2$ , powiązane są relacjami

$$E_1 = {}^\perp E_{2*}, \quad E_2 = {}^\perp E_{1*}.$$

W szczególności dla każdego  $e_2 \in E_2$  oraz  $e_1^* \in E_{1*}$  mamy  $e_1^*(e_2) = 0$  i korzystając z inkluzji  $b^*E_{1*} \subset E_{1*}$  dostajemy

$$0 = (b^*e_1^*)(e_2) = e_1^*(be_2),$$

czyli  $be_2 \in E_2$ . Stąd  $bE_2 \subset E_2$  i dowód lematu jest zakończony.  $\blacksquare$

**Lemat 5.3.** *Podprzestrzenie  $E_1$  i  $E_2$  są zachowywane przez operatory  $T$  i  $S$ .*

**Dowód.** Na mocy Lematu 5.2 operator  $TS = \delta(1) \in \mathcal{A}$  zachowuje podprzestrzenie  $E_1$  i  $E_2$ . Zatem jeśli  $TE_i \subset E_i$ , to również  $SE_i \subset E_i, i = 1, 2$ . Wystarczy więc pokazać, że  $TE_i \subset E_i, i = 1, 2$ . Wykażemy tu tylko inkluzję  $TE_1 \subset E_1$ , gdyż wtedy inkluzję  $TE_2 \subset E_2$ , podobnie jak w drugiej części dowodu Lematu 5.2, można otrzymać przechodząc do przestrzeni dualnej  $E^*$ .

Przypomnijmy, iż zwarta przestrzeń Hausdorffa jest przestrzenią normalną [Rud98, Tw. 2.7], możemy więc zastosować twierdzenie Tietzego [Kur97] by wykazać istnienie funkcji  $\hat{a}_k \in C(X), k = 1, 2, \dots$ , spełniających następujące warunki:

- i)  $|\hat{a}_k(x)| \leq 1$ ,
- ii)  $\hat{a}_k(x) = \frac{|\hat{a}(x)|}{k}$  gdy  $|\hat{a}(x)| \geq \frac{1}{k}$ .

Wtedy  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k a = |a|$ . Na mocy Lematu 5.2 oraz niezmienniczości  $E_1$  względem  $aT$  mamy  $[a_k(aT)]E_1 \subset a_k E_1 \subset E_1, k = 1, 2, \dots$ , Stąd

$$(|a|T)E_1 \subset E_1. \tag{5.4}$$

Niech  $e \in E_1$  i niech  $Te = e_1 + e_2$ , gdzie  $e_i \in E_i, i = 1, 2$ . Pokażemy, że  $e_2 = 0$ . Z jednej strony korzystając z (5.4) mamy  $(|a|T)e = |a|e_1 + |a|e_2 \in E_1$ , natomiast z drugiej Lemat 5.2 implikuje, że  $|a|e_i \in E_i, i = 1, 2$ . Zatem  $|a|e_2 = 0$ .

Dalej, stosując lemat Urysohna [Kur97], [Rud98], znajdziemy funkcje  $\hat{\varphi}_k \in C(X)$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , takie, że

$$0 \leq \hat{\varphi}_k \leq 1, \quad \hat{\varphi}_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } |\hat{a}(x)| \leq \frac{1}{k}, \\ 1, & \text{gdy } |\hat{a}(x)| \geq \frac{1}{k-1}. \end{cases}$$

Oznaczamy przez  $|a|_k$  funkcję daną wzorem

$$|a|_k(x) = \begin{cases} |\hat{a}(x)|, & \text{gdy } |\hat{a}(x)| > \frac{1}{k}, \\ \frac{1}{k}, & \text{gdy } |\hat{a}(x)| \geq \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Wtedy  $|a|_k \in \mathcal{A}$  jest elementem odwracalnym w  $\mathcal{A}$ . Stąd, że  $|a|\varphi_k = |a|_k\varphi_k$  oraz  $|a|e_2 = 0$  mamy

$$|a|_k(\varphi_k e_2) = (|a|\varphi_k)e_2 = \varphi_k(|a|e_2) = 0.$$

Korzystając z odwracalności  $|a|_k$  otrzymujemy, że  $\varphi_k e_2 = 0$ ,  $k = 2, 3, \dots$ .

Jako że na podprzestrzeni  $E_2$  operator  $aT$  jest odwracalny, istnieje wektor  $e_3 \in E_2$  taki, że  $aTe_3 = e_2$ . Z konstrukcji funkcji  $\varphi_k$  mamy  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k a = a$ . Zatem

$$e_2 = aTe_3 = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k aTe_3 = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k e_2 = 0,$$

co kończy dowód lematu.  $\blacksquare$

**Dalszy ciąg dowodu Twierdzenia 5.1.** Dla skrócenia zapisu ustalmy  $n > n_0$  i oznaczmy operator  $\prod_{k=0}^{n-1} \delta^k(a)\delta^n(1) \in \mathcal{A}$  literą  $b$ , czyli

$$b := \prod_{k=0}^{n-1} \delta^k(a)\delta^n(1).$$

Na mocy Lematu 5.2 mamy wtedy  $bE_i \subset E_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Operatory  $T^n$  i  $S^n$  są wzajemnie sprzężonymi częściowymi izometriami (Stwierdzenie 1.21) oraz  $T^n E_i \subset E_i$  i  $S^n E_i \subset E_i$  (Lemat 5.3). W szczególności  $T^n E_i = T^n S^n E_i$ , a stąd

$$\|b\|_{E_i} = \left\| \prod_{k=0}^{n-1} \delta^k(a)T^n S^n \right\|_{E_i} = \left\| \prod_{k=0}^{n-1} \delta^k(a)T^n \right\|_{E_i} = \|(aT)^n\|_{E_i}, \quad i = 1, 2,$$

por. dowód Stwierdzenia 4.1. Biorąc dodatkowo pod uwagę warunki (5.1) i (5.2) otrzymujemy, że

$$\|b\|_{E_1} < (1 - \varepsilon). \quad (5.5)$$

Analogicznie na przestrzeni  $E_2$  istnieje operator odwrotny do  $b$  oraz

$$\|(b|_{E_2})^{-1}\| < \frac{1}{(1 + \varepsilon)}, \quad (5.6)$$

co wynika stąd, że dla dowolnego wektora  $e \in E_2$  oraz liczby  $n > n_0$  mamy

$$\left\| \prod_{k=0}^{n-1} \delta^k(a)\delta^n(1)e \right\| = \left\| \prod_{k=0}^{n-1} \delta^k(a)T^n(S^n e) \right\| = \|(aT)^n(S^n e)\|$$

$$> (1 + \varepsilon)\|S^n e\| = (1 + \varepsilon)\|e\|,$$

gdzie równość  $\|S^n e\| = \|e\|$  otrzymujemy z odwracalności  $T^n$  na  $E_2$ .  
Warunki (5.5), (5.6) implikują, że

$$\sigma(b) = \sigma(b|_{E_1}) \cup \sigma(b|_{E_2}),$$

gdzie

$$\sigma(b|_{E_1}) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad \sigma(b|_{E_2}) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}.$$

Niech  $P'$  będzie rzutem odpowiadającym funkcji charakterystycznej  $\chi_\omega$  zbioru

$$\omega = \{x \in X : |\hat{b}(x)| < 1\}.$$

Jako że  $P' \in \mathcal{A} \cong C(X)$ , to podprzestrzenie  $E'_1 := P'E$ ,  $E'_2 := \ker P'$  są zachowane przez operator  $b \in \mathcal{A}$ . Ponadto

$$\sigma(b|_{E_1}) = \sigma(b|_{E'_1}), \quad \sigma(b|_{E_2}) = \sigma(b|_{E'_2}).$$

Pokażemy, że w istocie  $E_i = E'_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Założmy, że  $e = e_1 + e_2$ ,  $e_i \in E_i$ ,  $i = 1, 2$  oraz  $e_2 \neq 0$ . Wtedy

$$\|b^m e\| = \|b^m(e_1 + e_2)\| = \|b^m e_1 + b^m e_2\| \geq \|b^m e_2\| - \|b^m e_1\|. \quad (5.7)$$

Dzięki nierównościom (5.5), (5.6) mamy  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|b^m e_1\| = 0$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|b^m e_2\| = \infty$ .  
Zatem podprzestrzeń  $E_1$  jest wyznaczona przez warunek

$$e \in E_1 \iff \lim_{m \rightarrow \infty} b^m e = 0.$$

Ten sam warunek wyznacza podprzestrzeń  $E'_1$ , więc  $E_1 = E'_1$ .

Aby wykazać równość  $E_2 = E'_2$  założmy nie wprost, że istnieje  $e'_2 \in E'_2$  taki, że  $e'_2 \notin E_2$  (przypadek  $E_2 \subsetneq E'_2$  rozpatruje się całkowicie analogicznie). Wtedy  $e'_2 = e_1 + e_2$  gdzie  $e_i \in E_i$  oraz  $e_1 \neq 0$ . Skoro  $b : E'_2 \rightarrow E'_2$  jest operatorem odwracalnym, to dla każdego  $m > 0$  istnieje  $e'_2(m) \in E'_2$  taki, że

$$b^m e'_2(m) = e'_2.$$

Niech  $e'_2(m) = e_1(m) + e_2(m)$ , gdzie  $e_i(m) \in E_i$ . Z równości  $\sigma(b|_{E_2}) = \sigma(b|_{E'_2})$  mamy

$$\lim_{m \rightarrow \infty} e'_2(m) = 0. \quad (5.8)$$

Z drugiej jednak strony

$$e_1 + e_2 = e'_2 = b^m e'_2(m) = b^m e_1(m) + b^m e_2(m)$$

i skoro  $b^m E_i \subset E_i$ ,  $i = 1, 2$ , to otrzymujemy, że  $b^m e_i(m) = e_i$ ,  $i = 1, 2$ . Zatem warunki (5.5), (5.6) oraz fakt, iż  $e_1 \neq 0$  implikują, że

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|e_1(m)\| = \infty, \quad \text{oraz} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|e_2(m)\| = 0.$$

Stąd

$$\|e'_2(m)\| = \|e_1(m) + e_2(m)\| \geq \|e_1(m)\| - \|e_2(m)\| \longrightarrow \infty, \quad \text{przy } m \rightarrow \infty,$$

co prowadzi do sprzeczności z (5.8).

W konsekwencji  $E_i = E'_i$ ,  $i = 1, 2$ , czyli

$$P = P' \in \mathcal{A}.$$

By zakończyć dowód przypomnijmy (Lemat 5.3), że operator  $T$  komutuje z  $P$  oraz zauważmy, że  $TS(1 - P) = (1 - P)$ , gdyż  $E_2 = TSE_2 = (1 - P)E$ . Stąd

$$\delta(P) = TPS = PTS = P\delta(1), \quad \text{czyli,} \quad \chi_{\alpha^{-1}(\omega)} = \chi_\omega \cdot \chi_{\Delta_1} = \chi_{\omega \cap \Delta_1},$$

$$\delta(1 - P) = T(1 - P)S = TS(1 - P) = 1 - P, \quad \text{czyli,} \quad \chi_{\alpha^{-1}(X \setminus \omega)} = \chi_{X \setminus \omega}.$$

Z równości  $\alpha^{-1}(X \setminus \omega) = \chi_{X \setminus \omega}$  wynika, że  $X \setminus \omega \subset \Delta_\infty$ . Natomiast inkluzję  $\{x \in X : \hat{a}(x) = 0\} \subset \omega$  otrzymujemy wprost z określenia zbioru  $\omega$  i elementu  $b$ . ■

## 5.2 Opis zbioru $|\sigma(aT)|$

Stosując Twierdzenie 5.1 do odpowiednio przeskalowanego operatora  $aT$  otrzymujemy, że rzut Riesz odpowiedzący części widma  $\sigma(aT)$  leżącej wewnątrz koła o dowolnym promieniu leżącym poza  $|\sigma(aT)|$  należy do algebry  $\mathcal{A} \cong C(X)$ . W szczególności każdemu domknięto-otwartemu podzbiorni  $|\sigma(aT)|$  odpowiada domknięto-otwarty  $\alpha$ -niezmienniczy podzbiór  $X$ . Dokładniej mamy

**Twierdzenie 5.4.** *Niech  $I \subset [0, r(aT)]$  będzie zbiorem składającym się z lewych punktów końcowych spójnych składowych zbioru  $|\sigma(aT)|$ . Wtedy istnieje podział  $\{\omega_i\}_{i \in I}$  przestrzeni  $X$  na  $\alpha$ -niezmiennicze, domknięte zbiory takie, że*

$$i) \text{ jeśli } 0 \in I, \text{ to } X \setminus \Delta_\infty \cup \{x : \hat{a}(x) = 0\} \subset \omega_0,$$

$$ii) \text{ jeśli } i \in I \setminus \{0\}, \text{ to } \omega_i \subset \Delta_\infty \cap \{x : \hat{a}(x) \neq 0\}.$$

Ponadto dla każdego domknięto-otwartego podzbioru  $\Lambda$  zbioru  $|\sigma(aT)|$ , spektralnemu rzutowi Riesz  $P_\Lambda$  odpowiada funkcja charakterystyczna  $\chi_\omega \in C(X)$ , gdzie  $\omega = \bigcup_{i \in \Lambda} \omega_i$ .

**Dowód.** Niech  $U$  będzie spójną składową zbioru  $|\sigma(aT)|$ . Wtedy  $U$  jest albo punktem, albo domkniętym przedziałem, czyli  $U = [i_0, j_0]$ , gdzie ewentualnie  $i_0 = j_0$ . Załóżmy najpierw, że  $i_0 \neq 0$  i wybierzmy przedziały  $[l_n, r_n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tak, aby punkty końcowe  $l_n, r_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , nie leżały w  $|\sigma(aT)|$  oraz

$$U = [i_0, j_0] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [l_n, r_n].$$

Rozważmy rzuty Riesz  $P_{l_n, r_n}$  odpowiadające częściom widma leżącym w pierścieniach  $\{z \in \mathbb{C} : l_n < |z| < r_n\}$ . Z Twierdzenia 5.1 wynika, iż  $\hat{P}_{l_n, r_n} = \chi_{\omega_{l_n, r_n}} \in C(X)$



dla pewnego domknięto-otwartego,  $\alpha$ -niezmienniczego, niepustego zbioru  $\omega_{l_n, r_n} \subset X$  zawartego w  $\Delta_\infty \cap \{x : \hat{a}(x) \neq 0\}$  i takiego, że  $\alpha^{-1}(\omega_{l_n, r_n}) = \omega_{l_n, r_n}$ . Stąd zbiór

$$\omega_{i_0} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \omega_{l_n, r_n} \subset \Delta_\infty \cap \{x : \hat{a}(x) \neq 0\}$$

jest domknięty,  $\alpha$ -niezmienniczy i niepusty (jako przekrój scentrowanej rodziny zbiorów domkniętych).

Niech teraz  $U = [0, j_0]$  i niech  $[0, r_n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , będą przedziałami takimi, że  $r_n \notin |\sigma(aT)|$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = j_0$ . Rozważmy rzuty spektralne  $P_{0, r_n}$  odpowiadające częściom widma  $\sigma(aT)$  leżącym w kołach  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r_n\}$ . Zgodnie z Twierdzeniem 5.1 dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{P}_{0, r_n} = \chi_{\omega_{0, r_n}} \in C(X)$ , gdzie  $\omega_{0, r_n}$  jest domknięto-otwartym  $\alpha$ -niezmienniczym, niepustym podzbiorem  $X$  zawierającym  $X \setminus \Delta_\infty \cup \{x : \hat{a}(x) = 0\}$ . Zatem zbiór

$$\omega_0 := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \omega_{0, r_n}$$

jest domknięty,  $\alpha$ -niezmienniczy, niepusty i zawiera  $X \setminus \Delta_\infty \cup \{x : \hat{a}(x) = 0\}$ .

Jasne jest, że zdefiniowane powyżej elementy rodziny  $\{\omega_i\}_{i \in I}$  są parami rozłączne. Natomiast nie jest oczywiste, że suma  $\bigcup_{i \in I} \omega_i$  wypełnia całą przestrzeń  $X$ . Aby to wykazać rozważmy dla każdego  $i \in I \setminus \{0\}$  rosnący ciąg  $\{l_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  liczb nieleżących w  $|\sigma(aT)|$ , taki, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n^{(i)} = i$ . Połóżmy

$$\omega_{i, r(aT)} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \omega_{l_n^{(i)}, r(aT)},$$

gdzie  $\omega_{l_n^{(i)}, r(aT)}$  jest domknięto-otwartym zbiorem zadany przez rzut Riesza  $P_{l_n^{(i)}, r(aT)}$  odpowiadający części widma  $\sigma(aT)$  leżącej w pierścieniu o promieniach  $l_n^{(i)}$  i  $r(aT)$ . Dla  $i = 0$  połóżmy  $\omega_{0, r(aT)} = X$  i załóżmy nie wprost, że istnieje  $x_0 \notin \bigcup_{i \in I} \omega_i$ . Oznaczmy przez  $i_0$  kres górny zbioru  $\{i \in I : x_0 \in \omega_{i, r(aT)}\} \subset [0, r(aT)]$ . Z definicji  $I$  oraz  $i_0$  wynika, że  $i_0 \in I$ . Skoro  $x_0 \notin \omega_{i_0} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \omega_{l_n, r_n}$ , to  $x_0 \notin \omega_{l_{n_0}, r_{n_0}}$  dla pewnego  $n_0$ , gdzie  $l_{n_0} < i_0 < r_{n_0}$ . Weźmy teraz  $i \in I$  takie, że  $l_{n_0} < i$  oraz  $x_0 \in \omega_{i, r(aT)}$ . Wtedy  $x_0 \in \omega_{i, r(aT)} \setminus \omega_{l_{n_0}, r_{n_0}} = \omega_{r_{n_0}, r(aT)}$ , co prowadzi do sprzeczności z wyborem  $i_0$ . ■

Korzystając z Twierdzenia 5.4 można otrzymać warunki na odwracalność operatora  $aT$ . Własność ta zależy od postaci otoczki  $Y = \text{hull}(J)$  ideału  $J = \{a \in \mathcal{A} : STa = a\}$  lub równoważnie widma algebry  $\mathcal{A}_+ = ST\mathcal{A} \oplus (1 - ST)\mathcal{A}$ , por. Stwierdzenie 1.26.

**Stwierdzenie 5.5.** *Operator  $aT$  jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy  $\hat{a}(x) \neq 0$ ,  $x \in X$  oraz  $X_+ = \Delta_1$  (czyli  $X = \Delta_1$  oraz  $Y = \emptyset$ ). W szczególności  $aT$  jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy odwracalne są oba operatory  $a$  oraz  $T$ .*

**Dowód.** Jeśli  $\hat{a}(x) = 0$  dla pewnego  $x \in X$ , lub  $X \neq \Delta_1$  (skąd  $X \neq \Delta_\infty$ ), to na mocy Twierdzenia 5.4,  $0 \in \sigma(aT)$ . Ponadto, jeśli  $Y \neq \emptyset$ , to  $ST \neq 1$  i  $T$  posiada nie trywialne jądro, por. Twierdzenie 1.12. Z drugiej strony jeśli założymy, że  $\hat{a}(x) \neq 0$ ,  $x \in X$  oraz  $X_+ = \Delta_1$ , to  $a$  jest operatorem odwracalnym (gdyż element  $\hat{a} \in C(X)$  jest odwracalny) oraz  $T$  jest odwracalną izometrią, gdyż  $TS = ST = 1$ , por. Stwierdzenie 1.26. ■

Stosując Twierdzenie 5.4 oraz rezultaty z podrozdziału 4.1 otrzymujemy

**Twierdzenie 5.6 (Opis  $|\sigma(aT)|$ ).** Niech  $aT$  będzie abstrakcyjnym operatorem przesunięcia na przestrzeni Banacha  $E$  z wagą w algebrze Banacha  $\mathcal{A}$ , Definicja 1.19. Niech  $\mathcal{A} \cong C(X)$  i niech  $(X, \alpha)$  będzie częściowym układem dynamicznym generowanym przez  $T$  na widmie algebry  $\mathcal{A}$ . Niech  $I$  będzie zbiorem składającym się z lewych punktów końcowych spójnych składowych zbioru  $|\sigma(aT)|$  i dla każdego  $i \in I$  niech  $i_+$  będzie prawym końcem spójnej składowej  $|\sigma(aT)|$  do której należy  $i$ , tj.

$$|\sigma(aT)| = \bigcup_{i \in I} [i, i_+].$$

Jeśli  $\{\omega_i\}_{i \in I}$  jest podziałem przestrzeni  $X$  na domknięte  $\alpha$ -niezmiennicze zbiory z Twierdzenia 5.4, to

$$i = \min_{\mu \in \text{Erg}(\omega_i, \alpha)} \exp \int_{\omega_i} \ln |\hat{a}(x)| d\mu, \quad i \in I \setminus \{0\},$$

$$i_+ = \max_{\mu \in \text{Erg}(\omega_i, \alpha)} \exp \int_{\omega_i} \ln |\hat{a}(x)| d\mu, \quad i \in I.$$

**Dowód.** Ustalmy  $i \in I \setminus \{0\}$  i niech  $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , będą odpowiednio niemalejącym oraz nierosnącym ciągiem nieujemnych liczb leżących poza  $|\sigma(aT)|$  takich, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = i, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = i_+.$$

Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  rzut Riesza  $P_{l_n, r_n}$  odpowiadający części widma  $aT$  leżącej w pierścieniu  $\{z \in \mathbb{C} : l_n < |z| < r_n\}$  należy do algebry  $\mathcal{A}$  i  $\hat{P}_{l_n, r_n} = \chi_{\omega_{l_n, r_n}} \in C(X)$ , patrz Twierdzenie 5.1. Zbiory  $\{\omega_{l_n, r_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  tworzą ciąg zstępujący i  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \omega_{l_n, r_n} = \omega_i$ . Ustalmy  $n \in \mathbb{N}$ . Twierdzimy, że

$$l_n < \min_{\mu \in \text{Erg}(\omega_{l_n, r_n}, \alpha)} \exp \int_{\omega_{l_n, r_n}} \ln |\hat{a}(x)| d\mu \leq i, \quad (5.9)$$

$$i_+ \leq \max_{\mu \in \text{Erg}(\omega_{l_n, r_n}, \alpha)} \exp \int_{\omega_{l_n, r_n}} \ln |\hat{a}(x)| d\mu < r_n. \quad (5.10)$$

Rzeczywiście, na przestrzeni  $E_{l_n, r_n} := P_{l_n, r_n} E$  operator  $aT$  jest odwracalny, a stąd

$$[i, i_+] \subset |\sigma(aT|_{E_{l_n, r_n}})| \subset \left[ r \left( (aT|_{E_{l_n, r_n}})^{-1} \right)^{-1}, r(aT|_{E_{l_n, r_n}}) \right] \subset (l_n, r_n).$$

Ponadto, w świetle Twierdzenia 4.5 mamy

$$r(aT|_{E_{l_n, r_n}}) = \max_{\mu \in \text{Erg}(\omega_{l_n, r_n}, \alpha)} \exp \int_{\omega_{l_n, r_n}} \ln |\hat{a}(x)| d\mu,$$

co dowodzi (5.9). Natomiast następujący rachunek

$$\begin{aligned} (aT|_{E_{l_n, r_n}})^{-1} &= T^{-1} a^{-1}|_{E_{l_n, r_n}} = S a^{-1}|_{E_{l_n, r_n}} = S T S a^{-1}|_{E_{l_n, r_n}} \\ &= S a^{-1} T S = S a^{-1} T S|_{E_{l_n, r_n}}, \end{aligned}$$

Wniosek 4.8 oraz Twierdzenie 4.5 implikują, że

$$r \left( (aT|_{E_{l_n, r_n}})^{-1} \right) = \max_{\mu \in \text{Erg}(\omega_{l_n, r_n}, \alpha)} \exp \int_{\omega_{l_n, r_n}} \ln |\hat{a}^{-1}(x)| d\mu$$

$$= \max_{\mu \in \text{Erg}(\omega_{l_n, r_n}, \alpha)} \exp - \int_{\omega_i} \ln |\hat{a}(x)| d\mu = \left( \min_{\mu \in \text{Erg}(\omega_{l_n, r_n}, \alpha)} \exp \int_{\omega_{l_n, r_n}} \ln |\hat{a}(x)| d\mu \right)^{-1},$$

co dowodzi (5.10).

Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  niech  $\mu_n \in \text{Erg}(\omega_{l_n, r_n}, \alpha)$  będzie miarą, dla której realizuje się minimum w (5.9), a  $\nu_n \in \text{Erg}(\omega_{l_n, r_n}, \alpha)$  miarą, dla której realizuje się maksimum w (5.10). Ciągi  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{Inv}(X, \alpha)$  posiadają w  $*$ -słabej topologii punkty skupienia, powiedzmy  $\mu_0, \nu_0 \in \text{Inv}(X, \alpha)$ . Nośniki miar  $\mu_0, \nu_0$  zawarte są w  $\omega_i = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \omega_{l_n, r_n}$ , więc  $\mu_0, \nu_0 \in \text{Inv}(\omega_i, \alpha)$ . Z relacji (5.9), (5.10) wynika, że

$$i = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \int_{\omega_{l_n, r_n}} \ln |\hat{a}(x)| d\mu_n = \exp \int_{\omega_{l_n, r_n}} \ln |\hat{a}(x)| d\mu_0,$$

$$i_+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \int_{\omega_{l_n, r_n}} \ln |\hat{a}(x)| d\nu_n = \exp \int_{\omega_{l_n, r_n}} \ln |\hat{a}(x)| d\nu_0.$$

Zatem, por. Uwaga 4.6 i), mamy

$$\min_{\mu \in \text{Erg}(\omega_i, \alpha)} \exp \int_{\omega_i} \ln |\hat{a}(x)| d\mu \leq \exp \int_{\omega_{l_n, r_n}} \ln |\hat{a}(x)| d\mu_0 = i,$$

$$\max_{\mu \in \text{Erg}(\omega_i, \alpha)} \exp \int_{\omega_i} \ln |\hat{a}(x)| d\mu \geq \exp \int_{\omega_{l_n, r_n}} \ln |\hat{a}(x)| d\nu_0 = i_+,$$

co w świetle (5.9), (5.10) daje tezę dowodzonego twierdzenia dla  $i \neq 0$ . Dla  $i = 0$  wystarczy powtórzyć powyższe rozumowanie rozważając w miejsce rzutów  $P_{l_n, r_n}$  rzuty spektralne  $P_{r_n}$  odpowiadające częściom widma  $aT$  leżącym w kołach  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r_n\}$ . ■

Przedyskutujmy tezę powyższego twierdzenia na najprostszym możliwym przykładzie jakim jest standardowy operator mnożenia.

**Przykład 5.7.** Niech  $\mathcal{A}$  będzie algebrą operatorów mnożenia przez ciągi ograniczone na przestrzeni  $E = \ell^p(\mathbb{N})$ ,  $p \in [1, \infty]$  i niech  $T$  będzie operatorem identycznościowym. Wtedy element  $a \in \mathcal{A}$  możemy traktować jako abstrakcyjny ważony operator przesunięcia  $aT = a$ , gdzie  $T = 1$  generuje na widmie algebry  $\mathcal{A}$  układ  $(\beta(\mathbb{N}), \alpha)$ ,  $\alpha = id$ . Niech teraz  $D \subset \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  będzie dowolnym zbiorem zwartym. Ustawiając w ciąg  $a = (a(0), a(1), \dots)$  dowolny przeliczalny i gęsty podzbiór  $D$  otrzymujemy, że  $a \in \mathcal{A}$  oraz

$$\sigma(aT) = |\sigma(aT)| = D.$$

Z Twierdzenia 5.6 wynika, że istnieje podział  $\{\omega_i\}_{i \in I}$  przestrzeni  $\beta(\mathbb{N})$  na podzbiory domknięte takie, że rodzina  $\{D_i\}_{i \in I}$ , gdzie

$$D_i = \{t \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} : \min_{x \in \omega_i} \hat{a}(x) \leq t \leq \max_{x \in \omega_i} \hat{a}(x)\}. \quad i \in I,$$

jest podziałem  $D$  na spójne składowe. Na odwrót, jeśli  $a \in \mathcal{A}$  i  $\{D_i\}_{i \in I}$  jest podziałem na spójne składowe zbioru

$$D := \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} |a(n)|},$$

to  $|\sigma(aT)| = D$  i zbiory

$$\omega_i = \overline{\{n \in \mathbb{N} : a(n) \in D_i\}} \subset \beta(\mathbb{N})$$

tworzą podział  $\{\omega_i\}_{i \in I}$  przestrzeni  $\beta(\mathbb{N})$  na ( $\alpha$ -niezmiennicze) podzbiory domknięte. Zauważmy jednak, że nie każdy podział przestrzeni  $\beta(\mathbb{N})$  na domknięte  $\alpha$ -niezmiennicze podzbiory można otrzymać w ten sposób. Na przykład, gdyby operatorowi  $a$  odpowiadał podział  $\beta(\mathbb{N})$  składający się ze zbiorów jednoelementowych, to operator  $a$  generowałby algebrę  $\mathcal{A} \cong C(\beta(\mathbb{N}))$ , co z kolei oznaczałoby, że przestrzeń  $\beta(\mathbb{N})$  jest metryzowalna, a nie jest to prawdą.

### 5.3 Oszacowania ilości spójnych składowych $|\sigma(aT)|$ niezależne od wagi $a$

W świetle Twierdzenia 5.6 liczba spójnych składowych zbioru  $|\sigma(aT)|$  jest nie większa niż maksymalna moc podziału przestrzeni  $X$  na domknięte podzbiory  $\alpha$ -niezmiennicze. Do analizy większości rozpatrywanych przez nas przykładów wystarczy jednak następujący bezpośredni wniosek z Twierdzenia 5.1.

**Twierdzenie 5.8.** *Jeśli  $X$  posiada skończoną liczbę  $2^k$  domknięto-otwartych zbiorów  $\alpha$ -niezmienniczych, to ilość spójnych składowych  $|\sigma(aT)|$  nie przekracza  $k$ .*

**Dowód.** Jeśli ilość spójnych składowych  $|\sigma(aT)|$  przekraczałaby  $k$ , to w szczególności istniałoby  $k+1$  takich składowych, które dałoby się rozdzielić krzywymi zamkniętymi. W świetle Twierdzenia 5.1 odpowiadałoby im wtedy  $k+1$  rozłącznych niepustych domknięto-otwartych,  $\alpha$ -niezmienniczych podzbiorów  $X$ . Biorąc sumy tychże zbiorów otrzymalibyśmy  $2^{k+1}$  różnych domknięto-otwartych,  $\alpha$ -niezmienniczych podzbiorów  $X$ . ■

Operator  $aT$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , możemy rozważać zarówno jako abstrakcyjny ważony operator przesunięcia z wagą w algebrze  $\mathcal{A}$  jak i w algebrze  $\mathcal{B} = \overline{\text{span}} \{ \bigcup_{n=0}^{\infty} S^n \mathcal{A} T^n \}$ . Zatem stosując Twierdzenie 5.6 możemy szacować ilość składowych  $|\sigma(aT)|$  zarówno za pomocą wyjściowego układu  $(X, \alpha)$  jaki i rozszerzonego, odwracalnego układu dynamicznego  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  generowanego przez  $T$  na widmie  $\mathcal{B}$ , por. Twierdzenie 1.23. Aby porównać otrzymane w ten sposób wyniki przydatne będą następujące oznaczenia.

**Definicja 5.9.** Niech  $(X, \alpha)$  będzie częściowym układem dynamicznym. Rodzinę wszystkich podziałów  $\{\omega_i\}_{i \in I}$  przestrzeni  $X$  na  $\alpha$ -niezmiennicze, domknięte, niepuste zbiory, takie, że

$$X \setminus \Delta_{\infty} \subset \omega_{i_0}, \quad \text{dla pewnego } i_0 \in I, \quad (5.11)$$

będziemy oznaczać przez  $\mathcal{P}(X, \alpha)$ . Natomiast największą liczbą kardynalną postaci  $|\{\omega_i\}_{i \in I}| = |I|$ , gdzie  $\{\omega_i\}_{i \in I} \in \mathcal{P}(X, \alpha)$  będziemy oznaczać przez  $\mathcal{N}(X, \alpha)$ .

Można pokazać (uzupełnienia, Twierdzenie C.4), że każdemu podziałowi  $\{\omega_i\}_{i \in I}$  przestrzeni  $X$  na domknięte zbiory  $\alpha$ -niezmiennicze, odpowiada podział  $\{\tilde{\omega}_i\}_{i \in I}$  przestrzeni  $\tilde{X}$  na domknięte zbiory  $\tilde{\alpha}$ -niezmiennicze takie, że  $\omega_i = \Phi(\tilde{\omega}_i)$ ,  $i \in I$ , gdzie  $\Phi$  jest rzutem (1.22). Z drugiej strony, dla pewnego podziału  $\{\tilde{\omega}_i\}_{i \in I}$  przestrzeni  $\tilde{X}$  na domknięte zbiory  $\tilde{\alpha}$ -niezmiennicze może się zdarzyć, iż  $\Phi(\tilde{\omega}_i) \cap \Phi(\tilde{\omega}_j) \neq \emptyset$ ,  $i \neq j$  (por. Przykład C.5). Uwaga ta zdawałaby się więc sugerować nierówność

$\mathcal{N}(X, \alpha) \leq \mathcal{N}(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$ . Tymczasem jednak warunek (5.11) „wymusza” nierówność przeciwną  $\mathcal{N}(X, \alpha) \geq \mathcal{N}(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$ . Różnica między  $\mathcal{N}(X, \alpha)$  i  $\mathcal{N}(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$  zależy jedynie od zbioru  $Y$ .

**Twierdzenie 5.10.** *Niech  $(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$  będzie naturalnym rozszerzeniem układu  $(X, \alpha)$  związany z domkniętym zbiorem  $Y \supset X \setminus \Delta_{-1}$ , Definicja 1.32. Każdy podział  $\{\widetilde{\omega}_i\}_{i \in I} \in \mathcal{P}(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$  zadaje warunkiem*

$$\omega_i = \Phi(\widetilde{\omega}_i), \quad i \in I,$$

podział  $\{\omega_i\}_{i \in I} \in \mathcal{P}(X, \alpha)$  i odpowiedniość ta ustala iniekcję  $\mathcal{P}(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$  w  $\mathcal{P}(X, \alpha)$ . Ponadto, jeśli  $Y$  zawarty jest w najmniejszym, domkniętym,  $\alpha$ -niezmienniczym zbiorze zawierającym  $X \setminus \Delta_\infty$  (w szczególności jeśli  $Y = \overline{X \setminus \Delta_{-1}}$ ), to powyższa odpowiedniość jest bijekcją.

**Dowód.** Z Twierdzenia C.4 wynika, że podziałowi  $\{\widetilde{\omega}_i\}_{i \in I} \in \mathcal{P}(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$  odpowiada rodzina  $\{\omega_i\}_{i \in I}$  składająca się z domkniętych zbiorów  $\alpha$ -niezmienniczych. Oczywiście  $\bigcup_{i \in I} \omega_i = X$ , gdyż  $\Phi$  jest suriekcją. Skoro  $\widetilde{X} \setminus \widetilde{\Delta}_\infty \subset \widetilde{\omega}_{i_0}$  dla pewnego  $i_0 \in I$ , to inkluzja  $\Phi(\widetilde{X} \setminus \widetilde{\Delta}_\infty) \supset X \setminus \Delta_\infty$  pokazuje, że  $X \setminus \Delta_\infty \subset \omega_{i_0}$ . Aby wykazać rozłączność zbiorów  $\{\omega_i\}_{i \in I}$  ustalmy indeksy  $i, j \in I$  i założymy, że  $x \in \omega_i \cap \omega_j$ . Jeśli  $x \notin \Delta_{+\infty}$ , to  $\Phi^{-1}(x) \subset \widetilde{X} \setminus \widetilde{\Delta}_{+\infty} \subset \widetilde{\omega}_{i_0}$ , a stąd  $\widetilde{\omega}_i = \widetilde{\omega}_j = \widetilde{\omega}_{i_0}$ , czyli  $i = j$ . Jeśli natomiast  $x \in \Delta_{+\infty}$ , to położmy  $\omega := \{\alpha^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ . Zbiór  $\omega \subset \Delta_{+\infty}$  jest domknięty oraz  $\alpha(\omega) \subset \omega$ . Zatem zbiory

$$D_n = \{\tilde{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in \widetilde{X} : x_n \in \omega\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

tworzą zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych, skąd  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n \neq \emptyset$ . Ponadto,  $\alpha$ -niezmienniczość zbiorów  $\omega_i, \omega_j$  implikuje, że  $\omega \subset \omega_i \cap \omega_j$ . Biorąc więc pod uwagę równość

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = (\omega \times \omega \times \omega \times \dots) \cap \widetilde{X}$$

oraz zależność (C.1) zbiorów  $\widetilde{\omega}_i, \widetilde{\omega}_j$  od zbiorów  $\omega_i, \omega_j$  otrzymujemy, że  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n \subset \widetilde{\omega}_i \cap \widetilde{\omega}_j$ , a stąd  $i = j$ .

By pokazać drugą część tezy założymy, że  $Y$  jest zawarty w każdym domkniętym,  $\alpha$ -niezmienniczym zbiorze zawierającym  $X \setminus \Delta_\infty$  i niech  $\{\omega_i\}_{i \in I} \in \mathcal{P}(X, \alpha)$ . Wtedy  $X \setminus \Delta_\infty \subset Y \subset \omega_{i_0}$  dla pewnego  $i_0 \in I$ . Twierdzenie C.4 zapewnia istnienie podziału  $\{\widetilde{\omega}_i\}_{i \in I}$  przestrzeni  $\widetilde{X}$  na domknięte,  $\widetilde{\alpha}$ -niezmiennicze zbiory, takie że  $\Phi(\widetilde{\omega}_i) = \omega_i$ ,  $i \in I$ . Jedynym co potrzebujemy pokazać jest inkluzja  $\widetilde{X} \setminus \widetilde{\Delta}_\infty \subset \widetilde{\omega}_{i_0}$ . Jeśli jednak  $\tilde{x} = (x_0, x_1, \dots) \in \widetilde{X} \setminus \widetilde{\Delta}_\infty$ , to albo  $\tilde{x} \notin \widetilde{\Delta}_{+\infty}$  i wtedy  $\Phi(\tilde{x}) = x_0 \in X \setminus \Delta_{+\infty} \subset \omega_0$ , czyli  $\tilde{x} \in \widetilde{\omega}_{i_0}$ , albo  $\tilde{x} \in \widetilde{\Delta}_{-\infty}$  i wtedy  $\tilde{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$ , gdzie  $x_n \in Y \subset \omega_0$ , czyli  $x_0 = \alpha^n(x_n) \in \omega_0$  i  $\tilde{x} \in \widetilde{\omega}_{i_0}$ . Zatem  $\widetilde{X} \setminus \widetilde{\Delta}_\infty \subset \widetilde{\omega}_{i_0}$  i dowód jest zakończony. ■

**Wniosek 5.11.** *Dla dowolnego domkniętego zbioru  $Y \supset X \setminus \Delta_{-1}$  mamy*

$$\mathcal{N}(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha}) = \mathcal{N}(X_+, \alpha_+) \leq \mathcal{N}(X, \alpha),$$

gdzie  $(X_+, \alpha_+)$  jest układem opisanym w Stwierdzeniu 1.26. W szczególności, jeśli  $aT$  jest operatorem przesunięcia z wagą w algebrze  $\mathcal{A} \cong C(X)$  takim, że  $\{a \in \mathcal{A} : STa = a\} \cong C_Y(X)$ , to ilość składowych zbioru  $|\sigma(aT)|$  nie przekracza liczby  $\mathcal{N}(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha}) = \mathcal{N}(X_+, \alpha_+)$ .

**Dowód.** Równość  $\mathcal{N}(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha}) = \mathcal{N}(X_+, \alpha_+)$  wynika z Twierdzenia 5.10. By wykazać nierówność  $\mathcal{N}(X_+, \alpha_+) \leq \mathcal{N}(X, \alpha)$  weźmy podział  $\{\omega'_i\}_{i \in I} \in \mathcal{P}(X_+, \alpha_+)$  przestrzeni  $X_+ = Y \sqcup \Delta_{-1}$  zauważmy, że dla pewnego  $i_0 \in I$  mamy  $\omega'_{i_0} = Y \sqcup \omega_{i_0, \Delta_{-1}}$ , gdzie  $\Delta_{-1} \setminus \Delta_\infty \subset \omega_{i_0, \Delta_{-1}} \subset \Delta_{-1}$ . Połóżmy

$$\omega_{i_0} := X \setminus \Delta_{-1} \cup \omega_{i_0, \Delta_{-1}}$$

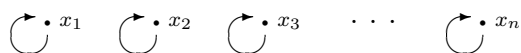
Wtedy  $X \setminus \Delta_\infty \subset \omega_{i_0}$  i  $\alpha_+$ -niezmienniczość  $\omega'_{i_0}$  implikuje  $\alpha$ -niezmienniczość  $\omega_{i_0}$ . Kładąc  $\omega_i := \omega'_i$ , dla  $i \neq i_0$ , otrzymujemy podział  $\{\omega_i\}_{i \in I}$  będący elementem  $\mathcal{P}(X, \alpha)$ . Jasnym jest, że w ten sposób skonstruowaliśmy różnowartościowe odwzorowanie z  $\mathcal{P}(X_+, \alpha_+)$  w  $\mathcal{P}(X, \alpha)$ , zachowujące ilość elementów w podziałach. Teraz wystarczy zastosować Twierdzenie 5.4. ■

Zauważmy, że im większy jest zbiór  $Y$ , tym mniejsza jest liczba  $\mathcal{N}(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha}) = \mathcal{N}(X_+, \alpha_+)$ . W szczególności jeśli  $Y = X$ , to zawsze  $\mathcal{N}(X_+, \alpha_+) = \mathcal{N}(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha}) = 1$ .

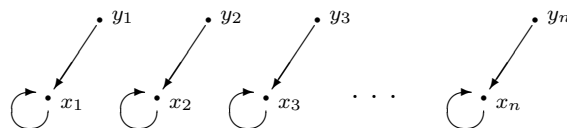
**Przykład 5.12.** Niech  $T_{\mathbb{N}}, S_{\mathbb{N}}$  będą operatorami przesunięcia na przestrzeni  $E_0 = \ell^p(\mathbb{N})$ ,  $p \in [1, \infty]$  i niech  $\mathcal{A}_0 \subset L(E_0)$  będzie algebrą operatorów mnożenia przez ciągi stałe. Ustalmy  $n > 0$  i połóżmy

$$E = \underbrace{E_0 \oplus \dots \oplus E_0}_n, \quad \mathcal{A} = \underbrace{\mathcal{A}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_0}_n, \quad T = \underbrace{T_{\mathbb{N}} \oplus \dots \oplus T_{\mathbb{N}}}_n, \quad S = \underbrace{S_{\mathbb{N}} \oplus \dots \oplus S_{\mathbb{N}}}_n.$$

Wtedy operator  $T \in L(E)$  generuje na widmie algebry  $\mathcal{A} \subset L(E)$  układ dynamiczny  $(X, \alpha)$ , gdzie  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  i  $\alpha(x_i) = x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ :



Na widmie algebry  $\mathcal{A}_+$  generowanej przez  $\mathcal{A}$  i rzut  $ST$ , operator  $T$  generuje układ  $(X_+, \alpha_+)$ , gdzie  $X_+ = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$  i  $\alpha(\{x_i, y_i\}) = x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ :



Wprost z Definicji 5.9 mamy, więc

$$\mathcal{N}(X, \alpha) = n, \quad \mathcal{N}(X_+, \alpha_+) = 1.$$

Warto tu wspomnieć, że dla dowolnego  $a = a_1 \oplus \dots \oplus a_n \in \mathcal{A}$  widmo operatora  $aT$  ma dokładnie jedną spójną składową, a dokładniej

$$\sigma(aT) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(aT)\}, \quad \text{gdzie} \quad r(aT) = \max_{i=1, \dots, n} |a_i|.$$

Wagę  $a$  abstrakcyjnego ważonego operatora przesunięcia można rozważać jako element różnych algebr wag i jak pokazuje Przykład 5.7, aby oszacowania z Wniosku 5.11 były sensowne, należy rozpatrywać odpowiednią algebrę.

**Przykład 5.13.** Niech  $a$  będzie, tak jak w Przykładzie 5.7, operatorem mnożenia w przestrzeni  $E = \ell^p(\mathbb{N})$ ,  $p \in [1, \infty]$ , rozpatrywanym jako abstrakcyjny operator przesunięcia z wagą w algebrze operatorów diagonalnych  $\mathcal{A}_1 \cong C(\beta(\mathbb{N}))$ . W ogólności liczba składowych zbioru  $|\sigma(a)|$  nie przekracza

$$\mathcal{N}(\beta(\mathbb{N}), id) = |\beta(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}.$$

Ale jeśli, na przykład, operator  $a$  mnoży przez ciąg  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ , to możemy rozpatrywać go jako operator z wagą w algebrze  $\mathcal{A}_2 \cong C(\overline{\mathbb{N}})$  operatorów mnożenia przez ciągi zbieżne, a wtedy liczba

$$\mathcal{N}(\overline{\mathbb{N}}, id) = |\overline{\mathbb{N}}| = \aleph_0$$

pokrywa się z ilością składowych widma  $\sigma(a)$ .

## Uwagi do rozdziału 5

W przypadku, gdy  $T$  jest *odwracalną izometrią* taką, że  $TAT^{-1} = \mathcal{A}$  opis rzutu Riesz'a odpowiadającego składowej zbioru  $|\sigma(aT)|$  otrzymał A. V. Lebedev w [Leb79], [Leb80], gdzie skonstruował on również suriektywne przyporządkowanie spójnych składowych zbioru  $|\sigma(aT)|$  spójnym składowym  $M(\alpha, V(a))$  widma pewnej algebry  $\mathcal{A}(\alpha, V(a)) \subset \mathcal{A}$ , patrz [AL94, Tw. 7.2, 7.7]. Wykazane w tym rozdziale Twierdzenie 5.1 jest uogólnieniem odpowiedniego rezultatu A. V. Lebedeva na przypadek rozpatrywanych przez nas operatorów generujących (na ogół) *nieodwracalne* układy dynamiczne. Istotnie zaś różni się nasze podejście do szacowania ilości spójnych składowych zbioru  $|\sigma(aT)|$ . W Twierdzeniu 5.4 skonstruowaliśmy bijekcję między w spójnymi składowymi  $|\sigma(aT)|$ , a elementami  $\{\omega_i\}_{i \in I}$  podziału przestrzeni  $X$ , co umożliwiło nam w Twierdzeniu 5.6 opis zbioru  $|\sigma(aT)|$ .

W dowodzie Twierdzenia 5.10 opieraliśmy się na rezultatach dotyczących relacji między zbiorami  $\alpha$ -niezmienniczymi i  $\tilde{\alpha}$ -niezmienniczymi otrzymanymi przez autora w pracy [Kwa05'], por. uzupełnienia C.





# Rozdział 6

## Widmo ważonych operatorów przesunięcia w przestrzeni Hilberta

W tym rozdziale zakończymy *pierwszy*, istotny etap badań nad widmem abstrakcyjnych ważonych operatorów przesunięcia  $aT$ ,  $a \in \mathcal{A}$ . Mianowicie, przedstawimy tu pełny opis widma  $\sigma(aT)$ , przy założeniu, że operatory  $aT$  działają w przestrzeni Hilberta, a układy dynamiczne przez nie generowane są topologicznie wolne. Głównym narzędziem, którym będziemy się posługiwać, oprócz rezultatów z poprzednich rozdziałów, jest Twierdzenie o Izomorfizmie. Twierdzenie to w zastosowaniu do operatorów  $aT$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , implikuje kołową symetrię widma  $\sigma(aT)$  oraz równość  $\sigma(aT) = \sigma_{ess}(aT)$ . Co więcej, jak pokażemy na przedstawionych przykładach, w naturalnych sytuacjach widmo operatora  $aT$  jest spójne, a więc jest kołem lub pierścieniem.

### 6.1 Układy topologicznie wolne i Twierdzenie o Izomorfizmie

W tym rozdziale  $H$  będzie przestrzenią Hilberta,  $\mathcal{A} \subset L(H)$   $C^*$ -algebrą,  $T \in L(H)$  częściową izometrią, a  $C^*(\mathcal{A}, T)$  będzie oznaczać  $C^*$ -algebrę generowaną przez  $\mathcal{A}$  i  $T$ .

Topologiczna wolność, z grubsza rzecz ujmując, jest własnością układu  $(X, \alpha)$  gwarantującą, że wszystkie  $C^*$ -algebry postaci  $C^*(\mathcal{A}, T)$ , gdzie  $T$  generuje na widmie  $\mathcal{A}$  ustalony układ dynamiczny  $(X, \alpha)$ , są parami izomorficzne. Własność ta, nie tylko implikuje, iż algebra  $C^*(\mathcal{A}, T)$  posiada pewne własności uniwersalne (jest izomorficzna z algebrą kowariancji, por. uzupełnienia), lecz również daje bardzo silne narzędzie do jej badania. Przypomnijmy, iż w klasycznym przypadku, gdy  $\alpha$  jest homeomorfizmem, układ  $(X, \alpha)$  nazywa się *topologicznie wolnym*, jeśli każdy zbiór punktów okresowych o ustalonym okresie ma puste wnętrze, patrz [Ant96], [AL94], [ELQ02], [Leb05]. Poniższa definicja, wprowadzona przez autora w [Kwa05', Definicja 5.12], jest uogólnieniem tego pojęcia na przypadek częściowych nieodwracalnych układów dynamicznych.

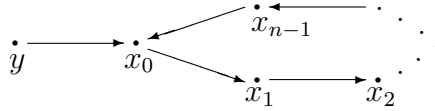
**Definicja 6.1.** Niech  $(X, \alpha)$  będzie częściowym układem dynamicznym i niech

$$F_n = \{x \in \Delta_n : \alpha^n(x) = x\} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}_+.$$

Układ  $(X, \alpha)$  będziemy nazywać *topologicznie wolnym*, jeśli dla każdego  $n \in \mathbb{N}_+$ , każdy niepusty podzbiór otwarty  $U \subset F_n$  przecina niepusto pewien cykl

$$\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\} \subset F_n, \quad \alpha(x_k) = x_{k+1 \pmod n}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

dla którego istnieje *ujście*, to jest taki punkt  $y \in \Delta_1 \setminus F_n$ , że  $\alpha(y) \in \{x_0, x_1, \dots\}$ , patrz Rysunek 6.1.



Rysunek 6.1: Podukład  $(\{y, x_0, \dots, x_{n-1}\}, \alpha)$  topologicznie wolnego układu  $(X, \alpha)$ , który istnieje dla każdego niepustego podzbioru otwartego  $U \subset F_n$ .

Następującą charakterystykę topologicznej wolności wykorzystamy w dowodzie Twierdzenia 8.6, por. też [ELQ02], [Leb05].

**Lemat 6.2.** *Następujące warunki są równoważne:*

- i) układ  $(X, \alpha)$  jest topologicznie wolny
- ii) dla każdego niepustego otwartego podzbioru  $U \subset X$  i liczby  $n > 0$  istnieją: liczba  $m \in \mathbb{N}$  oraz niepusty otwarty podzbiór  $V \subset \Delta_m$  takie, że

$$\alpha^m(V) \subset U, \quad \alpha^{m+k}(V \cap \Delta_{m+k}) \cap V = \emptyset, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Ponadto, jeśli  $\alpha$  jest różnowartościowe, to powyższe warunki są równoważne następującemu

- iii) dla każdego niepustego zbioru otwartego  $U$  i liczby  $n \in \mathbb{N}$  istnieje otwarty niepusty podzbiór  $V \subset U$ , taki, że zbiory  $\alpha^k(V \cap \Delta_k)$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ , są parami rozłączne.

**Dowód.** i)  $\Rightarrow$  ii). Jeśli  $U \setminus \bigcup_{k=1}^n F_k \neq \emptyset$ , to ii) zachodzi dla  $V = U \setminus \bigcup_{k=1}^n F_k$  oraz  $m = 0$ . W przeciwnym razie  $U \subset \bigcup_{k=1}^n F_k$ , a stąd  $\text{Int}(U \cap F_{k_0}) \neq \emptyset$ , dla pewnego  $k_0 = 1, \dots, n$ . Z definicji topologicznej wolności istnieje oraz  $y \in \Delta_1 \setminus F_{k_0}$  taki, że  $\alpha^m(y) \in \text{Int}(U \cap F_{k_0})$  dla pewnego  $m = 1, \dots, k_0$ . Wystarczy teraz wybrać otwarte otoczenie  $V \subset \Delta_m \setminus F_{k_0}$  punktu  $y$  takie, że  $\alpha^m(V) \subset U \cap F_{k_0}$ .

ii)  $\Rightarrow$  i). Niech  $U \subset F_n$  będzie niepustym zbiorem otwartym. Z założenia dla dowolnego  $N > 0$  istnieje  $m \in \mathbb{N}$  oraz niepusty zbiór otwarty  $V \subset \Delta_m$  taki, że  $\alpha^m(V) \subset U$  i  $\alpha^{m+k}(V \cap \Delta_{m+k}) \cap V = \emptyset$ , dla  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Biorąc  $N$  większe niż  $n$  otrzymujemy, że  $V \cap F_n = \emptyset$  i w szczególności  $m > 0$ . Weźmy dowolny  $y_0 \in V$ , oznaczmy  $x_k := \alpha^{m+k}(y_0)$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ , i niech  $m_0 = 0, \dots, m-1$  będzie największą liczbą taką, że  $\alpha^{m_0}(y_0) \notin F_n$ . Wtedy punkty  $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\} \subset F_n$  tworzą cykl, który posiada „ujście”  $y := \alpha^{m_0}(y_0) \in \Delta_1 \setminus F_n$ . Stąd układ  $(X, \alpha)$  jest topologicznie wolny.

iii)  $\Rightarrow$  ii). Wystarczy położyć  $m = 0$ .

$i) \Rightarrow iii)$ . Z różnowartościowości  $\alpha$  wynika, to każdy zbiór  $F_n$  ma puste wnętrze. Zatem dla każdego niepustego, otwartego zbioru  $U$  mamy  $U \not\subseteq \bigcup_{k=1}^n F_k$  i kładąc  $V := U \setminus \bigcup_{k=1}^n F_k$  otrzymujemy  $iii)$ . ■

Związek między topologiczną wolnością układu  $(X, \alpha)$  i jego naturalnego rozszerzenia  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$ , który doprowadził autora w [Kwa05'] do Definicji 6.1, w obecnym nieco szerszym ujęciu staje się bardziej subtelny. Dokładniej, z [Kwa05', Tw. 5.12] wynika, że układ  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  jest topologicznie wolny wtedy i tylko wtedy, gdy topologicznie wolny jest układ  $(X_+, \alpha_+)$  opisany w Stwierdzeniu 1.26; natomiast w naszych rozważaniach para  $(X_+, \alpha_+)$  nie jest jednoznacznie wyznaczona przez  $(X, \alpha)$  – zależy od zbioru  $Y$ . Na przykład, niezależnie od wyjściowego częściowego układu dynamicznego  $(X, \alpha)$ , kładąc  $Y = X$ , układ  $(X_+, \alpha_+)$  zawsze jest topologicznie wolny, por. Stwierdzenie 1.26. W ogólności możemy jedynie powiedzieć, co następuje.

**Stwierdzenie 6.3.** *Niech  $(X, \alpha)$  będzie układem dynamicznym,  $Y \supset X \setminus \Delta_{-1}$  zbiorem domkniętym, a  $(X_+, \alpha_+)$  układem opisanym w Stwierdzeniu 1.26. Wtedy*

- i) jeśli układ  $(X, \alpha)$  jest topologicznie wolny, to  $(X_+, \alpha_+)$  jest topologicznie wolny,*
- ii) jeśli  $Y = \overline{X \setminus \Delta_{-1}}$  i układ  $(X_+, \alpha_+)$  jest topologicznie wolny, to  $(X, \alpha)$  jest topologicznie wolny.*

**Dowód.** Punkt  $i)$  jest oczywisty. By wykazać  $ii)$  załóżmy, że  $Y = \overline{X \setminus \Delta_{-1}}$  i niech  $(X_+, \alpha_+)$  jest a  $(X, \alpha)$  nie jest topologicznie wolny. Wtedy, istnieje otwarty niepusty podzbiór  $U \subset F_n = \{x \in \Delta_n : \alpha^n(x) = x\}$  taki, że  $\alpha^{-k}(U) \subset F_n$ , dla  $k = 1, \dots, n$ . W szczególności zbiór  $V := \bigcup_{k=0}^{n-1} \alpha^{-k}(U)$  jest otwarty oraz  $V = \alpha^{-1}(V) = \alpha(V) \subset F_n \subset \Delta_{-1}$ . Na mocy topologicznej wolności układu  $(X_+, \alpha_+)$  istnieje  $y \in Y$  taki, że  $\alpha(y) \in V$ . Z konstrukcji  $V$ , mamy  $y \in V$  i zatem  $y \in V \cap Y \subset \Delta_{-1} \cap \overline{X \setminus \Delta_{-1}}$  leży na brzegu zbioru  $\Delta_{-1}$ . Stąd, jako że  $V$  jest otwartym otoczeniem  $y$ , otrzymujemy  $V \setminus \Delta_{-1} \neq \emptyset$ , co jest absurdem. ■

Powyższe stwierdzenie oraz wspomniany wyżej rezultat [Kwa05', Tw. 5.12] zastosowany do układu  $(X_+, \alpha_+)$  dają

**Twierdzenie 6.4.** *Naturalne rozszerzenie  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  częściowego układu dynamicznego  $(X, \alpha)$ , związane ze zbiorem  $Y$  jest topologicznie wolne wtedy tylko wtedy, gdy układ  $(X_+, \alpha_+)$  jest topologicznie wolny. W szczególności*

- i) jeśli układ  $(X, \alpha)$  jest topologicznie wolny, to  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  jest topologicznie wolny,*
- ii) jeśli  $Y = \overline{X \setminus \Delta_{-1}}$ , to topologiczna wolność któregokolwiek z układów  $(X, \alpha)$ ,  $(X_+, \alpha_+)$ ,  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  implikuje topologiczną wolność pozostałych.*

Poniżej przedstawione twierdzenie, w dalszej części pracy, wielokrotnie posłuży nam do badania własności spektralnych abstrakcyjnych operatorów przesunięcia z wagą. Twierdzenie to jest przeformułowaniem Twierdzenia B.2 zamieszczonego w uzupełnieniach.

**Twierdzenie 6.5 (Twierdzenie o Izomorfizmie).** *Niech  $(X, \alpha)$  będzie układem dynamicznym,  $Y \supset X \setminus \Delta_{-1}$  zbiorem domkniętym takim, że układ  $(X_+, \alpha_+)$  jest topologicznie wolny. Jeśli dla  $i = 1, 2$ ,  $\mathcal{A}_i$  jest  $C^*$ -algebrą operatorów na przestrzeni Hilberta  $H_i$ ,  $T_i \in L(H_i)$  jest częściowa izometrią i istnieje izomorfizm  $\pi_i : C(X) \rightarrow \mathcal{A}_i$*

taki, że

$$T_i \pi_i(a) T_i^* = \pi_i(\delta(a)), \quad T_i^* T_i \in \mathcal{A}'_i$$

oraz

$$\text{hull}(\{a \in C(X) : T_i^* T_i \pi_i(a) = \pi_i(a)\}) = Y,$$

gdzie  $\delta : C(X) \rightarrow C(X)$  jest endomorfizmem, którego odwzorowaniem dualnym jest  $\alpha$ , to przyporządkowanie

$$T_1 \mapsto T_2, \quad \pi_1(a) \mapsto \pi_2(a), \quad a \in C(X),$$

przedłuża się do izomorfizmu  $C^*(\mathcal{A}_1, T_1) \cong C^*(\mathcal{A}_2, T_2)$ . W szczególności obie algebry  $C^*(\mathcal{A}_i, T_i)$ ,  $i = 1, 2$ , są kanonicznie izomorficzne z algebrą kowariancji  $C^*(X, \alpha; Y)$ , patrz Definicja A.4.

## 6.2 Spektralne konsekwencje Twierdzenia o Izomorfizmie

W tym podrozdziale, tak jak w poprzednim, ustalamy przestrzeń Hilberta  $H$ ,  $C^*$ -algebrę  $\mathcal{A} \subset L(H)$  oraz częściową izometrię  $T \in L(H)$  generującą na widmie  $\mathcal{A}$  częściowy układ dynamiczny  $(X, \alpha)$ . Ponadto jako stałe założenie przyjmujemy tu, że

$$\text{układ } (X_+, \alpha_+) \text{ jest topologicznie wolny,}$$

gdzie  $(X_+, \alpha_+)$  jest częściowym układem dynamicznym generowanym przez  $T$  na widmie algebry  $\mathcal{A}_+ = C^*(\mathcal{A}, T^*T) = T^*T\mathcal{A} \oplus (1 - T^*T)\mathcal{A}$ . W szczególności, powyższe założenie jest automatycznie spełnione jeśli układ  $(X, \alpha)$  jest topologicznie wolny, por. Stwierdzenie 6.3, i możemy stosować Twierdzenie o Izomorfizmie.

### 6.2.1 Niezmienniczość widma ze względu na obroty

Pierwszym zastosowaniem Twierdzenia o Izomorfizmie jest

**Twierdzenie 6.6.** Niech  $V \in \mathcal{A}'$  będzie częściową izometrią taką, że  $TT^* \leq VV^*$  ora  $V^*V$ . Wtedy odwzorowanie

$$\Lambda_V(T) = VT, \quad \Lambda_V(a) = a, \quad a \in \mathcal{A},$$

przedłuża się do izomorfizmu z  $C^*(\mathcal{A}, T)$  na  $C^*(\mathcal{A}, VT)$ . W szczególności

- i) operator  $\sum_{n,m=0}^N T^{*m} a_{n,m} T^n$ , gdzie  $a_{n,m} \in \mathcal{A}$ , jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy odwracalny jest operator  $\sum_{n,m=0}^N \lambda^{n-m} T^{*m} a_{n,m} T^n$ , dla każdego  $\lambda \in S^1$ ,
- ii) dla każdego  $b \in \mathcal{B} = \overline{\text{span}}\{\cup_{n \in \mathbb{N}} T^{*n} \mathcal{A} T^n\}$  widmo  $\sigma(bT)$  operatora  $bT$  jest niezmiennicze ze względu na obroty wokół zera.

**Dowód.** Z jednej strony, skoro  $(VT)a(VT)^* = VTaT^*V^* = TaT^*VV^* = TaT^*$ , to operator  $VT$  generuje na  $\mathcal{A}$  ten sam endomorfizm, co operator  $T$ . Z drugiej strony mamy  $(VT)^*(VT) = T^*V^*VT = T^*V^*VTT^*T = T^*T$ . Zatem na mocy Twierdzenia 6.5,  $\Lambda$  przedłuża się do izomorfizmu. Biorąc  $V = \lambda 1$  gdzie  $\lambda \in S^1$  otrzymujemy podpunkt i). Podpunkt ii) wynika stąd, że operator  $\lambda - bT = \lambda(1 - \lambda^{-1}bT)$  jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy odwracalny jest element  $1 - bT$ . ■

Powyżej wykazaną niezmienniczość widma  $\sigma(aT)$  ze względu na obroty można również otrzymać przy słabszych założeniach, stosując np. Twierdzenie B.3, patrz Wniosek A.8. Jednakże poniższe rezultaty wyjaśniające, typowe dla operatorów ważonego przesunięcia zjawisko koincydencji widma  $\sigma(aT)$  z widmem istotnym  $\sigma_{ess}(aT)$ , por. [Ant96], [AL94], korzystają z Twierdzenia o Izomorfizmie w jego pełnej mocy.

## 6.2.2 Koincydencja widma z widmem istotnym

Przypomnijmy, iż *widmem istotnym*  $\sigma_{ess}(b)$  ograniczonego operatora liniowego  $b$  w przestrzeni Banacha nazywamy zbiór tych wartości  $\lambda \in \mathbb{C}$ , dla których operator  $b - \lambda 1$  nie jest operatorem Fredholma. Aby wyjaśnić związek między widmem oraz widmem istotnym w obecnie rozważanej sytuacji oznaczmy przez  $\mathcal{K}$  oznacza ideał operatorów zwartych w  $C^*$ -algebrze  $L(H)$  i przywołajmy znany fakt, patrz np. [Ant96, Twierdzenie 8.3], który mówi, że dla dowolnej  $C^*$ -algebry  $\mathcal{D} \subset L(H)$  następujące własności są równoważne

- a) każdy operator Fredholma w  $\mathcal{D}$  jest odwracalny,
- b)  $\mathcal{D} \cap \mathcal{K} = \{0\}$ .

Okazuje się, że algebra  $C^*(\mathcal{A}, T)$  spełnia równoważne warunki a), b), wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia je algebra  $\mathcal{A}_+ = C^*(\mathcal{A}, T^*T)$ .

**Twierdzenie 6.7.** *Jeśli  $\mathcal{A}_+ \cap \mathcal{K} = \{0\}$ , to  $C^*(\mathcal{A}, T) \cap \mathcal{K} = \{0\}$  i w szczególności*

$$\sigma(b) = \sigma_{ess}(b), \quad b \in C^*(\mathcal{A}, T).$$

**Dowód.** Rozważmy odwzorowanie ilorazowe  $q : C^*(\mathcal{A}, T) \rightarrow C^*(\mathcal{A}, T)/\mathcal{K}$ . Skoro  $\mathcal{A}_+ \cap \mathcal{K} = \emptyset$ , to  $q : \mathcal{A}_+ \rightarrow q(\mathcal{A}_+)$  jest izomorfizmem. W szczególności

$$\{a \in \mathcal{A} : T^*Ta = a\} = \{a \in \mathcal{A} : q(T)^*q(T)q(a) = q(a)\}$$

i dla każdego  $a \in \mathcal{A}$  mamy

$$q(T)q(a)q(T)^* = q(TaT^*) = q(\delta(a)).$$

Stąd oraz z Twierdzenia 6.5 (rozpatrując  $C^*(\mathcal{A}, T)/\mathcal{K}$  jako algebrę operatorów na pewnej przestrzeni Hilberta) otrzymujemy, iż  $q$  jest izomorfizmem, co kończy dowód twierdzenia. ■

**Uwaga 6.8.** Przy słabszym założeniu  $\mathcal{A} \cap \mathcal{K} = \{0\}$  powyższe twierdzenie przestaje być prawdziwe. Na przykład dla klasycznego operatora przesunięcia  $T_{\mathbb{N}}$  w przestrzeni  $H = \ell^2(\mathbb{N})$  (Przykład 1.13) i algebry  $\mathcal{A} = \{\lambda 1 : \lambda \in \mathbb{C}\} \subset L(H)$ , operator  $T_{\mathbb{N}}$  generuje

na widmie  $\mathcal{A}_+$  układ topologicznie wolny, por. Przykład 3.20, oraz  $\mathcal{A} \cap \mathcal{K} = \{0\}$ . Natomiast, znanym faktem jest i nie nietrudno sprawdzić, że

$$\sigma(T_{\mathbb{N}}) = D^2 \neq \sigma_{ess}(T_{\mathbb{N}}) = S^1.$$

Teza Twierdzenia 6.7 tu nie zachodzi, bowiem  $\mathcal{A}_+ \cap \mathcal{K} \neq \{0\}$ ,  $\mathcal{A}_+$  zawiera np. rzut  $1 - T_{\mathbb{N}}^*T_{\mathbb{N}}$  na podprzestrzeń jednowymiarową.

Jako wniosek z Twierdzenia 6.7 oraz faktu, że widmo przemiennej  $C^*$ -podalgebry  $L(H)$  zawierającej niezerowe operatory zwarte, musi posiadać punkty izolowane (patrz np. [AL94, Stw. 14.6]) otrzymujemy

**Twierdzenie 6.9.** *Jeśli przestrzeń  $X_+$  nie posiada punktów izolowanych, to*

$$\sigma(b) = \sigma_{ess}(b), \quad b \in C^*(\mathcal{A}, T).$$

Przypomnijmy, por. Stwierdzenie 1.26, że  $X_+ = Y \sqcup \Delta_{-1}$ , gdzie  $Y$  jest domkniętym podzbiorem  $X$  zawierającym  $X \setminus \Delta_{-1}$ . Oczywiście przestrzeń  $X_+$  nie posiada punktów izolowanych wtedy i tylko wtedy, gdy żaden ze składników prostych  $Y$ ,  $\Delta_{-1}$  takowych punktów nie posiada. Natomiast, jeśli  $(X, \alpha)$  jest dowolnym częściowym układem dynamicznym takim, że wewnątrz  $\Delta_{-1}$  nie jest puste, to zawsze istnieje domknięty podzbiór  $Y \subset X$  zawierający  $X \setminus \Delta_{-1}$  i posiadający punkt izolowany: np.  $Y = X \setminus \Delta_{-1} \cup \{x_0\}$ , gdzie  $x_0 \in \text{Int}(\Delta_{-1})$ .

Kolejną wersję Twierdzenia 6.7 można otrzymać w przypadku, gdy  $H = L_{\mu}^2(\Omega)$ , dla pewnej przestrzeni z miarą  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ . Wiadomo bowiem [Ant96, Tw. 8.4], że algebra operatorów mnożenia przez funkcje z  $L_{\mu}^{\infty}(\Omega)$  na przestrzeni  $L_{\mu}^2(\Omega)$  nie zawiera niezerowych operatorów zwartych wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mu$  jest miarą bez atomową.

**Stwierdzenie 6.10.** *Jeśli  $H = L_{\mu}^2(\Omega)$ , gdzie  $\mu$  jest miarą bezatomową,  $\mathcal{A} \subset L(H)$  składa się operatorów mnożenia i  $T^*T$  jest operatorem mnożenia, to*

$$\sigma(b) = \sigma_{ess}(b), \quad b \in C^*(\mathcal{A}, T).$$

**Dowód.** Jako że algebra  $\mathcal{A}_+ = C^*(\mathcal{A}, T^*T)$  składa się z operatorów mnożenia, wystarczy zastosować [Ant96, Tw. 8.4] oraz Twierdzenie 6.7. ■

### 6.3 Widmo ważonych operatorów przesunięcia na przestrzeni Hilberta

W rozdziale 5, w Twierdzeniu 5.6, dla ważonych operatorów przesunięcia  $aT$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , uzyskaliśmy opis zbioru  $|\sigma(aT)|$ . Rezultat ten oraz wyniki poprzedniego paragrafu pozwalają otrzymać pełny opis widma  $\sigma(aT)$  dla operatorów działających na przestrzeni Hilberta i generujących układy topologicznie wolne.

**Twierdzenie 6.11 (Opis widma  $\sigma(bT)$ ,  $b \in \mathcal{B}$ ).** *Niech  $aT$  będzie abstrakcyjnym operatorem przesunięcia na przestrzeni Hilberta  $H$  z wagą w  $C^*$ -algebrze  $\mathcal{A}$ . Niech  $(X, \alpha)$  oraz  $(X_+, \alpha_+)$  będą układami generowanym przez  $T$  odpowiednio na widmie  $\mathcal{A}$*

oraz widmie  $\mathcal{A}_+ = C^*(\mathcal{A}, T^*T)$  i niech  $(X_+, \alpha_+)$  będzie układem topologicznie wolnym. Dla każdego elementu  $b \in \mathcal{B} = \overline{\text{span}}\{\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{*n} \mathcal{A} T^n\}$  widmo

$$\sigma(bT) = \bigcup_{i \in I} P_i,$$

jest sumą rozłącznych pierścieni  $P_i = \{\lambda \in \mathbb{C} : r_i^- \leq |\lambda| \leq r_i^+\}$ ,  $i \in I \setminus \{0\}$ , a gdy operator  $bT$  jest nieodwracalny także, dysku  $P_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r_0^+\}$ , których promienie dane są następującymi wzorami:

i) jeśli  $b$  jest postaci  $b = a_0 + T^*a_1T + \dots + T^{*n}a_nT^n$ ,  $a_k \in \mathcal{A}$ , to istnieje podział  $\{\omega_i\}_{i \in I}$  przestrzeni  $X$  na domknięte  $\alpha$ -niezmiennicze zbiory, taki, że  $\omega_i \subset \Delta_\infty$ , dla  $i \in I \setminus \{0\}$ , a dla  $i \in I$  mamy

$$r_i^- = \min_{\mu \in \text{Erg}(\omega_i, \alpha)} \exp \int_{\omega_i} \ln \left| \sum_{k=0}^n \hat{a}_k(\alpha^{n-k}(x)) \right| d\mu,$$

$$r_i^+ = \max_{\mu \in \text{Erg}(\omega_i, \alpha)} \exp \int_{\omega_i} \ln \left| \sum_{k=0}^n \hat{a}_k(\alpha^{n-k}(x)) \right| d\mu.$$

W szczególności jeśli  $b = a \in \mathcal{A}$ , to

$$r_i^- = \min_{\mu \in \text{Erg}(\omega_i, \alpha)} \exp \int_{\omega_i} \ln |\hat{a}(x)| d\mu, \quad r_i^+ = \max_{\mu \in \text{Erg}(\omega_i, \alpha)} \exp \int_{\omega_i} \ln |\hat{a}(x)| d\mu.$$

ii) dla dowolnego  $b$ , jeśli  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  jest częściowym układem dynamicznym generowanym przez  $T$  na widmie algebry  $\mathcal{B}$ , to istnieje podział  $\{\tilde{\omega}_i\}_{i \in I}$  przestrzeni  $\tilde{X}$  na domknięte  $\tilde{\alpha}$ -niezmiennicze zbiory, taki, że dla  $i \in I \setminus \{0\}$  mamy  $\tilde{\omega}_i \subset \tilde{\Delta}_\infty$ , a dla  $i \in I$

$$r_i^- = \min_{\mu \in \text{Erg}(\tilde{\omega}_i, \tilde{\alpha})} \exp \int_{\tilde{\omega}_i} \ln |\hat{b}(\tilde{x})|, \quad r_i^+ = \max_{\mu \in \text{Erg}(\tilde{\omega}_i, \tilde{\alpha})} \exp \int_{\tilde{\omega}_i} \ln |\hat{b}(\tilde{x})| d\mu.$$

Jeśli dodatkowo  $X_+$  nie posiada punktów izolowanych, to widmo  $\sigma(bT)$  pokrywa się z widmem istotnym  $\sigma_{\text{ess}}(bT)$ :

$$\sigma(bT) = \sigma_{\text{ess}}(bT).$$

**Dowód.** Pierwsza część tezy oraz uwaga o widmie istotnym wynikają z Twierdzeń 6.6 oraz 6.9. Stosując Twierdzenie 5.6 do algebry  $\mathcal{B}$  otrzymujemy podpunkt ii). Jeśli  $b = a_0 + T^*a_1T + \dots + T^{*n}a_nT^n$ , to dla  $\tilde{x} = (x_0, \dots) \in \tilde{X}$  oraz  $x \in \Delta_n$  mamy

$$\hat{b}(\tilde{x}) = \hat{b}(x_0, \dots, x_n), \quad \text{gdzie} \quad \hat{b}(\alpha^n(x), \dots, \alpha(x), x) = \sum_{k=0}^n \hat{a}_k(\alpha^{n-k}(x)),$$

patrz Twierdzenie 4.7. W świetle Twierdzenia 5.10 podziałowi  $\{\tilde{\omega}_i\}_{i \in I}$  z podpunktu ii) odpowiada podział  $\{\omega_i\}_{i \in I}$  przestrzeni  $X$  taki, że  $\Phi(\tilde{\omega}_i) = \omega_i$ . Stąd dla  $\tilde{\omega}_i \subset \tilde{\Delta}_\infty$  i każdej miary  $\tilde{\mu} \in \text{Erg}(\tilde{\omega}_i, \tilde{\alpha})$  mamy

$$\int_{\tilde{\omega}_i} \tilde{b}(\tilde{x}) d\tilde{\mu} = \int_{\tilde{\omega}_i} \tilde{b}(\tilde{\alpha}^n(\tilde{x})) d\tilde{\mu} = \int_{\tilde{\omega}_i} \hat{b}(\alpha^n(\Phi(\tilde{x})), \dots, \alpha(\Phi(\tilde{x})), \Phi(\tilde{x})) d\tilde{\mu}$$

$$= \int_{\tilde{\omega}_i} \sum_{k=0}^n \hat{a}_k(\alpha^{n-k}(\Phi(\tilde{x}))) d\tilde{\mu} = \int_{\omega_i} \sum_{k=0}^n \hat{a}_k(\alpha^{n-k}(x)) d\mu,$$

gdzie  $\mu \in \text{Erg}(\omega_i, \alpha)$  jest miarą taką, że  $\mu(\omega) = \tilde{\mu}(\Phi^{-1}(\omega))$ . Co więcej relacja między  $\tilde{\mu}$  oraz  $\mu$  ustanawia bijekcję między zbiorami  $\text{Erg}(\tilde{\omega}_i, \tilde{\alpha})$  oraz  $\text{Erg}(\omega_i, \alpha)$  (Twierdzenie 4.9). Zatem dla  $i \neq 0$  wzory z podpunktu ii) można zastąpić tymi z podpunktu i). Dla  $i = 0$  wystarczy powtórzyć powyższe rozumowanie dla zbiorów  $\tilde{\omega}_0 \cap \tilde{\Delta}_\infty$  i  $\omega_0 \cap \Delta_\infty$ , por. Stwierdzenie 4.4. ■

Pewną trudność w zastosowaniu właśnie wykazanego twierdzenia może sprawić wyznaczenie niezmienniczych podzbiorów odpowiadających składowym widma, por. Twierdzenie 5.4. Przeszkoda ta znika w następujących przypadkach.

**Twierdzenie 6.12 (Spójność widma).** *Jeśli przy założeniach Twierdzenia 6.11 spełniony dodatkowo jest jeden z warunków*

- a) przestrzeń  $X$  nie zawiera właściwych domknięto-otwartych podzbiorów  $\alpha$ -niezmienniczych,
- b) podzbiór  $\Delta_\infty$  ma puste wnętrze,

to dla każdego  $b \in \mathcal{B} = \overline{\text{span}}\{\bigcup_{n=0}^\infty T^{*n} \mathcal{A} T^n\}$  widmo  $\sigma(bT)$  operatora  $bT$  jest spójne, czyli jest dyskiem lub pierścieniem:

$$\sigma(bT) = \begin{cases} \{\lambda \in \mathbb{C} : r^- \leq |\lambda| \leq r^+\}, & \text{gdy } b \text{ oraz } T \text{ są odwracalne,} \\ \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r^+\}, & \text{gdy } b \text{ lub } T \text{ nie jest odwracalne.} \end{cases}$$

**Dowód.** Przy założeniu a) teza wynika z Twierdzenia 5.8, patrz też Stwierdzenie 5.5. Z założenia b) oraz stąd, że  $X \setminus \Delta_\infty \subset \omega_0$  otrzymujemy  $\omega_0 = X$ , por. Twierdzenie 5.10. ■

Założenia powyższego twierdzenia są na tyle naturalne, że spełnione są we wszystkich przykładach rozpatrywanych w podrozdziale 4.2.

**Przykład 6.13 (Operatory generujące shifty pełne).** Niech  $T_2 \in L(E)$  będzie operatorem generującym jednostronny shift pełny  $(\Sigma_N, \sigma_N)$ ,  $N > 1$ , na widmie algebry  $\mathcal{A} \subset L(E)$  działającym na przestrzeni Hilberta  $E = L^2_\eta(\mathbb{R}_+)$ , zdefiniowanym w podrozdziale 3.4.1, por. Przykład 4.10. Operator  $T_2$  jest unitarny. Układ  $(\Sigma_N, \sigma_N)$  jest topologicznie wolny, a przestrzeń  $\Sigma_N$  nie zawiera punktów izolowanych, ani właściwych domknięto-otwartych podzbiorów  $\sigma_N$ -niezmienniczych. Zatem dla każdego  $b \in \mathcal{B} = \overline{\text{span}}\{\bigcup_{n=0}^\infty T_2^{*n} \mathcal{A} T_2^n\}$  mamy

$$\sigma(bT_2) = \sigma_{\text{ess}}(bT_2)$$

i zbiór ten jest kołem lub pierścieniem.

**I.** Jeśli  $b$  jest postaci  $b = a_0 + T^* a_1 T + \dots + T^{*n} a_n T^n$ ,  $a_k \in \mathcal{A}$ , to

$$\sigma(bT_2) = \begin{cases} \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r^+\}, & \text{gdy } \sum_{k=0}^n \hat{a}_k(\alpha^{n-k}(x)) = 0 \text{ dla pewnego } x, \\ \{\lambda \in \mathbb{C} : r^- \leq |\lambda| \leq r^+\}, & \text{gdy } \sum_{k=0}^n \hat{a}_k(\alpha^{n-k}(x)) \neq 0 \text{ dla każdego } x, \end{cases}$$



gdzie

$$r^- = \min_{\mu \in \text{Erg}(\Sigma_N, \sigma_N)} \exp \int_{\Sigma_N} \ln \left| \sum_{k=0}^n \hat{a}_k(\alpha^{n-k}(x)) \right| d\mu,$$

$$r^+ = \max_{\mu \in \text{Erg}(\Sigma_N, \sigma_N)} \exp \int_{\Sigma_N} \ln \left| \sum_{k=0}^n \hat{a}_k(\alpha^{n-k}(x)) \right| d\mu.$$

II. Dla dowolnego  $b \in \mathcal{B}$  mamy

$$\sigma(bT_2) = \begin{cases} \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r^+\} & \text{gdy } \hat{b}(\tilde{x}) = 0 \text{ dla pewnego } \tilde{x} \in \bar{\Sigma}_N, \\ \{\lambda \in \mathbb{C} : r^- \leq |\lambda| \leq r^+\} & \text{gdy } \hat{b}(\tilde{x}) \neq 0 \text{ dla każdego } \tilde{x} \in \bar{\Sigma}_N \end{cases}$$

gdzie  $(\bar{\Sigma}_N, \bar{\sigma}_N)$  jest dwustronnym shiftem pełnym i

$$r^- = \min_{\mu \in \text{Erg}(\bar{\Sigma}_N, \bar{\sigma}_N)} \exp \int_{\bar{\Sigma}_N} \ln |\hat{b}(\tilde{x})| d\mu, \quad r^+ = \max_{\mu \in \text{Erg}(\bar{\Sigma}_N, \bar{\sigma}_N)} \exp \int_{\bar{\Sigma}_N} \ln |\hat{b}(\tilde{x})| d\mu.$$

Formuły wariacyjne powyższego typu zostały omówione w Przykładzie 4.10.

**Przykład 6.14 (Operatory generujące odwzorowania  $z^N$ ).** Niech  $\mathcal{A} \subset L(L^2(\mathbb{R}))$  będzie algebra, a  $T_2 \subset L(L^2(\mathbb{R}))$  operatorem unitarnym zdefiniowanym w podrozdziale 3.2. Operator  $T_2$  generuje na widmie  $\mathcal{A}$  topologicznie wolny układ  $(S^1, \alpha)$ , gdzie  $\alpha(z) = z^N$ ,  $N > 1$ . Spójność okręgu  $S^1$  implikuje spójność oraz równość widm  $\sigma(bT_2) = \sigma_{\text{ess}}(bT_2)$ , dla  $b \in \mathcal{B} = \overline{\text{span}}\{\bigcup_{n=0}^{\infty} T_2^{-n} \mathcal{A} T_2^n\}$ .

I. Jeśli  $b$  jest postaci  $b = a_0 + T_2^* a_1 T_2 + \dots + T_2^{*n} a_n T_2^n$ ,  $a_k \in \mathcal{A}$ , to

$$\sigma(bT_2) = \begin{cases} \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r^+\}, & \text{gdy } \sum_{k=0}^n \hat{a}_k(\alpha^{n-k}(x)) = 0 \text{ dla pewnego } x, \\ \{\lambda \in \mathbb{C} : r^- \leq |\lambda| \leq r^+\}, & \text{gdy } \sum_{k=0}^n \hat{a}_k(\alpha^{n-k}(x)) \neq 0 \text{ dla każdego } x \end{cases}$$

gdzie

$$r^- = \min_{\mu \in \text{Erg}(S^1, \alpha)} \exp \int_{S^1} \ln \left| \sum_{k=0}^n \hat{a}_k(\alpha^{n-k}(x)) \right| d\mu,$$

$$r^+ = \max_{\mu \in \text{Erg}(S^1, \alpha)} \exp \int_{S^1} \ln \left| \sum_{k=0}^n \hat{a}_k(\alpha^{n-k}(x)) \right| d\mu.$$

W szczególności, widmo  $\sigma(bT_2) = \sigma_{\text{ess}}(bT_2)$  zawiera okrąg o środku w zerze i promieniu  $\exp \int_{S^1} \ln \left| \sum_{k=0}^n \hat{a}_k(\alpha^{n-k}(x)) \right| dm$ , gdzie  $m$  jest unormowaną miarą Lebesgue'a na  $S^1$ , patrz Przykład 4.11.

II. Dla dowolnego  $b \in \mathcal{B}$  mamy

$$\sigma(bT_2) = \begin{cases} \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r^+\} & \text{gdy } \hat{b}(\tilde{x}) = 0 \text{ dla pewnego } \tilde{x} \in \bar{\Sigma}_N, \\ \{\lambda \in \mathbb{C} : r^- \leq |\lambda| \leq r^+\} & \text{gdy } \hat{b}(\tilde{x}) \neq 0 \text{ dla każdego } \tilde{x} \in \bar{\Sigma}_N \end{cases}$$

gdzie  $(\mathcal{S}, F)$  jest  $N$ -adycznym solenoidem, patrz Podrozdział 3.2, i

$$r^- = \min_{\mu \in \text{Erg}(\mathcal{S}, F)} \exp \int_{\mathcal{S}} \ln |\hat{b}(x)| d\mu, \quad r^+ = \max_{\mu \in \text{Erg}(\mathcal{S}, F)} \exp \int_{\mathcal{S}} \ln |\hat{b}(x)| d\mu.$$

W szczególności, widmo  $\sigma(bT_2) = \sigma_{\text{ess}}(bT_2)$  zawiera okrąg o środku w zerze i promieniu  $\exp \int_{\mathcal{S}} \ln |\hat{b}(\tilde{x})| d\tilde{m}$ , gdzie  $\tilde{m}$  jest naturalną miarą na solenoidzie  $\mathcal{S}$  opisaną w Przykładzie 4.11.

**Przykład 6.15 (Operatory generujące odwzorowania logistyczne).** Niech  $\mathcal{A} \subset L(L^2(\mathbb{R}))$  oraz  $T_\lambda \in L(L^2(\mathbb{R}))$ ,  $\lambda \in (0, 1]$  będą takie jak w podrozdziale 2.1. Układ  $([0, 1], \alpha_\lambda)$ ,  $\lambda \in (0, 1]$  jest topologicznie wolny i przestrzeń

$$X_+ = \begin{cases} [0, 1] \sqcup [\lambda, 1] & \text{dla } \lambda < 1, \\ [0, 1] & \text{dla } \lambda = 1, \end{cases}$$

por. Stwierdzenie 2.1, nie posiada punktów izolowanych. Dla  $\lambda < 1$  operator  $T_\lambda$  jest nieodwracalny i dla  $b \in \mathcal{B}_\lambda = \overline{\text{span}}\{\cup_{n=0}^\infty T_\lambda^{*n} \mathcal{A} T_\lambda^n\}$  mamy

$$\sigma(bT_\lambda) = \sigma_{ess}(bT_\lambda) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(bT_\lambda)\},$$

gdzie promień  $r(bT_\lambda)$  omówiony został w Przykładzie 4.12. Natomiast gdy  $\lambda = 1$  operator  $T_1$  jest odwracalny i

$$\sigma(bT_1) = \sigma_{ess}(bT_1) = \begin{cases} \{\lambda \in \mathbb{C} : r^- \leq |\lambda| \leq r^+\}, & \text{gdy waga } b \text{ jest odwracalna,} \\ \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r^+\}, & \text{gdy waga } b \text{ jest nieodwracalna.} \end{cases}$$

Promienie  $r^-$ ,  $r^+$  dane są przez odpowiednie zasady wariacyjne na odcinku  $[0, 1]$  lub B-J-K continuum  $\widetilde{X}_1$ , por. Przykład 4.12. W szczególności, jeśli  $b = a_0 + T_1^* a_1 T_1 + \dots + T_1^{*n} a_n T_1^n$ ,  $a_k \in \mathcal{A}$ , to zachodzi inkluzja

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \exp \int_0^1 \frac{\ln |\sum_{k=0}^n \hat{a}_k(\alpha^{n-k}(x))|}{\pi \sqrt{x(1-x)}} dx \right\} \subset \sigma(bT_1) = \sigma_{ess}(bT_1),$$

a dla dowolnego  $b \in \mathcal{B}$  mamy

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \exp \int_{\widetilde{X}_1} \frac{\ln |\hat{b}(\tilde{x})|}{\pi \sqrt{\Phi(\tilde{x})(1-\Phi(\tilde{x}))}} d\tilde{m} \right\} \subset \sigma(bT_1) = \sigma_{ess}(bT_1),$$

gdzie  $\tilde{m}$  jest naturalną miarą na B-J-K continuum  $\widetilde{X}_1$  opisaną w Przykładzie 4.12.

W poniższym przykładzie pokażemy jak, dobrze znaną postać widma klasycznego operatora przesunięcia z wagą, por. [Hal82, Problemy 82, 91], można otrzymać stosując Twierdzenie 6.11.

**Przykład 6.16 (Klasyczne operatory przesunięcia z wagą).** Niech  $aT_{\mathbb{N}}$  będzie klasycznym operatorem przesunięcia z wagą  $a \in \mathcal{A}$ , działającym w przestrzeni Hilberta  $\ell^2(\mathbb{N})$ , por. Przykłady 1.20. Operator  $T_{\mathbb{N}}$  jest nieodwracalny i generuje na widmie algebry  $\mathcal{A}$  topologicznie wolny układ  $(\beta(\mathbb{N}), \alpha)$ , por. Przykład 3.3. Mimo, że przestrzeń  $\beta(\mathbb{N})$  zawiera właściwe domknięto-otwarte podzbiory, to Twierdzenie 6.12 pozostaje w mocy, gdyż zbiór  $\Delta_\infty = \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$  ma puste wnętrze, por. Przykład 4.13. Zatem dla  $a \in \mathcal{A}$  mamy

$$\sigma(aT_{\mathbb{N}}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} |a(k+i)|} \right\},$$

gdź  $r(aT_{\mathbb{N}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} |a(k+i)|}$ , patrz Przykład 4.13.

**Przykład 6.17 (Operatory generujące homeomorfizmy okręgu).** Niech  $T_2 \in L(L^2(\mathbb{R}_+ \cup \{0\}))$  i  $\mathcal{A} \subset L(L^2(\mathbb{R}_+ \cup \{0\}))$  będą obiektami rozważanymi w Przykładzie 4.14, Stwierdzeniu 3.25 i paragrafie 3.5.2. Operator  $T_2$  jest nieodwracalnym ważonym operatorem złożenia z rosnącym odwzorowaniem  $\gamma : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  spełniającą warunki

$$\gamma(t+1) = \gamma(t) + 1, \quad \gamma(0) > 0,$$

a  $\mathcal{A}$  składa się z operatorów mnożenia przez okresowe funkcje ciągłe o okresie 1. Koizometria  $T_2$  generuje na widmie  $\mathcal{A} \cong C(S^1)$  zachowujący orientację homeomorfizm  $\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ .

Jeśli liczba obrotu  $\tau(\alpha)$  jest niewymierna to układ  $(S^1, \alpha)$  jest topologicznie wolny, natomiast jeśli  $\tau(\alpha) = \frac{m}{n}$ , to układ  $(S^1, \alpha)$  jest topologicznie wolny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór  $\Omega(\alpha)$  punktów okresowych o okresie  $n$  ma puste wnętrze, por. Twierdzenie 3.27. Niezależnie jednak od liczby obrotu  $\tau(\alpha)$  układ  $(X_+, \alpha_+)$  generowany przez operator  $T_2$  na widmie algebry  $\mathcal{A}_+ = T_2^* T_2 \mathcal{A} \oplus (1 - T_2^* T_2) \mathcal{A}$  jest zawsze topologicznie wolny. Rzeczywiście  $X_+$  możemy traktować jako sumę prostą okręgu  $S^1$  oraz łuku  $Y$  łączącego punkty 1 i  $\alpha(1)$ , patrz Stwierdzenia 1.26, 3.25. Każda orbita  $\alpha_+$ -okresowa musi przecinać łuk łączący  $\alpha(1)$  z  $\alpha^2(1)$  na okręgu  $S^1$ , a zatem posiada ujście leżące na łuku  $Y$ , patrz Definicja 6.1. W szczególności przestrzeń  $X_+$  nie posiada punktów izolowanych i na mocy Twierdzenia 6.11, dla  $b \in \mathcal{B} = \overline{\text{span}}\{\bigcup_{n=0}^{\infty} T_2^{*n} \mathcal{A} T_2^n\}$ , mamy

$$\sigma(bT_2) = \sigma_{ess}(bT_2) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(bT_2)\}, \quad (6.1)$$

gdzie promień  $r(bT_2)$  został omówiony w Przykładzie 4.14.

**Przykład 6.18 (Operatory generujące przesunięcia na torusie).** Niech  $T : L^2(\mathbb{R}_+^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+^d)$  będzie operatorem przesunięcia  $(Tf)(t) = f(t+h)$ , gdzie  $h = (h_1, \dots, h_N) \in \mathbb{R}_+^d$ , i niech  $\mathcal{A} \subset L(L^2(\mathbb{R}_+^d))$  będzie algebrą operatorów mnożenia przez ciągłe funkcje o okresach  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , por. paragraf 3.5.3 i przykład 4.15. Operator  $T$  generuje na widmie algebry  $\mathcal{A}$  układ  $(\mathbb{T}^d, \alpha)$ , gdzie  $\alpha : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  jest przesunięciem na torusie  $\mathbb{T}^d$  o wektor  $h$ . Układ  $(\mathbb{T}^d, \alpha)$  jest topologicznie wolny wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna współrzędna  $h_i$  wektora  $h$  jest niewymierna. Natomiast układ  $(X_+, \alpha_+)$  generowany przez  $T$  na widmie algebry  $\mathcal{A}_+ = T^* T \mathcal{A} \oplus (1 - T^* T) \mathcal{A}$  jest zawsze topologicznie wolny. Rzeczywiście przestrzeń  $X_+$  możemy traktować jako sumę prostą torusa  $\mathbb{T}^d$  oraz zbioru  $Y = \mathbb{T}^d \setminus (h_1, 1) \times (h_2, 1) \times \dots \times (h_d, 1)$  (torusa z wyciętym „oknem”), por. Stwierdzenia 1.26, 3.31. Nietrudno wtedy sprawdzić, że niezależnie od postaci wektora  $h$  istnieje liczba  $N \in \mathbb{N}$  taka, że

$$\bigcup_{n=1}^N \alpha_+^n(Y) = \mathbb{T}^d.$$

Stąd każda orbita okresowa na  $X_+ = \mathbb{T}^d \sqcup Y$  posiada ujście leżące w  $Y$ , por. Definicja 6.1. Zatem skoro  $X_+ = \mathbb{T}^d \sqcup Y$  nie posiada punktów izolowanych, to dla każdego  $b \in \mathcal{B} = \overline{\text{span}}\{\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{*n} \mathcal{A} T^n\}$ , mamy

$$\sigma(bT) = \sigma_{ess}(bT) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(bT)\},$$

gdzie promień spektralny  $r(bT)$  został omówiony w Przykładzie 4.15.

## Uwagi do rozdziału 6

W rozdziale 5 opisaliśmy rzut Rieszego odpowiadający składowej zbioru  $|\sigma(aT)|$  (Twierdzenie 5.1). Ten wynik oraz zasady wariacyjne otrzymane w rozdziale 4 dają nadzieję na pełny opis widma  $\sigma(aT)$  przy założeniu, że znajdziemy warunki, przy których widmo operatora  $aT$  jest niezmiennicze ze względu na obroty wokół zera. W obecnym rozdziale 6 wyznaczyliśmy taki warunek – jest nim *topologiczna wolność* generowanego układu dynamicznego. Dzięki temu otrzymaliśmy kompletny opis widma w przypadku operatorów działających w przestrzeni Hilberta.

Pojęcie topologicznej wolności dla *odwracalnych* układów dynamicznych, w związku z generowanymi przez nie  $C^*$ -algebrami, ma długą historię, pojawiało się w różnych pracach i nierozzerwalnie łączy się z twierdzeniami typu Twierdzenie 6.5, zwanymi Twierdzeniami o Izomorfizmie. Szczegółowe uwagi na ten temat czytelnik znajdzie w monografiach [AL94], [Ant96]. Dotychczasowe nieliczne próby uogólnienia topologicznej wolności na przypadek  $C^*$ -algebr związanych z nieodwracalnymi układami dynamicznymi posiadają zastosowanie w stosunku do innych algebr, niż rozważane w obecnej pracy, por. [EV06]. Przytoczona tutaj Definicja 6.1 została wprowadzona przez autora w [Kwa05'] i jest ona wynikiem analizy związku między układami  $(X, \alpha)$ ,  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$ , por. dyskusja na stronie 117. Definicja 6.1 jest blisko związana z warunkiem, który implikuje twierdzenia ustanawiające izomorfizmy  $C^*$ -algebr związanych z grafami (w szczególności algebr Cuntza-Kriegera), a który mówi, że każdy cykl w grafie posiada ujście, por. [Kwa05', Strona 755], [KL07"].

Zarówno kołową symetrię widma jak i związek odwracalności z warunkami Fredholma dla ważonych operatorów kompozycji zauważyło i za pomocą różnych metod badało wielu autorów, patrz np. [Par65], [Nor68], [Rid73], [Leb79], [Leb80], [Kum80], [SV87], [SD88]. Pierwszym systematycznym opracowaniem podejścia opartego na teorii  $C^*$ -algebr, wyjaśniającego ogólną naturę wyżej wspomnianych zjawisk, jest rozprawa doktorska [Leb80], gdzie m. in. wykazano Twierdzenie o Izomorfizmie w przypadku, gdy  $\alpha : X \rightarrow X$  jest topologicznie wolnym *homeomorfizmem*, por. [AL94, Wn. 12.17], [Ant96, Tw. 7.1]. Dla operatorów rozpatrywanych w obecnej pracy Twierdzenie 6.5 (w nieco innej, lecz równoważnej formie) wykazał autor w [Kwa05'], por. uzupełnienia B. Na bazie tego twierdzenia oraz rezultatów z rozdziałów 4 i 5 udało się nam uzyskać pełny opis widma  $\sigma(aT)$  (Twierdzenie 6.11).

Do zjawiska spójności widma rozważanych operatorów wrócimy jeszcze w rozdziale 9, patrz uwagi do rozdziału 9.

## Rozdział 7

# Odwracalność operatorów w algebrach generowanych przez ważone operatory przesunięcia w przestrzeniach Hilberta.

W poprzednim rozdziale analiza  $C^*$ -algebry  $C^*(\mathcal{A}, T)$  generowanej przez operatory  $aT$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , działające w przestrzeni Hilberta, doprowadziła nas do opisu widma tychże operatorów. Jest to technika, która *nie przenosi* się wprost na operatory w przestrzeniach *Banacha* i dlatego, począwszy od tego rozdziału, przechodzimy do kolejnego (drugiego i zarazem końcowego) etapu naszych badań. W rozdziałach 7 – 9 skonstruujemy „most”, który posłuży nam jako przejście od zbadanej już sytuacji w przestrzeniach Hilberta do sytuacji w przestrzeniach  $L^p$ . Pozwoli to m. in. otrzymać pełny opis widma konkretnych ważonych operatorów przesunięcia  $aT_p$  w przestrzeniach  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Mianowicie, w następujących rozdziałach, udowodnimy, że możliwe jest sprowadzenie opisu widma  $\sigma(aT_p)$  do takiegoż zagadnienia dla operatorów  $aT_2$  działających w przestrzeniach Hilberta  $L^2$  (Twierdzenie 9.1). Wyżej wymienione rezultaty potrzebują jednak znacznego rozbudowania stosowanego aparatu, a w szczególności wymagają dokładniejszej analizy odwracalności elementów  $C^*$ -algebry  $C^*(\mathcal{A}, T)$ , co jest celem obecnego rozdziału.

W niniejszym rozdziale rozważać będziemy uniwersalną algebrę typu  $C^*(\mathcal{A}, T)$ , którą oznaczać będziemy przez  $C^*(X, \alpha; Y)$  (algebra ta jest bliżej opisana w uzupełnieniach). Po pierwsze zbadamy nieprzywiedlne reprezentacje dyskretne algebry  $C^*(X, \alpha; Y)$ , pokazując m. in. ich związek z orbitami rozszerzonego układu dynamicznego  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$ . Dzięki temu (poprzez tzw. dyskretyzację) otrzymamy warunki konieczne i dostateczne odwracalności elementów algebry  $C^*(X, \alpha; Y)$ . Po drugie wykażemy nową wersję Twierdzenia Wienera dla algebry  $C^*(X, \alpha; Y)$ , co dostarczy nam informacji na temat postaci operatorów odwrotnych do odwracalnych elementów  $C^*(X, \alpha; Y)$ . Z otrzymanych wyników będziemy korzystać w rozdziale 8.

## 7.1 Algebra kowariancji $C^*(X, \alpha; Y)$

W całym obecnym rozdziale zakładamy, że  $\mathcal{A}$  jest przemienną  $C^*$ -algebrą, a  $\mathbf{T}$  jest częściową izometrią taką, że zachodzą relacje

$$\mathbf{T}\mathcal{A}\mathbf{T}^* \subset \mathcal{A}, \quad \mathbf{T}^*\mathbf{T} \in \mathcal{A}'$$

oraz dla wszystkich  $a_k \in \mathcal{B}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$ , gdzie  $\mathcal{B} = \overline{\text{span}} \{ \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{T}^{*n} \mathcal{A} \mathbf{T}^n \}$ , zachodzi nierówność postaci

$$\|a_0\| \leq \left\| \sum_{k=1}^N a_{-k} \mathbf{T}^{*k} + \sum_{k=0}^N a_k \mathbf{T}^k \right\|. \quad (7.1)$$

Wtedy (na mocy Twierdzenia B.3; uzupełnienia)  $C^*$ -algebra  $C^*(\mathcal{A}, \mathbf{T})$  generowana przez  $\mathcal{A}$  i  $\mathbf{T}$  z dokładnością do kanonicznego izomorfizmu jest jednoznacznie wyznaczona przez trójkę  $(X, \alpha; Y)$ , gdzie  $(X, \alpha)$  jest częściowym układem dynamicznym, a  $Y$  jest domkniętym podzbiorem  $X$  zawierającym  $X \setminus \Delta_{-1}$  będącym otoczką ideału  $J = \{a \in \mathcal{A} : \mathbf{T}^* \mathbf{T} a = a\}$ . Przyjmujemy oznaczenie

$$C^*(X, \alpha; Y) := C^*(\mathcal{A}, \mathbf{T})$$

i algebrę  $C^*(X, \alpha; Y)$  będziemy nazywać (względna) *algebrą kowariancji* częściowego układu dynamicznego względem zbioru  $Y$  (por. Definicja A.4). Przyjmować tu także będziemy utożsamienia

$$\mathcal{A} = C(X) \quad \text{oraz} \quad \mathcal{B} = C(\widetilde{X}),$$

gdzie  $\widetilde{X}$  jest przestrzenią opisaną w Twierdzeniu 1.28.

Wspomnijmy, że dla każdej trójki  $(X, \alpha; Y)$  o wyżej wspomnianych własnościach istnieje algebra  $C^*(X, \alpha; Y)$  (por. Twierdzenie A.3) oraz dowolna  $C^*$ -algebra postaci  $C^*(\mathcal{A}, T)$ , gdzie  $T$  jest operatorem generującym na  $\mathcal{A}$  lub  $\mathcal{A}_+ = T^*T\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}(1 - T^*T)$  układ topologicznie dowolny jest automatycznie pewną algebrą kowariancji, por. Twierdzenie 6.5.

## 7.2 Klasyfikacja orbit i reprezentacje dyskretne algebry $C^*(X, \alpha; Y)$

Niech  $(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$  będzie naturalnym rozszerzeniem  $(X, \alpha)$  związanym ze zbiorem  $Y$  (Definicja 1.32). Każdej orbicie układu  $(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$  przyporządkujemy pewną reprezentację dyskretną algebry kowariancji  $C^*(X, \alpha; Y)$ , gdzie przez reprezentację dyskretną rozumiemy następujące naturalne uogólnienie definicji dotyczącej klasycznych iloczynów krzyżowych [Tom87, Def. 4.1.2].

**Definicja 7.1.** Powiemy, że reprezentacja  $\pi$  algebry kowariancji  $C^*(X, \alpha; Y)$  na przestrzeni Hilberta  $H$  jest *dyskretna*, jeśli istnieje w  $H$  wektor będący wektorem własnym dla wszystkich operatorów  $\pi(a)$ ,  $a \in C(\widetilde{X})$ .

Orbitą punktu  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  będziemy nazywać zbiór

$$O(\tilde{x}) := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\alpha}^k(\{\tilde{x}\} \cap \tilde{\Delta}_k).$$

Zanim przejdziemy do zapowiadanej klasyfikacji orbit oraz reprezentacji z nimi związanych przypomnijmy, że  $\Phi : \tilde{X} \rightarrow X$  oznacza rzut na zerową współrzędną, str. 21, oraz

$$\tilde{\Delta}_{+\infty} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\Delta}_n, \quad \tilde{\Delta}_{-\infty} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\Delta}_{-n}, \quad \tilde{\Delta}_{\infty} = \tilde{\Delta}_{+\infty} \cap \tilde{\Delta}_{-\infty}.$$

**7.2. Orbity skończone.** Jeśli  $\tilde{x} \notin (\tilde{\Delta}_{+\infty} \cup \tilde{\Delta}_{-\infty})$ , to powiemy, że  $\tilde{x}$  posiada *orbitę skończoną*. W tym przypadku istnieje  $N \in \mathbb{N}$  oraz punkt  $x_0 \in Y \cap \Delta_N \setminus \Delta_{N+1}$  taki, że

$$\Phi(O(\tilde{x})) = \{x_0, \alpha(x_0), \dots, \alpha^{N-1}(x_0)\}. \quad (7.2)$$

Przyporządkujemy orbicie  $O(\tilde{x})$  reprezentację  $\pi_{\tilde{x}} : C^*(X, \alpha; Y) \rightarrow L(\ell^2(N))$  na  $N$ -wymiarowej przestrzeni Hilberta  $\ell^2(N)$  wyznaczoną przez relacje

$$\pi_{\tilde{x}}(a) := \begin{pmatrix} a(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a(\alpha(x_0)) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a(\alpha^{N-1}(x_0)) \end{pmatrix}, \quad a \in \mathcal{A} = C(X), \quad \pi_{\tilde{x}}(\mathbf{T}) = T_N,$$

gdzie  $T_N$  jest „ściętym” operatorem lewostronnego przesunięcia (ang. truncated shift):

$$T_N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad S_N := (T_N)^* = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jednoznaczność reprezentacji  $\pi_{\tilde{x}}$  jest oczywista. Poprawność jej określenia wynika z uniwersalności algebry  $C^*(X, \alpha; Y)$ , gdyż bezpośredni rachunek wykazuje, że trójka  $(\pi_{\tilde{x}}|_{\mathcal{A}}, T_N, \ell^2(N))$  jest reprezentacją kowariantną układu  $(X, \alpha)$  związaną ze zbiorem  $\{x_0\} \subset Y$ , patrz Definicja A.2 w uzupełnieniach. Zatem integruje się ona do reprezentacji algebry  $C^*(X, \alpha; Y)$ , por. Twierdzenie A.3.

**7.3. Orbity dodatnio nieskończone.** Jeśli  $\tilde{x} \in \tilde{\Delta}_{+\infty} \setminus \tilde{\Delta}_{-\infty}$ , to powiemy, że  $\tilde{x}$  posiada *orbitę dodatnio nieskończoną*. Istnieje wtedy punkt  $x_0 \in Y \cap \Delta_{+\infty}$  taki, że

$$\Phi(O(\tilde{x})) = \{x_0, \alpha(x_0), \dots, \alpha^k(x_0), \dots\}. \quad (7.3)$$

Przyporządkujemy orbicie  $O(\tilde{x})$  reprezentację  $\pi_{\tilde{x}} : C^*(X, \alpha; Y) \rightarrow L(\ell^2(\mathbb{N}))$  na przestrzeni Hilberta  $\ell^2(\mathbb{N})$  jednoznacznie wyznaczoną przez relacje

$$\pi_{\tilde{x}}(a) := \begin{pmatrix} a(x_0) & 0 & \dots & \dots \\ 0 & a(\alpha(x_0)) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a(\alpha^2(x_0)) & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad a \in \mathcal{A}, \quad \pi_{\tilde{x}}(\mathbf{T}) = T_{\mathbb{N}},$$

gdzie  $T_{\mathbb{N}} \in L(\ell^2(\mathbb{N}))$  jest standardowym operatorem lewostronnego przesunięcia, por Przykład 1.13. Uzasadnienie poprawności określenia  $\pi_{\tilde{x}}$  przebiega podobnie jak w przypadku poprzednim: Trójka  $(\pi_{\tilde{x}}|_{\mathcal{A}}, T_{\mathbb{N}}, \ell^2(\mathbb{N}))$  jest reprezentacją kowariantną układu  $(X, \alpha)$  związaną ze zbiorem  $\{x_0\} \subset Y$ . Zatem zadaje ona reprezentację algebry  $C^*(X, \alpha; Y)$ , Twierdzenie A.3.

**7.4. Orbity ujemnie nieskończone.** Jeśli  $\tilde{x} \in \tilde{\Delta}_{-\infty} \setminus \tilde{\Delta}_{+\infty}$ , to powiemy, że  $\tilde{x}$  posiada orbitę ujemnie nieskończoną. W tym przypadku istnieje ciąg  $(x_0, x_1, x_2, \dots)$  punktów z  $X$  takich, że

$$\alpha(x_{n+1}) = x_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{oraz} \quad x_0 \in \Delta_{-\infty} \setminus \Delta_1 \quad (7.4)$$

oraz

$$\Phi(O(\tilde{x})) = \{\dots, x_k, \dots, x_2, x_1, x_0\}. \quad (7.5)$$

Analogicznie jak powyżej przyporządkujemy orbitcie  $O(\tilde{x})$  reprezentację algebry kowariancji na przestrzeni  $\ell^2(\mathbb{N})$ . Mianowicie, niech  $\pi_{\tilde{x}} : C^*(X, \alpha; Y) \rightarrow L(\ell^2(\mathbb{N}))$  będzie reprezentacją taką, że

$$\pi_{\tilde{x}}(a) := \begin{pmatrix} a(x_0) & 0 & \dots & \dots \\ 0 & a(x_1) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a(x_2) & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad a \in \mathcal{A}, \quad \pi_x(\mathbf{T}) = S_{\mathbb{N}},$$

gdzie  $S_{\mathbb{N}} \in L(\ell^2(\mathbb{N}))$  jest standardowym operatorem prawostronnego przesunięcia, por Przykład 1.13. Jako, że  $S_{\mathbb{N}}$  jest izometrią, trójka  $(\pi_{\tilde{x}}|_{\mathcal{A}}, S_{\mathbb{N}}, \ell^2(\mathbb{N}))$  jest reprezentacją kowariantną układu  $(X, \alpha)$  związaną ze zbiorem pustym. W szczególności reprezentacja  $\pi_{\tilde{x}}$  jest poprawnie określona, Twierdzenie A.3.

**7.5. Orbity obustronnie nieskończone.** Jeśli  $\tilde{x} \in \tilde{\Delta}_{\infty} = \tilde{\Delta}_{-\infty} \cap \tilde{\Delta}_{+\infty}$ , to powiemy, że  $\tilde{x}$  posiada orbitę obustronnie nieskończoną (mimo, iż jeśli  $\tilde{x}$  jest punktem okresowym, to zbiór  $O(\tilde{x})$  jest skończony). W tym przypadku istnieje ciąg  $(x_0, x_1, x_2, \dots)$  punktów z  $X$  takich, że

$$\alpha(x_{n+1}) = x_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_0 \in \Delta_{\infty}$$

oraz

$$\Phi(O(\tilde{x})) = \{\dots, x_k, \dots, x_2, x_1, x_0, \alpha(x_0), \alpha(x_2), \dots, \alpha^k(x_0), \dots\}.$$

Niech  $\pi_{\tilde{x}}$  będzie reprezentacją algebry  $C^*(X, \alpha; Y)$  na przestrzeni  $\ell^2(\mathbb{Z})$  taką, że

$$\pi_{\tilde{x}}(a)e_n := \begin{cases} a(\alpha^n(x_0))e_n, & n \geq 0 \\ a(x_{-n})e_n, & n < 0 \end{cases}, \quad a \in \mathcal{A}, \quad \pi_x(\mathbf{T}) = T_{\mathbb{Z}},$$

gdzie  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  jest standardową ortonormalną bazą w  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , a  $T_{\mathbb{Z}}$  jest odwracalnym operatorem lewostronnego przesunięcia:  $T_{\mathbb{Z}}e_n := e_{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Podobnie jak w przypadku poprzednim, trójka  $(\pi_x|_{\mathcal{A}}, T_{\mathbb{Z}}, \ell^2(\mathbb{Z}))$  jest reprezentacją kowariantną  $(X, \alpha)$  związaną ze zbiorem pustym  $Y$ . Stąd określenie  $\pi_{\tilde{x}}$  jest poprawne, Twierdzenie A.3. Zauważmy, iż w tym przypadku reprezentacja  $\pi_{\tilde{x}}$  jest wyznaczona jednoznacznie przez zbiór  $O(\tilde{x})$  z dokładnością do unitarnej równoważności.



Obraz algebry  $\mathcal{B} = C(\widetilde{X})$  przy wszystkich powyżej zdefiniowanych reprezentacjach składa się z operatorów mnożenia. Zatem wszystkie reprezentacje  $\pi_{\tilde{x}}$ ,  $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ , są dyskretne. Poza tym, za wyjątkiem przypadku, gdy punkt  $\tilde{x} \in \widetilde{X}$  jest okresowy, reprezentacje te również nieprzywiedlne, por. [O'Don75, 2.1 i 3.1]. Z punktem okresowym  $\tilde{x} \in \widetilde{X}$  zwiążemy całą rodzinę  $\pi_{\tilde{x},\lambda}$ ,  $\lambda \in S^1$ , reprezentacji nieprzywiedlnych. Związek między reprezentacjami  $\pi_{\tilde{x}}$  oraz  $\pi_{\tilde{x},\lambda}$ ,  $\lambda \in S^1$ , wyjaśnimy w Stwierdzeniu 7.7.

**7.6. Orbity okresowe.** Niech  $\tilde{x} \in \widetilde{\Delta}_\infty$  będzie punktem okresowym o okresie  $N$ , to jest niech  $\tilde{\alpha}^N(\tilde{x}) = \tilde{x}$  i  $\tilde{\alpha}^k(\tilde{x}) \neq \tilde{x}$ , dla  $0 < k < N$ . Wtedy  $x_0 := \Phi(\tilde{x})$  jest punktem okresowym o okresie  $N$  oraz

$$\Phi(O(\tilde{x})) = \{x_0, \alpha(x_0), \dots, \alpha^{N-1}(x_0)\}.$$

Niech  $\lambda \in S^1$ . Rozpatrzmy reprezentację  $\pi_{\tilde{x},\lambda} : C^*(X, \alpha; Y) \rightarrow L(\ell^2(N))$  taką, że  $\pi_{\tilde{x},\lambda}$  jest na  $\mathcal{A} = C(X)$  zadana (formalnie) tym samym wzorem co w paragrafie 7.2, natomiast  $\pi_{\tilde{x},\lambda}(\mathbf{T})$  jest operatorem unitarnym danym przez macierz

$$T_{N,\lambda} := \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \\ \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dla każdego  $\lambda \in S^1$  trójka  $(\pi_{\tilde{x},\lambda}|_{\mathcal{A}}, T_{N,\lambda}, \ell^2(N))$  jest reprezentacją kowariantną układu  $(X, \alpha)$  związaną ze zbiorem pustym, a zatem reprezentacja  $\pi_{\tilde{x},\lambda}$  jest poprawnie określona, por. Twierdzenie A.3. Poza tym jest ona nieprzywiedlna, gdyż obrazem  $\pi_{\tilde{x},\lambda}$  jest  $L(\ell^2(N))$ .

**Stwierdzenie 7.7.** *Niech  $\tilde{x} \in \widetilde{X}$  będzie okresowym punktem o okresie  $N$ . Wtedy*

$$C^*(\pi_{\tilde{x}}(\mathcal{A}), T_{\mathbb{Z}}) \cong C(S^1, L(\ell^2(N)))$$

*i dla każdego  $\lambda \in S^1$  przyporządkowanie*

$$\pi_{\tilde{x}}(a) \longmapsto \pi_{\tilde{x},\lambda}(a), \quad T_{\mathbb{Z}} \longmapsto T_{N,\lambda}$$

*przedłuża się do reprezentacji nieprzywiedlnej algebry  $C^*(\pi_{\tilde{x}}(\mathcal{A}), T_{\mathbb{Z}})$ . Ponadto z dokładnością do unitarnej równoważności każda reprezentacja nieprzywiedlna algebry  $C^*(\pi_{\tilde{x}}(\mathcal{A}), T_{\mathbb{Z}})$  jest tej postaci.*

**Dowód.** Z jednej strony wiadomym jest, patrz uzupełnienia i np. [O'Don75], iż  $C^*(\pi_{\tilde{x}}(\mathcal{A}), T_{\mathbb{Z}}) \cong C^*(\widetilde{X}_{\pi_{\tilde{x}}}, \tilde{\alpha}; \emptyset)$ , gdzie  $\widetilde{X}_{\pi_{\tilde{x}}} = \{\tilde{x}, \tilde{\alpha}(\tilde{x}), \dots, \tilde{\alpha}^{N-1}(\tilde{x})\}$ . Z drugiej strony  $C^*(\widetilde{X}_{\pi_{\tilde{x}}}, \tilde{\alpha}; \emptyset) \cong C(S^1, L(\ell^2(N)))$ , patrz [Tom87, Str. 134]. Wystarczy zatem zastosować, np. [Tom87, Tw. 4.2.1]. ■

Dla dowolnej reprezentacji  $\pi : C^*(X, \alpha; Y) \rightarrow L(H)$  możemy (por. uzupełnienia, Twierdzenie C.6) przyjąć utożsamienia

$$\pi(C(X)) = C(X_\pi), \quad \pi(C(\widetilde{X})) = C(\widetilde{X}_\pi),$$

gdzie  $X_\pi = \text{hull}(C(X) \cap \ker \pi)$  i  $\widetilde{X}_\pi = \text{hull}(C(\widetilde{X}) \cap \ker \pi)$  są zbiorami domkniętymi.

**Twierdzenie 7.8.** *Jeśli  $\pi : C^*(X, \alpha; Y) \rightarrow L(H)$  jest reprezentacją nieprzywiedlną, to następujące warunki są równoważne*

- i)  $\pi$  jest unitarnie równoważna z którąś z reprezentacji  $\pi_{\tilde{x}}$ , dla nieokresowego punktu  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , lub  $\pi_{\tilde{x}, \lambda}$ ,  $\lambda \in S^1$ , dla okresowego punktu  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ,
- ii) przestrzeń  $\tilde{X}_\pi$  posiada punkty izolowane,
- iii)  $\pi$  jest reprezentacją dyskretną.

**Dowód.** Implikacje i)  $\Rightarrow$  ii), iii) są jasne.

iii)  $\Rightarrow$  i). Niech  $\xi_0 \in H$  będzie wspólnym unormowanym wektorem własnym dla wszystkich operatorów  $\pi(a)$ ,  $a \in C(\tilde{X})$ . Wtedy stan  $\phi_{\xi_0}$  algebry  $C^*(X, \alpha; Y)$  odpowiadający wektorowi  $\xi_0$ , tj.  $\phi_{\xi_0}(a) = \langle \pi(a)\xi_0, \xi_0 \rangle$ , jest na  $C(\tilde{X})$  funkcjonalem liniowo-multiplikatywnym. Zatem istnieje punkt  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  taki, że  $\phi_{\xi_0}(a) = a(\tilde{x}_0)$ ,  $a \in C(\tilde{X})$ , a stąd

$$\pi(a)\xi_0 = a(\tilde{x}_0)\xi_0, \quad a \in C(\tilde{X}).$$

W szczególności dla każdego  $n \in \mathbb{N}$

$$\pi(T^{*n}T^n)\xi_0 = \begin{cases} \xi_0, & \tilde{x}_0 \in \tilde{\Delta}_{-n} \\ 0, & \tilde{x}_0 \notin \tilde{\Delta}_{-n} \end{cases}, \quad \pi(T^nT^{*n})\xi_0 = \begin{cases} \xi_0, & \tilde{x}_0 \in \tilde{\Delta}_n \\ 0, & \tilde{x}_0 \notin \tilde{\Delta}_n \end{cases}$$

i jeśli  $m, n \in \mathbb{N}$  są takie, że  $\tilde{x}_0 \in \tilde{\Delta}_n \cap \tilde{\Delta}_{-m}$ , to dla każdego  $a \in C(\tilde{X})$  mamy

$$\begin{aligned} \pi(a)\pi(T^n)\xi_0 &= \pi(T^n)\pi(T^{*n}aT^n)\xi_0 = \pi(T^n)a(\tilde{\alpha}^n(\tilde{x}))\xi_0 = a(\tilde{\alpha}^n(\tilde{x}_0))\pi(T^n)\xi_0, \\ \pi(a)\pi(T^{*m})\xi_0 &= \pi(T^{*m})\pi(T^m a T^{*m})\xi_0 = a(\tilde{\alpha}^{-m}(\tilde{x}_0))\pi(T^{*m})\xi_0. \end{aligned}$$

Oznaczmy przez  $\mathfrak{B}$  niezerowe wektory z spośród rodziny  $\{\pi(T^n)\xi_0\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\pi(T^{*m})\xi_0\}_{m \in \mathbb{N}}$ . Z powyższych rozważań wynika, iż elementy  $\mathfrak{B}$  są unormowanymi wektorami własnymi dla wszystkich operatorów  $\pi(a)$ ,  $a \in C(\tilde{X})$ . Przestrzeń rozpięta przez te wektory jest niezmiennicza ze względu na działanie operatorów  $\pi(T)$ ,  $\pi(T^*)$ ,  $\pi(a)$ ,  $a \in C(\tilde{X})$ , a zatem jest niezmiennicza ze względu na działanie algebry  $\pi(C^*(X, \alpha; Y))$  i z nieprzywiedlności  $\pi$  wynika, iż  $\mathfrak{B}$  rozpiną całą przestrzeń  $H$ .

Jeśli ponadto punkt  $\tilde{x}_0$  nie jest okresowy to niezerowe wektory z  $\mathfrak{B}$  są parami ortogonalne, jako wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym dla pewnego operatora samosprzężonego  $\pi(a)$  – każde dwa punkty z  $\tilde{X}$  można rozdzielić za pomocą pewnej funkcji  $a \in C(\tilde{X})$  o wartościach rzeczywistych. Zatem w tym przypadku  $\mathfrak{B}$  jest bazą ortonormalną przestrzeni  $H$  i nietrudno spostrzec, że  $\pi$  jest unitarnie równoważne reprezentacji  $\pi_{\tilde{x}_0}$ .

Jeśli punkt  $\tilde{x}_0$  jest punktem okresowym o okresie  $N$ , to

$$H_i := \{\xi \in H : \pi(a)\xi = a(\tilde{\alpha}^i(\tilde{x}_0))\xi, \text{ dla każdego } a \in C(\tilde{X})\},$$

$i = 0, \dots, N-1$ , są niepustymi podprzestrzeniami  $H$  i operator  $T$  przekształca izometrycznie  $H_i$  na  $H_{i-1 \pmod N}$ . Zatem przestrzeń  $\bigoplus_{i=0}^{N-1} H_i$  jest niezmiennicza ze względu na działanie algebry  $\pi(C^*(X, \alpha; Y))$  i z nieprzywiedlności  $\pi$  mamy

$$H = \bigoplus_{i=0}^{N-1} H_i.$$

Zauważmy dalej, że  $\dim(H_0) = 1$ , gdyż w przeciwnym razie istniałaby nietrywialna podprzestrzeń niezmiennicza  $H'_0 \subset H_0$  dla operatora unitarnego  $\pi(T^N) : H_0 \rightarrow H_0$ , a wtedy  $H' := \bigoplus_{i=0}^{N-1} \pi(T^i)H'_0$  byłaby nietrywialną podprzestrzenią  $H$  niezmienniczą ze względu na działanie  $\pi(C^*(X, \alpha; Y))$ .

Skoro  $\dim(H_0) = 1$ , to  $\dim(H_i) = 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , i operator unitarny  $\pi(T^N) : H_0 \rightarrow H_0$  jest postaci  $\pi(T^N)e_0 = \gamma e_0$ , gdzie  $\gamma \in S^1$ . Zatem można wybrać bazę  $e_0, e_1, \dots, e_{N-1}$  w  $H$ ,  $e_i \in H_i$ , tak, że

$$\pi(T^i)e_0 = \lambda^i e_{-i \pmod{0}}, \quad \pi(a)e_i = a(\tilde{\alpha}^i(\tilde{x}_0))e_i,$$

gdzie  $\lambda^n = \gamma$ . Baza ta ustala unitarną równoważność reprezentacji  $\pi$  z reprezentacją  $\pi_{\tilde{x}_0, \lambda}$ .

ii)  $\Rightarrow$  iii). Jeśli  $\tilde{x}_0$  jest punktem izolowanym w  $\tilde{X}_\pi$ , to istnieje  $a \in C(\tilde{X})$  takie, że  $a(\tilde{x}_0) = 1$  oraz  $a(\tilde{x}) = 0$ , dla  $\tilde{x} \in \tilde{X}_\pi \setminus \{\tilde{x}_0\}$ . Wtedy  $\pi(a)$  jest niezerowym rzutem ortogonalnym i dla dowolnego  $b \in C(\tilde{X})$  mamy

$$\pi(b)\pi(a) = \pi(ba) = \pi(b(\tilde{x}_0)a) = b(\tilde{x}_0)\pi(a).$$

Zatem dowolny niezerowy wektor z  $\pi(a)H$  jest wspólnym wektorem własnym dla wszystkich  $a \in C(\tilde{X})$ . ■

### 7.3 Dyskretyzacja jako metoda badania odwracalności operatorów

W przeciwieństwie do elementu  $b \in C^*(X, \alpha; Y)$  operatory  $\pi_{\tilde{x}}(b)$ ,  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , gdzie  $\pi_{\tilde{x}}$  są reprezentacjami dyskretnymi zdefiniowanymi w punktach 7.2 - 7.5, są zazwyczaj znane, a już na pewno znacznie mniej złożone. Jeśli na przykład  $b = a\mathbf{T}$ , gdzie  $a \in \mathcal{B}$ , to operatory  $\pi_{\tilde{x}}(b)$ ,  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , są po prostu klasycznymi operatorami przesunięcia z wagą działającymi w przestrzeniach  $\ell^2$ . Operatory typu  $\pi_{\tilde{x}}(b)$  będziemy nazywać dyskretyzacjami operatora  $b$ .

**Definicja 7.9.** Niech  $aT$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , będzie abstrakcyjnym ważonym operatorem przesunięcia na przestrzeni Hilberta  $H$  z wagą w  $C^*$ -algebrze  $\mathcal{A} \subset L(H)$ , niech  $(X, \alpha)$  będzie układem generowanym przez  $T$  na widmie  $\mathcal{A}$  i niech  $Y$  będzie otoczką ideału  $J = \{a \in \mathcal{A} : aT^*T = a\}$ . Jeśli przyporządkowanie

$$T \longmapsto \mathbf{T}, \quad a \longmapsto \hat{a}, \quad a \in \mathcal{A}, \quad (7.6)$$

przedłuża się do izomorfizmu  $C^*(\mathcal{A}, T) \cong C(X, \alpha; Y)$ , to dla każdego operatora  $b \in C^*(\mathcal{A}, T)$  operatory  $\pi_{\tilde{x}}(b)$ ,  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , zdefiniowane w punktach 7.2 - 7.5 będziemy nazywać *dyskretyzacjami operatora  $b$* .

**Uwaga 7.10.** Warunkiem dostatecznym na to, by przyporządkowanie (7.6) przedłużało się do izomorfizmu  $C^*(\mathcal{A}, T) \cong C(X, \alpha; Y)$  jest np. topologiczna wolność układu  $(X_+, \alpha_+)$  (lub tym bardziej układu  $(X, \alpha)$ ) patrz Twierdzenie 6.5. Warunkiem koniecznym i dostatecznym jest spełnienie nierówności (7.1), por. Twierdzenie B.3 w uzupełnieniach.

Celem obecnego ustępu jest prezentacja dowodu następującego twierdzenia. Pojawiające się tu założenie o metryzowalności  $X$  ma swoje źródło we Wniosku 7.15 będącym jednym z kroków przytoczonego poniżej dowodu.

**Twierdzenie 7.11 (O odwracalności elementów algebry  $C^*(X, \alpha; Y)$ ).** *Jeśli  $X$  jest przestrzenią metryzowalną, to element  $b$  algebry  $C^*(X, \alpha; Y)$  jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy odwracalna jest każda jego dyskretyzacja  $\pi_{\tilde{x}}(b)$ ,  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ .*

Biorąc pod uwagę Twierdzenie 6.5, jako wniosek z powyższego twierdzenia otrzymamy

**Twierdzenie 7.12 (O odwracalności operatorów w przestrzeniach Hilberta).** *Niech  $aT$  będzie ważonym operatorem przesunięcia na przestrzeni Hilberta  $H$  z wagą w  $C^*$ -algebrze  $\mathcal{A}$  i niech  $(X, \alpha)$  oraz  $(X_+, \alpha_+)$  będą układami generowanym przez  $T$  odpowiednio na widmie  $\mathcal{A}$  oraz widmie  $\mathcal{A}_+ = C^*(\mathcal{A}, T^*T)$ . Jeśli  $X$  jest przestrzenią metryzowalną, a  $(X_+, \alpha_+)$  jest układem topologicznie wolnym, to*

*operator  $b \in C^*(\mathcal{A}, T) \subset L(H)$  jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy odwracalna jest każda jego dyskretyzacja  $\pi_{\tilde{x}}(b)$ ,  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ .*

Konieczność warunku zawartego w Twierdzeniu 7.11 jest oczywista, gdyż odwzorowania  $\pi_{\tilde{x}}$ ,  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , są homeomorfizmami. By pokazać dostateczność tego warunku posłużymy się następującym znanym faktem, patrz np. [Leb82, Lemat 1].

**Lemat 7.13.** *Element  $d$   $C^*$ -algebry  $D$  z jedyneką jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej reprezentacji nieprzywiedlnej  $\pi$  algebry  $D$  odwracalny jest operator  $\pi(d)$ .*

Z Twierdzenia 7.8 oraz Stwierdzenia 7.7 wynika, że jeśli wszystkie operatory  $\pi_{\tilde{x}}(b)$ ,  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , są odwracalne, to operator  $\pi(b)$  jest odwracalny dla każdej dyskretnej reprezentacji nieprzywiedlnej  $\pi$  algebry  $C^*(X, \alpha; Y)$ . Nie możemy w tym momencie jednak zastosować Lematu 7.13, bowiem istnieją algebry kowariancji posiadające reprezentacje nieprzywiedlne niebędące dyskretnymi (np. algebra  $C^*(S^1, \alpha)$ , gdzie  $\alpha$  jest obrotem o kąt niewymierny, por. [Tom87, Str. 104]). Dlatego potrzebujemy przyjrzeć się bliżej właśnie takim reprezentacjom.

**Stwierdzenie 7.14.** *Jeśli  $\pi : C^*(X, \alpha; Y) \rightarrow L(H)$  jest reprezentacją nieprzywiedlną, to dla każdych dwu niepustych, otwartych zbiorów  $U$  i  $V$  w  $\tilde{X}_\pi$  istnieje  $n \in \mathbb{Z}$  takie, że*

$$\tilde{\alpha}^n(U \cap \tilde{\Delta}_n) \cap V \neq \emptyset. \quad (7.7)$$

*Ponadto, jeśli reprezentacja  $\pi$  nie jest dyskretna, to  $\tilde{X}_\pi \subset \tilde{\Delta}_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\Delta}_n$ .*

**Dowód.** Niech  $\pi : C^*(X, \alpha; Y) \rightarrow L(H)$  będzie reprezentacją nieprzywiedlną. By wykazać pierwszą część stwierdzenia założymy, że istnieją dwa niepuste zbiory  $U, V$  otwarte w  $\tilde{X}_\pi$  takie, że dla każdego  $n \in \mathbb{Z}$ , zbiory  $\tilde{\alpha}^n(U \cap \tilde{\Delta}_n)$  i  $V$  są rozłączne. Wtedy zbiór

$$\omega := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\alpha}^n(U \cap \tilde{\Delta}_n)$$

jest otwartym, niepustym  $\tilde{\alpha}$ -niezmienniczym podzbiorem  $\tilde{X}_\pi$  rozłącznym z  $V$ . Zatem zbiorowi  $\omega$  odpowiada rzut spektralny  $P(\omega)$ , należący do słabego domknięcia algebry  $\pi(C(\tilde{X}))$  taki, że

$$P(\omega) \neq 0, \quad P(\omega) \neq 1 \quad \text{oraz} \quad TP(\omega) = P(\omega)T.$$

Skoro rzut  $P(\omega)$  komutuje z algebrą  $\pi(C(X)) = C(\tilde{X}_\pi)$ , to w konsekwencji komutuje on również z algebrą  $\pi(C^*(X, \alpha, Y))$ , co daje sprzeczność z nieprzywiedlnością  $\pi$ .

Założmy teraz, że  $\pi$  jest reprezentacją nieprzywiedlną taką, że  $\tilde{X}_\pi \not\subseteq \tilde{\Delta}_\infty$ . Wtedy dla pewnego  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{X}_\pi \setminus \tilde{\Delta}_{-n_0} \neq \emptyset$  lub  $\tilde{X}_\pi \setminus \tilde{\Delta}_{n_0} \neq \emptyset$ . Założmy tu np., że  $\tilde{X}_\pi \setminus \tilde{\Delta}_{-n_0} \neq \emptyset$  (przypadek, gdy  $\tilde{X}_\pi \setminus \tilde{\Delta}_{n_0} \neq \emptyset$  rozpatruje się analogicznie). Wtedy dla dowolnego niepustego otwartego podzbioru  $U$  przestrzeni  $\tilde{X}_\pi \setminus \tilde{\Delta}_{-n_0}$  zbiory  $\tilde{\alpha}^n(U \cap \tilde{\Delta}_n)$ ,  $n = -n_0 + 1, -n_0 + 2, \dots$ , są parami rozłączne, a ich suma

$$\omega_U = \bigcup_{n=-n_0}^{\infty} \tilde{\alpha}^n(U \cap \tilde{\Delta}_n)$$

jest otwarta niepusta i  $\tilde{\alpha}$ -niezmiennicza. Analogicznie jak w pierwszej części dowodu, na mocy nieprzywiedlności reprezentacji  $\pi$ , widzimy, iż rzut spektralny  $P(\omega_U)$  odpowiadający zbiorowi  $\omega_U$  jest operatorem identycznościowym na  $H$ , co oznacza, że  $\omega_U = \tilde{X}_\pi$ . Zatem z dowolności wyboru zbioru  $U$  wynika, że  $U = \tilde{X}_\pi \setminus \tilde{\Delta}_{-n_0}$  jest zbiorem jedno-elementowym. Czyli  $\tilde{X}_\pi$  posiada punkt izolowany i na mocy Twierdzenia 7.8  $\pi$  jest reprezentacją dyskretną. ■

W teorii topologicznych układów dynamicznych warunek (7.7) nieodłącznie wiąże się z pojęciem *tranzytywności*. Mianowicie dla homeomorfizmu  $\alpha : X \rightarrow X$ , na przestrzeni metrycznej  $X$ , warunek (7.7) równoważny jest istnieniu punktu  $x \in X$  takiego, że  $X = \{\alpha^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ , patrz [Wal82, Tw. 5.8], [BS03, 2.2].

**Wniosek 7.15.** *Jeśli przestrzeń  $X$  jest metryzowalna oraz  $\pi : C^*(X, \alpha; Y) \rightarrow L(H)$  jest nieprzywiedlną reprezentacją niebędącą reprezentacją dyskretną, to istnieje punkt  $\tilde{x} \in \tilde{\Delta}_\infty$  taki, że*

$$\tilde{X}_\pi = \overline{\{\tilde{\alpha}^n(\tilde{x}) : n \in \mathbb{Z}\}}.$$

Teraz jesteśmy gotowi, żeby zakończyć dowód Twierdzenia 7.11.

**Dowód Twierdzenia 7.11.** W świetle Lematu 7.13, Twierdzenia 7.8 i Stwierdzenia 7.7 potrzebujemy jedynie pokazać, że jeśli wszystkie operatory  $\pi_{\tilde{x}}(b)$ ,  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , są odwracalne i  $\pi$  jest nieprzywiedlną reprezentacją niebędącą reprezentacją dyskretną, to operator  $\pi(b)$  również jest odwracalny. Jeśli  $\pi$  jest taką reprezentacją, to na mocy Wniosku 7.15 istnieje punkt  $\tilde{x}_0 \in \tilde{\Delta}_\infty$  taki, że  $\tilde{X}_\pi = \overline{\{\tilde{\alpha}^n(\tilde{x}_0) : n \in \mathbb{Z}\}}$ . Reprezentację  $\pi_{\tilde{x}_0}$ , zdefiniowaną w punkcie 7.5, można traktować jako zintegrowaną reprezentację kowariantną układu  $(\tilde{X}_\pi, \tilde{\alpha})$  związaną ze zbiorem pustym, por. Definicja A.2, Twierdzenie A.3. Wprost z jej definicji wynika, że spełnia ona warunek (B.1), a zatem mamy kanoniczny izomorfizm

$$\pi_{\tilde{x}_0}(C^*(X, \alpha; Y)) \cong C^*(\tilde{X}_\pi, \tilde{\alpha}; \emptyset),$$

patrz Twierdzenie B.3. Analogicznie, reprezentację  $\pi$  można traktować jako reprezentację zadaną przez reprezentację kowariantną układu  $(\tilde{X}_\pi, \tilde{\alpha})$  związaną ze zbiorem pustym. Otrzymujemy stąd, por. Twierdzenie A.3, że istnieje epimorfizm algebry

$\pi_{x_0}(C^*(X, \alpha; Y))$  na algebrę  $\pi(C^*(X, \alpha; Y))$ , przy którym  $\pi_{x_0}(b)$  przechodzi na  $\pi(b)$  i skoro  $\pi_{x_0}(b)$  jest operatorem odwracalnym, to operator  $\pi(b)$  jest również odwracalny. ■

## 7.4 Twierdzenia typu Wienera

Przypomnijmy, że podalgebrę  $\mathcal{A}$  algebry  $\mathcal{B}$  z jedyneką  $1 \in \mathcal{B}$ , taką, że  $1 \in \mathcal{A}$ , nazywa się *pełną podalgebrą* algebry  $\mathcal{B}$ , gdy każdy element  $a \in \mathcal{A}$  odwracalny w  $\mathcal{B}$  jest również odwracalny w  $\mathcal{A}$  (równoważnie widmo każdego elementu w algebrze  $\mathcal{A}$  pokrywa się z jego widem w algebrze  $\mathcal{B}$ ). Klasyczny rezultat Wienera mówi, że algebra funkcji okresowych równych swojemu rozwinięciu w szereg Fouriera, których ciąg współczynników jest absolutnie sumowalny, jest pełną podalgebrą wszystkich ciągłych funkcji okresowych, por. [Żel, 9.4.b], [Rud01, 11.6]. Wykażemy, że analogiczne twierdzenie zachodzi również dla algebr kowariancji  $C^*(X, \alpha; Y)$  (i współczynników Fouriera zdefiniowanych w Twierdzeniu A.5). Opierać się będziemy na znanej wersji Twierdzenia Wienera dla algebr Banacha [BP42]. Jeśli  $\mathcal{D}$  jest algebrą Banacha, a  $X$  przestrzenią zwartą, to przez  $C(X, \mathcal{D})$  oznaczamy algebrę funkcji ciągłych na  $X$ , przyjmujących wartości w  $\mathcal{D}$ .

**Twierdzenie 7.16** ([BP42]). *Niech  $\mathcal{D}$  będzie algebrą Banacha z jedyneką i niech  $F(S^1, \mathcal{D})$  będzie podzbiorem  $C(S^1, \mathcal{D})$  składającym się z funkcji postaci*

$$f(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \lambda^k, \quad \text{gdzie} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|a_k\| < \infty, \quad a_k \in \mathcal{D}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Wtedy  $F(S^1, \mathcal{D})$  jest pełną podalgebrą  $C(S^1, \mathcal{D})$ .

Pierwszym krokiem jest

**Twierdzenie 7.17.** *Zbiór funkcji, o wartościach operatorowych, postaci*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \lambda^{-k} \mathbf{T}^{*k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k \mathbf{T}^k, \quad \text{gdzie} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|a_k\| < \infty, \quad a_k \in C(\widetilde{X}), \quad k \in \mathbb{Z},$$

stanowi pełną \*-podalgebrę algebry  $C(S^1, C^*(X, \alpha; Y))$ .

**Dowód.** Jasne jest, iż opisany powyżej zbiór jest \*-podalgebrą  $C(S^1, C^*(X, \alpha; Y))$ . Niech  $f(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \lambda^{-k} \mathbf{T}^{*k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k \mathbf{T}^k$  będzie elementem tego zbioru i niech  $f$  będzie odwracalny w  $C(S^1, C^*(X, \alpha; Y))$ . Wtedy na mocy Twierdzenia 7.16 element  $f$  jest odwracalny w podalgebrze  $F(S^1, C^*(X, \alpha; Y))$  algebry  $C(S^1, C^*(X, \alpha; Y))$ , to jest

$$f(\lambda)^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \lambda^k, \quad \text{gdzie} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|b_k\| < \infty, \quad b_k \in C^*(X, \alpha; Y).$$

Aby zbadać postać elementów  $b_k$  oznaczmy przez  $\mathcal{D}$  domknięcie w  $C(S^1, C^*(X, \alpha; Y))$  zbioru:

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \lambda^{-k} \mathbf{T}^{*k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k \mathbf{T}^k : \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|a_k\| < \infty, \quad a_k \in C(\widetilde{X}), \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Zauważmy, że  $\mathcal{D}$  (jako  $C^*$ -podalgebra) jest pełną podalgebrą  $C(S^1, C^*(X, \alpha; Y))$  i skoro  $f \in \mathcal{D}$ , to  $f^{-1} \in \mathcal{D}$ . Ustalmy teraz  $k_0 \in \mathbb{Z}$  i niech  $g(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{-k} \lambda^{-k} \mathbf{T}^{*k} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k \lambda^k \mathbf{T}^k$  będzie elementem  $\mathcal{D}$ . Stąd, iż  $g(\lambda) = \gamma_\lambda(g(1))$ , gdzie  $\gamma_\lambda$  jest automorfizmem  $C^*$ -algebry  $C^*(X, \alpha; Y)$  opisanym w Twierdzeniu A.6, oraz z Twierdzenia B.3 otrzymujemy

$$\|g\|_{C(S^1, C^*(X, \alpha; Y))} = \|g(1)\|_{C^*(X, \alpha; Y)} \geq \|d_{k_0}\|.$$

Zatem odwzorowanie

$$N_{k_0}(g) = \begin{cases} d_{k_0} \mathbf{T}^{k_0}, & k_0 \geq 0, \\ d_{k_0} \mathbf{T}^{*|k_0|}, & k_0 < 0, \end{cases}$$

jest poprawnie zdefiniowane i przedłuża się do ograniczonego operatora na  $\mathcal{D}$ . Dla unormowanej miary lebesgue'a  $m$  na  $S^1$ , z jednej strony mamy

$$\int_{S^1} f(\lambda)^{-1} \lambda^{-k_0} dm(\lambda) = N_{k_0}(f(\lambda)^{-1}),$$

natomiast z drugiej

$$\int_{S^1} f(\lambda)^{-1} \lambda^{-k_0} dm(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \int_{S^1} \lambda^{k-k_0} dm(\lambda) = b_{k_0}.$$

Stąd wynika, że  $f(\lambda)^{-1}$  jest postaci

$$f(\lambda)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} d_{-k} \mathbf{T}^{*k} + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k d_k \mathbf{T}^k,$$

dla pewnych elementów  $d_k \in C(\tilde{X})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , takich, że  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|d_k\| < \infty$ . ■

Teraz wykażemy główny rezultat tego podrozdziału, który zastosowany do Przykładu B.4 (uzupełnienia) przyjmuje postać klasycznego Twierdzenia Wienera.

**Twierdzenie 7.18 (Twierdzenie Wienera dla algebr kowariancji).** *Zbiór elementów postaci*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \mathbf{T}^{*k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{T}^k, \quad \text{gdzie} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|a_k\| < \infty, \quad a_k \in C(\tilde{X}), \quad k \in \mathbb{Z},$$

stanowi pełną  $*$ -podalgebrę algebry kowariancji  $C^*(X, \alpha; Y)$ .

**Dowód.** Jasne jest, iż opisany powyżej zbiór jest  $*$ -podalgebrą  $C^*(X, \alpha; Y)$ . Niech  $b = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \mathbf{T}^{*k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{T}^k$  będzie elementem tego zbioru, odwracalnym w  $C^*(X, \alpha; Y)$ . Wtedy dla każdego  $\lambda \in S^1$  element

$$\gamma_\lambda(b) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} a_{-k} \mathbf{T}^{*k} + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k a_k \mathbf{T}^k$$

jest również odwracalny, patrz Twierdzenie A.7. Zatem odwzorowanie  $\gamma_{(\cdot)}(b) : S^1 \ni \lambda \rightarrow \gamma_\lambda(b) \in C^*(X, \alpha; Y)$  jest odwracalnym elementem algebry  $C(S^1, C^*(X, \alpha; Y))$  i na mocy Twierdzenia 7.17 element  $\gamma_\lambda(b)^{-1}$  jest postaci

$$\gamma_\lambda(b)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} d_{-k} \mathbf{T}^{*k} + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k d_k \mathbf{T}^k, \quad \text{gdzie} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|d_k\| < \infty, \quad d_k \in C(\tilde{X}).$$

Stąd operator

$$b^{-1} = \gamma_1(b)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} d_{-k} \mathbf{T}^{*k} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k \mathbf{T}^k$$

jest pożądaną postaci. ■

Stosując Twierdzenie 6.5 otrzymujemy kolejną, ważną w kontekście operatorów przesunięcia z wagą, wersję powyższego twierdzenia typu Wienera.

**Twierdzenie 7.19 (O postaci operatora odwrotnego).** *Niech  $aT$  będzie abstrakcyjnym operatorem przesunięcia na przestrzeni Hilberta  $H$  z wagą w  $C^*$ -algebrze  $\mathcal{A}$  i niech układ  $(X_+, \alpha_+)$  generowanym przez  $T$  na widmie  $\mathcal{A}_+ = C^*(\mathcal{A}, T^*T)$  będzie topologicznie wolny. Jeśli operator postaci*

$$b = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} T^{*k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k, \quad \text{gdzie} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|a_k\| < \infty, \quad a_k \in \mathcal{B} = C^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{*n} \mathcal{A} T^n\right),$$

jest odwracalny, to operator  $b^{-1}$  jest również powyższej postaci.

## Uwagi do rozdziału 7

Przedstawiona w podrozdziale 7.2 klasyfikacja dyskretnych nieprzywiedlnych reprezentacji algebry  $C^*(X, \alpha; Y)$  jest uogólnieniem analogicznej klasyfikacji dla klasycznych produktów krzyżowych (w przypadku algebry przemiennej i grupy  $G = \mathbb{Z}$ ), por. [Tom87, podrozdział 4.1].

Reprezentacje za pomocą operatorów dyskretnych, związanych z orbitami odpowiednich układów dynamicznych, jako metoda analizowania odwracalności operatorów funkcjonalnych służyły w różnych przypadkach wielu autorom, patrz [AL94, uwagi do podrozdziału 21], [Ant96, uwagi do rozdziału 3]. Idea ogólnego podejścia, oparta na badaniu reprezentacji nieprzywiedlnych odpowiednich  $C^*$ -algebr związanych z *automorfizmami* została przedstawiona przez A. V. Lebedeva w [Leb82]. W szczególności głównym rezultatem [Leb82] jest wersja Twierdzenia 7.11 wykazana przy założeniu, że  $T$  jest operatorem *unitarnym* generującym topologicznie wolny *homeomorfizm*  $\alpha : X \rightarrow X$ , por. [AL94, Tw. 21.2], [Ant96, Tw. 10.1].

Najprawdopodobniej jako pierwszy Twierdzenie 7.16 [BP42], do wykazania twierdzenia typu 7.18, 7.19, zastosował V. N. Semenjuta [Sem77], który badał operatory kompozycji z *obrotami okręgu*  $S^1$  o kąt niewymierny. Następnie pomysł ten stosowało wielu autorów, do różnych operatorów, a ogólne twierdzenia dla  $C^*$ -algebr i produktów krzyżowych związanych z *automorfizmami* otrzymał A. V. Lebedev, por. [AL94, uwagi do podrozdziału 26]. Twierdzenie 7.18 jest uogólnieniem wyniku [AL94, Tw. 26.6] dla produktów krzyżowych, w przypadku algebry przemiennej i grupy  $G = \mathbb{Z}$ . Abstrahując od roli, jaką w klasycznym kontekście pełni twierdzenie Wienera, otrzymany tutaj rezultat posłuży nam w następnych rozdziałach jako narzędzie w badaniu odwracalności, umożliwiające przejście od operatorów w przestrzeni  $L^2$  do operatorów w przestrzeniach  $L^p$ .



## Rozdział 8

# Odwracalność elementów algebr generowanych przez konkretne ważone operatory przesunięcia w przestrzeniach $L^p$

Głównym rezultatem obecnego rozdziału jest Twierdzenie 8.7, które mówi, że *odwracalność* operatorów należących do algebry  $B_p$  zawierającej konkretne operatory ważonego przesunięcia  $aT_p$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , działające w przestrzeniach  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , formalnie *nie zależy od  $p$* . Dzięki temu twierdzeniu oraz wynikom rozdziału 6, w rozdziale 9 otrzymamy pełny opis widma operatorów  $aT_p$ .

Zmierzając do Twierdzenia 8.7 poczynimy dwa kroki. Po pierwsze, korzystając z udowodnionego w poprzednim rozdziale twierdzenia typu Wienera dla algebr kowariancji (podrozdział 7.4) pokażemy, że odwracalność elementów w algebrach generowanych przez klasyczne ważone operatory przesunięcia w przestrzeniach  $\ell^p$  nie zależy od  $p$ . Po drugie, metodą dyskretyzacji, również opracowaną w poprzednim rozdziale (podrozdział 7.3), sprowadzimy odwracalność operatorów w przestrzeniach  $L^p$  do odwracalności operatorów w przestrzeniach  $\ell^p$ . Ten drugi krok wymaga najbardziej technicznego dowodu niniejszej rozprawy – podrozdział 8.2.1.

### 8.1 Odwracalność operatorów w przestrzeniach $\ell^p$

Niech  $E$  będzie jedną z przestrzeni Banacha  $\ell^p(\mathbb{Z})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , lub  $c_0(\mathbb{Z})$  (przestrzeń dwustronnych ciągów zbieżnych do zera, przy  $|n| \rightarrow \infty$ ). Oznaczmy przez  $D(\mathbb{Z}) \subset L(E)$  algebrę operatorów mnożenia przez dwustronny ciąg ograniczony, a przez  $T_{\mathbb{Z}}$  klasyczny operator przesunięcia na  $E$ , to jest

$$T_{\mathbb{Z}}(\dots, x(-1), \overset{\cdot}{x}(0), x(1), \dots) = (\dots, x(0), \overset{\cdot}{x}(1), x(2), \dots),$$

gdzie kropka nad daną wartością wyznacza zerową współrzędną ciągu. Następujący fakt został wykazany w [Leb83].

**Twierdzenie 8.1.** *Odwracalność operatora postaci*

$$b = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T_{\mathbb{Z}}^k, \quad \text{gdzie} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|a_k\| < \infty, \quad a_k \in D(\mathbb{Z}), \quad k \in \mathbb{Z},$$

nie zależy od przestrzeni na której działa, to znaczy jest (dobrze określony i) odwracalny, albo nieodwracalny równocześnie we wszystkich przestrzeniach  $\ell^p(\mathbb{Z})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $c_0(\mathbb{Z})$ .

Wykażemy teraz analogiczne twierdzenie dla operatorów na przestrzeni ciągów jednostronnych. Mianowicie, niech  $E$  będzie jedną z przestrzeni Banacha  $\ell^p(\mathbb{N})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , lub  $c_0(\mathbb{N})$ , oznaczmy przez  $D(\mathbb{N}) \subset L(E)$  algebrę operatorów mnożenia przez jednostronny ciąg ograniczony, a przez  $T_{\mathbb{N}}, S_{\mathbb{N}} \in L(E)$  standardowe operatory przesunięcia na  $E$ , patrz Przykład 1.13. Udowodnimy

**Twierdzenie 8.2.** *Operator postaci*

$$b = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} S_{\mathbb{N}}^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_{\mathbb{N}}^k, \quad \text{gdzie} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|a_k\| < \infty, \quad a_k \in D(\mathbb{N}), \quad k \in \mathbb{Z},$$

jest (dobrze określony i) odwracalny, albo nieodwracalny równocześnie we wszystkich przestrzeniach  $\ell^p(\mathbb{N})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $c_0(\mathbb{N})$ .

Przypomnijmy, Twierdzenie 7.16, że podalgebra  $F(S^1, L(E))$  algebry  $C(S^1, L(E))$  składająca się z funkcji postaci

$$f(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \lambda^k, \quad \text{gdzie} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|a_k\| < \infty, \quad a_k \in L(E), \quad k \in \mathbb{Z},$$

jest pełna. Oznaczmy przez  $F(S^1, D(\mathbb{N}), S_{\mathbb{N}}, T_{\mathbb{N}})$  podalgebrę  $C(S^1, L(E))$  składającą się z funkcji postaci

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \lambda^{-k} S_{\mathbb{N}}^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k T_{\mathbb{N}}^k, \quad \text{gdzie} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|a_k\| < \infty, \quad a_k \in D(\mathbb{N}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

W przypadku, gdy  $E = \ell^2(\mathbb{N})$ , z Twierdzenia 7.17 wynika, że  $F(S^1, D(\mathbb{N}), S_{\mathbb{N}}, T_{\mathbb{N}})$  jest pełną podalgebrą  $C(S^1, L(E))$ . Jednak, aby udowodnić ten fakt dla przestrzeni Banacha, niebędących przestrzeniami Hilberta, musimy użyć innego argumentu.

**Lemat 8.3.** *Niech  $E = \ell^p(\mathbb{N})$ ,  $1 \leq p < \infty$ , lub  $E = c_0(\mathbb{N})$ . Niech  $\gamma \in S^1$  będzie takie, że  $\gamma^n \neq 1$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  i niech  $g \in D(\mathbb{N})$  będzie operatorem mnożenia przez ciąg  $\{\gamma^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Wtedy zbiór*

$$M_{\gamma} := \{f \in C(S^1, L(E)) : gf(\lambda)g^{-1} = f(\gamma^{-1}\lambda), \lambda \in S^1\}$$

jest pełną podalgebrą  $C(S^1, L(E))$  oraz

$$F(S^1, L(E)) \cap M_{\gamma} = F(S^1, D(\mathbb{N}), S_{\mathbb{N}}, T_{\mathbb{N}}).$$

W szczególności, jako przecięcie dwu pełnych podalgebr  $F(S^1, D(\mathbb{N}), S_{\mathbb{N}}, T_{\mathbb{N}})$  jest pełną podalgebrą  $C(S^1, L(E))$ .

**Dowód.** Dowód faktu, iż  $M_\gamma$  jest pełną podlagebrą  $C(S^1, L(E))$  jest prosty. Rzeczywiście, jeśli  $f$  jest elementem odwracalnym w  $C(S^1, L(E))$ , to dla każdego  $\lambda \in S^1$  mamy

$$gf(\lambda)^{-1}g^{-1} = (gf(\lambda)g^{-1})^{-1} = f(\gamma^{-1}\lambda)^{-1}.$$

Relacje komutacyjne

$$gT_N = \gamma^{-1}T_N g, \quad gS_N = \gamma S_N g$$

implikują inkluzję  $F(S^1, D(\mathbb{N}), S_N, T_N) \subset F(S^1, L(E)) \cap M_\gamma$ . By wykazać inkluzję przeciwną rozpatrzmy  $f(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \lambda^k \in F(S^1, L(E)) \cap M_\gamma$  i ustalmy  $k_0 \in \mathbb{N}$ . Jako, że  $\lambda^{-k_0} S_N^{k_0} \in M_\gamma$  i  $M_\gamma$  jest algebra, to  $\psi(\lambda) := f(\lambda) \lambda^{-k_0} S_N^{k_0} \in M_\gamma$ . Przy czym

$$g\psi(\lambda)g^{-1} = g \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \lambda^k \lambda^{-k_0} S_N^{k_0} g^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(a_k S_N^{k_0}) g^{-1} \lambda^{k-k_0}$$

oraz

$$\psi(\gamma^{-1}\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k S_N^{k_0} (\gamma^{-1}\lambda)^{k-k_0} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a_k S_N^{k_0} \gamma^{k_0-k}) \lambda^{k-k_0},$$

więc porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach  $\lambda$  dostajemy

$$\gamma^{k_0-k} a_k S_N^{k_0} = g(a_k S_N^{k_0}) g^{-1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Niech  $\{e_k\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie standardową bazą Shaudera w przestrzeni  $E$ . Ustalmy dowolne  $k \in \mathbb{Z}$  i niech  $a_k e_{k_0} = \sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l}^{(k_0)} e_l$ ,  $a_{k,l}^{(k_0)} \in \mathbb{C}$ . Wtedy

$$\gamma^{k_0-k} a_k S_N^{k_0} e_0 = \sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l}^{(k_0)} \gamma^{k_0-k} e_l, \quad \text{oraz} \quad g(a_k S_N^{k_0}) g^{-1} e_0 = \sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l}^{(k_0)} \gamma^l e_l,$$

a skoro  $\gamma^m \neq \gamma^n$ , gdy  $m \neq n$ , to  $a_{k,l}^{(k_0)} = 0$ , gdy  $k_0 - k \neq l$ . Zatem

$$a_k e_{k_0} = \begin{cases} a_{k, k_0-k}^{(k_0)} e_{k_0-k}, & k_0 \geq k \\ 0, & k_0 < k \end{cases}.$$

Stąd, dla każdego  $k \in \mathbb{N}$ , operator  $a_k$  jest postaci  $a_k = b_k T_N^k$ , gdzie  $b_k \in D(\mathbb{N})$ , a operator  $a_{-k}$  jest postaci  $a_{-k} = b_{-k} S_N^k$ , gdzie  $b_{-k} \in D(\mathbb{N})$ . Czyli  $f \in F(S^1, D(\mathbb{N}), S_N, T_N)$ . ■

**Dowód Twierdzenia 8.2.** Niech  $b$  będzie operatorem z tezy Twierdzenia 8.2. Rozważmy funkcję  $b(\lambda) := \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \lambda^{-k} S_N^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k T_N^k$  określoną na  $S^1$ . Jeśli  $g(\lambda)$  oznacza operator mnożenia przez ciąg  $\{\lambda^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , to  $b(\lambda) = g(\lambda)^{-1} b g(\lambda)$ , a stąd operatory  $b(\lambda)$  są równocześnie, albo odwracalne, albo nieodwracalne dla wszystkich  $\lambda \in S^1$ . Jeśli są one odwracalne i  $E \neq \ell^\infty(\mathbb{N})$ , to w świetle Lematu 8.3,  $b(\lambda)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k} \lambda^{-k} S_N^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \lambda^k T_N^k$ , gdzie  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|b_k\| < \infty$ ,  $b_k \in D(\mathbb{N})$ . Jasnym jest, że wtedy operator  $b(1)^{-1}$  jest operatorem odwrotnym do  $b$ , niezależnie od przestrzeni  $E$  na której działa. Jeśli operator  $b$  działa w przestrzeni  $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$ , to zachowuje on podprzestrzeń  $c_0(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$  i można go traktować jako dwukrotne sprzężenie operatora  $b|_{c_0(\mathbb{N})}$ . Zatem operator  $b$  jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy odwracalny jest operator  $b|_{c_0(\mathbb{N})}$  i dowód jest zakończony. ■

## 8.2 Odwracalność operatorów w przestrzeniach $L^p$

Niech  $aT_p$  będzie konkretnym operatorem ważonego przesunięcia na przestrzeni  $L^p_\mu(\Omega)$ ,  $p \in [1, \infty]$ , związanym z częściowym układem dynamicznym  $(X, \alpha)$ , patrz Definicja 3.1. Przypomnijmy, że operator  $T_p$  jest częściową izometrią sprzężoną z operatorem  $S_p$ , a waga  $a$  jest elementem algebry  $\mathcal{A} \subset L(L^p_\mu(\Omega))$  izomorficznej z  $C(X)$  i operator  $T_p$  generuje na widmie  $\mathcal{A}$  układ  $(X, \alpha)$ , por. podrozdział 3.1. Co więcej otoczka  $Y \subset X$  ideału

$$J = \{a \in \mathcal{A} : S_p T_p a = a\}$$

nie zależy od  $p$ , tym samym od  $p$  nie zależy postać układów  $(X_+, \alpha_+)$  i  $(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$  generowanych przez  $T_p$  odpowiednio na widmie algebry Banacha  $\mathcal{A}_+ = S_p T_p \mathcal{A} \oplus (1 - S_p T_p) \mathcal{A}$  oraz algebry Banacha  $\mathcal{B} = \overline{\text{span}}\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_p^n \mathcal{A} T_p^n\}$ , por. Stwierdzenie 3.5, Stwierdzenie 1.26 i Twierdzenie 1.28.

Oznaczmy przez  $B_p$ ,  $p \in [1, \infty]$ , algebrę operatorów postaci

$$b = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} S_p^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_p^k, \quad \text{gdzie } \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|a_k\| < \infty, \quad a_k \in \mathcal{B}. \quad (8.1)$$

Jeśli układ  $(X_+, \alpha_+)$  jest topologicznie wolny, to na mocy Twierdzenia 6.5, algebrę  $B_2$  możemy traktować jako podalgebrę algebry kowariancji  $C^*(X, \alpha; Y)$ . Wtedy zdefiniowane w podrozdziale 7.2 dyskretyzacje  $\pi_{\widetilde{x}}(b)$ ,  $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ , elementu  $b \in C^*(X, \alpha; Y)$  na przestrzeniach Hilberta  $\ell^2$  mają sens dla elementów algebry  $B_2$ , por. Definicja 7.9. Rozszerzymy teraz pojęcie dyskretyzacji operatora na przypadek elementów algebry  $B_p$  dla dowolnego  $p \in [1, \infty]$ .

**Stwierdzenie 8.4 (Dyskretyzacje operatorów na przestrzeniach  $L^p$ ).** *Załóżmy, że układ  $(X_+, \alpha_+)$  jest topologicznie wolny oraz niech  $p \in [1, \infty]$  i  $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ .*

- 1) *Jeśli  $\widetilde{x} \notin (\widetilde{\Delta}_{+\infty} \cup \widetilde{\Delta}_{-\infty})$ , to istnieje punkt  $x_0 \in Y \cap \Delta_N \setminus \Delta_{N+1}$  spełniający (7.2) oraz dokładnie jeden ciągły homomorfizm  $\pi_{\widetilde{x}} : B_p \rightarrow L(\ell^p(\mathbb{N}))$  taki, że dla  $a \in \mathcal{A}$ ,  $\pi_x(a)$  jest operatorem mnożenia przez ciąg  $\{a(\alpha^k(x_0))\}_{k=0}^{N-1}$  i*

$$\pi_{\widetilde{x}}(T_p) = T_N, \quad \pi_{\widetilde{x}}(S_p) = S_N,$$

*są ściętymi operatorami przesunięcia, por. paragraf 7.2.*

- 2) *Jeśli  $\widetilde{x} \in \widetilde{\Delta}_{+\infty} \setminus \widetilde{\Delta}_{-\infty}$ , to istnieje punkt  $x_0 \in Y \cap \Delta_{+\infty}$  spełniający (7.3) oraz dokładnie jeden ciągły homomorfizm  $\pi_{\widetilde{x}} : B_p \rightarrow L(\ell^p(\mathbb{N}))$  taki, że  $\pi_x(a)$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , jest operatorem mnożenia przez ciąg  $\{a(\alpha^k(x_0))\}_{k \in \mathbb{N}}$ , a*

$$\pi_{\widetilde{x}}(T_p) = T_{\mathbb{N}}, \quad \pi_{\widetilde{x}}(S_p) = S_{\mathbb{N}},$$

*są (jednostronnymi) operatorami przesunięcia, por. paragraf 7.3.*

- 3) *Jeśli  $\widetilde{x} \in \widetilde{\Delta}_{-\infty} \setminus \widetilde{\Delta}_{+\infty}$ , to istnieje ciąg  $(x_0, x_1, x_2, \dots)$  spełniający (7.4), (7.5) oraz dokładnie jeden ciągły homomorfizm  $\pi_{\widetilde{x}} : B_p \rightarrow L(\ell^p(\mathbb{N}))$  taki, że  $\pi_x(a)$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , jest operatorem mnożenia przez ciąg  $\{a(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ , a*

$$\pi_{\widetilde{x}}(T_p) = S_{\mathbb{N}}, \quad \pi_{\widetilde{x}}(S_p) = T_{\mathbb{N}},$$

*są (jednostronnymi) operatorami przesunięcia, por. paragraf 7.4.*

- 4) Jeśli  $\tilde{x} \in \tilde{\Delta}_\infty = \tilde{\Delta}_{-\infty} \cap \tilde{\Delta}_{+\infty}$ , to  $\tilde{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ , gdzie  $x_0 \in \Delta_\infty$ , oraz istnieje dokładnie jeden ciągły homomorfizm  $\pi_{\tilde{x}} : B_p \rightarrow L(\ell^p(\mathbb{Z}))$  taki, że  $\pi_x(a)$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , jest operatorem mnożenia przez ciąg  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , gdzie  $a_k = a(\alpha^k(x_0))$ , gdy  $k \geq 0$ ,  $a_k = a(x_{-k})$ , gdy  $k < 0$ , i

$$\pi_{\tilde{x}}(T_p) = T_{\mathbb{Z}}, \quad \pi_{\tilde{x}}(S_p) = (T_{\mathbb{Z}})^{-1},$$

są (dwustronnymi) operatorami przesunięcia, por. paragraf 7.5.

**Dowód.** Algebra Banacha  $\mathcal{B}$  składa się z operatorów mnożenia i (formalnie) nie zależy od  $p$ , por. Stwierdzenie 3.5. Biorąc dodatkowo pod uwagę definicję operatorów  $T_p, S_p$  nietrudno sprawdzić, że

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} S_p^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_p^k \right\|_p = 0 \implies \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} S_2^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_2^k \right\|_2 = 0,$$

gdzie  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|a_k\| < \infty$ ,  $a_k \in \mathcal{B}$ . Stąd wynika, że jeżeli homomorfizmy  $\pi_{\tilde{x}}$  są poprawnie określone dla  $p = 2$ , to są poprawnie określone dla każdego  $p \in [1, \infty]$ . Dla  $p = 2$  homomorfizmy  $\pi_{\tilde{x}}$  pokrywają się jednak z reprezentacjami zdefiniowanymi w podrozdziale 7.2. ■

Powyższe Stwierdzenie pozwala rozszerzyć nazewnictwo przyjęte w Definicji 7.9.

**Definicja 8.5.** Dla  $b \in B_p$  operatory  $\pi_{\tilde{x}}(b)$ ,  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , opisane w Stwierdzeniu 8.4, działające w przestrzeniach  $\ell^p$  będziemy nazywać *dyskretyzacjami operatora  $b$* .

Twierdzenie 8.7 wykażemy opierając się na rezultatach z podrozdziałów 7.3, 7.4, oraz poniższym twierdzeniu, którego dowód jest na tyle obszerny, że umieścimy, go w oddzielnym ustępie 8.2.1.

**Twierdzenie 8.6 (Warunki konieczne odwracalności).** Niech  $p \in [1, \infty]$  i niech układ  $(X_+, \alpha_+)$  będzie topologicznie wolny.

- i) Jeśli operator  $b \in B_p$  jest odwracalny w przestrzeni  $L^p_\nu(\Omega)$ , to wszystkie jego dyskretyzacje  $\pi_{\tilde{x}}(b)$ ,  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , są odwracalne w przestrzeniach  $\ell^p$ .
- ii) Jeśli  $\tilde{X}$  nie posiada punktów izolowanych i operator  $b \in B_p$  jest operatorem Fredholma, to wszystkie jego dyskretyzacje  $\pi_{\tilde{x}}(b)$ ,  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , są odwracalne.

Teraz jesteśmy gotowi by sformułować i wykazać twierdzenie będące głównym celem obecnego rozdziału.

**Twierdzenie 8.7 (O odwracalności operatorów w przestrzeniach  $L^p$ ).** Jeśli układ  $(X_+, \alpha_+)$  jest topologicznie wolny, a  $X$  jest przestrzenią metryzowalną, to dla każdego  $p \in [1, \infty]$ ,  $B_p$  jest pełną podalgebrą algebry wszystkich ograniczonych operatorów na przestrzeni  $L^p_\mu(\Omega)$ . Ponadto przy ustalonym ciągu wag  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{B} \cong C(\tilde{X})$  takim, że  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|a_k\| < \infty$ , dla rodziny operatorów postaci

$$b_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} S_p^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_p^k \in B_p, \quad p \in [1, \infty],$$

następujące warunki są równoważne

- 1) operatory  $b_p$  są odwracalne dla każdego  $p \in [1, \infty]$ ,
- 2) operator  $b_p$  jest odwracalny dla pewnego  $p \in [1, \infty]$ ,
- 3) wszystkie dyskretyzacje operatora  $b_p$  są odwracalne dla każdego  $p \in [1, \infty]$ ,
- 4) wszystkie dyskretyzacje operatora  $b_p$  są odwracalne dla pewnego  $p \in [1, \infty]$ .

Jeśli dodatkowo  $X_+$  nie posiada punktów izolowanych, to powyższe warunki są równoważne następującym dwóm

- 5) operatory  $b_p$  są operatorami Fredholma, dla każdego  $p \in [1, \infty]$ ,
- 6) operator  $b_p$  jest operatorem Fredholma, dla pewnego  $p \in [1, \infty]$ .

**Dowód.** Implikacje  $1) \Rightarrow 2)$ ,  $3) \Rightarrow 4)$  i  $1) \Rightarrow 5)$ ,  $2) \Rightarrow 6)$  są oczywiste. Na mocy twierdzeń 8.1, 8.2 warunki 3), 4) są równoważne i na mocy Lematu 8.6 zachodzą implikacje  $1), 2), 5), 6) \Rightarrow 3), 4)$  oraz, przy założeniu, że  $X_+$  nie posiada punktów izolowanych, implikacje  $5), 6) \Rightarrow 3), 4)$ . Wystarczy więc wykazać tylko implikację  $3) \Rightarrow 1)$ .

Jeśli zachodzi warunek 3), to odwracalne są wszystkie dyskretyzacje operatora  $b_2$  i z Twierdzenia 7.11 wynika iż operator  $b_2$  jest odwracalny, a z Twierdzenia 7.18 operator  $b_2^{-1}$  jest postaci

$$b_2^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k} S_2^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k T_2^k, \quad \text{gdzie } \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|b_k\| < \infty, \quad b_k \in C_{\Delta_k}(X).$$

Nietrudno teraz zauważyć, że operator  $\sum_{k=1}^{\infty} b_{-k} S_p^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k T_p^k$  jest operatorem odwrotnym do  $b_p$  dla każdego  $p \in [1, \infty] \cup \{0\}$ . ■

### 8.2.1 Dowód Twierdzenia 8.6

Niech  $b \in B_p$  i niech  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  będzie taki, że  $\pi_{\tilde{x}}(b)$  nie jest operatorem odwracalnym w  $\ell^p$ . Pokażemy, że operator  $b$  nie jest odwracalny i jeśli  $X_+$  nie posiada punktów izolowanych, to  $b$  nie jest również operatorem Fredholma.

Ze względu na otwartość zbioru operatorów odwracalnych oraz zbioru operatorów Fredholma możemy bez straty ogólności założyć, że operator  $b$  jest postaci (8.1), gdzie tylko skończona ilość współczynników  $a_{\pm k}$  jest różna od zera, a niezerowe współczynniki  $a_{\pm k}$  leżą w algebrze Banacha  $\mathcal{B}_N = \text{span}\{\bigcup_{n=0}^N S_p^n \mathcal{A} T_p^n\}$ , dla dostatecznie dużego  $N$ . Na mocy Twierdzenia 3.6,  $a T_p$ ,  $a \in \mathcal{B}_N$ , są konkretnymi operatorami przesunięcia z wagą związanymi z układem  $(\tilde{X}_N, \tilde{\alpha}_N)$ . Nietrudno spostrzec, że topologiczna wolność układu  $(X_+, \alpha_+)$  pociąga topologiczną wolność układu  $(\tilde{X}_N, \tilde{\alpha}_N)$  oraz  $X_+$  nie posiada punktów izolowanych wtedy i tylko wtedy, gdy takowych punktów nie posiada  $\tilde{X}_N$ . W szczególności, aby uprościć notację możemy przyjąć, że

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}_N, \quad (\tilde{X}_N, \tilde{\alpha}_N) = (X, \alpha),$$

czyli innymi słowy zakładamy, że

$$b = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} S_p^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_p^k, \quad \text{gdzie } a_k \in \mathcal{A}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad a_{\pm k} = 0, \quad \text{dla } |k| > J,$$

$S_p T_p \in \mathcal{A}$  oraz układ  $(X, \alpha) = (X_+, \alpha_+)$  jest topologicznie wolny.

Zasadnicza idea dowodu polega na tym by za pomocą odwzorowania  $\varphi$  z Definicji 3.1 oraz wektorów „powodujących nieodwracalność”  $\pi_{\tilde{x}}(b)$  skonstruować wektory „powodujące nieodwracalność” operatora  $b$ . W zależności od postaci operatora  $\pi_{\tilde{x}}(b)$ , por. Stwierdzenie 8.4 i podrozdział 7.2, należy rozważyć następujące cztery przypadki:

1) Jeśli  $\tilde{x}$  posiada skończoną orbitę zaczynającą się od  $x_0 \in \Delta_{N-1} \setminus (\Delta_{-1} \cup \Delta_N)$ , por. paragraf 7.3, to operator  $\pi_{\tilde{x}}(b)$  jest skończenie wymiarowy i istnieje unormowany wektor  $f = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k e_k$  należący do jego jądra  $\pi_{\tilde{x}}(b)$ . Bezpośredni rachunek pokazuje, iż

$$\pi_{\tilde{x}}(b)f = \left( \sum_{i=1}^{N-1} \pi_{\tilde{x}}(a_{-i}) S_N^i + \sum_{i=0}^{N-1} \pi_{\tilde{x}}(a_i) T_N^i \right) \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k e_k = \sum_{j=0}^{N-1} \left( \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k a_{k-j}(\alpha^j(x_0)) \right) e_j,$$

czyli

$$\sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k a_{(k-j)}(\alpha^j(x_0)) = 0 \quad \text{dla każdego } j = 0, \dots, N-1. \quad (8.2)$$

Niech  $U$  będzie otwartym i niepustym podzbiorem  $\Delta_{N-1} \setminus (\Delta_{-1} \cup \Delta_N)$  takim, że zbiór

$$\omega := \varphi^{-1}(U) \cap \Omega_0$$

ma miarę skończoną. Na mocy wyboru  $U$  zbiory  $\alpha^j(U)$ ,  $j = 0, \dots, N-1$ , są parami rozłączne. Z warunku 2) Definicji 3.1 wynika więc, że zbiory  $\gamma^j(\omega)$ ,  $j = 0, \dots, N-1$ , również są parami rozłączne. Połóżmy

$$f_U := \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \frac{S_p^k(\chi_\omega)}{\mu(\omega)^{\frac{1}{p}}} = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \frac{\chi_{\gamma^k(\omega)}}{\left| \frac{\gamma(\mu)}{d\mu} \right|^{\frac{1}{p}} \mu(\omega)^{\frac{1}{p}}} \in L_\mu^p(X).$$

Wtedy  $\|f_U\| = \|f\| = 1$  oraz

$$bf_U = \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_{-i} S_p^i + \sum_{i=0}^{\infty} a_i T_p^i \right) \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \frac{S_p^k(\chi_\omega)}{\mu(\omega)^{\frac{1}{p}}} = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k a_{k-j} \frac{S_p^j(\chi_\omega)}{\mu(\omega)^{\frac{1}{p}}}.$$

Skoro  $x_0 \in \Delta_{N-1} \setminus (\Delta_{-1} \cup \Delta_N)$ , to dla dowolnego  $\varepsilon > 0$ , zbiór  $U$  można wybrać tak, aby  $\|bf_U\| < \varepsilon$ . Rzeczywiście, warunki (8.2) oraz warunek 1) Definicji 3.1 pozwalają przyjąć, iż

$$\max_{x \in U} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k a_{k-j}(\alpha^j(x)) \right| < \frac{\varepsilon}{N^{\frac{1}{p}}}, \quad \text{dla } j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Dla  $p = \infty$  nierówność  $\|bf_U\| < \varepsilon$  jest jasna. Dla  $p < \infty$  nierówność ta wynika z następującego, bezpośredniego rachunku

$$\|bf_U\|^p = \frac{1}{\mu(\omega)} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\Omega} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k (a_{k-j} \circ \varphi) S_p^j(\chi_\omega) \right|^p d\mu$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mu(\omega)} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\omega} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k a_{k-j}(\varphi(\gamma^j(t))) \right|^p d\mu(t) \\
&= \frac{1}{\mu(\omega)} \sum_{j=0}^{N-1} \int_U \left| \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k a_{k-j}(\alpha^j(x)) \right|^p d\nu(x) < \varepsilon^p.
\end{aligned}$$

Podsumowując, niezależnie od  $p$  mamy  $\|bf_U\| < \varepsilon$ . Pokazaliśmy zatem, że operator  $b$  nie jest ograniczony z dołu, czyli nie jest odwracalny.

Jeśli dodatkowo  $X$  nie posiada punktów izolowanych, to stosując powyższe rozumowanie możemy wybrać ciąg  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  parami rozłącznych otwartych i niepustych podzbiorów  $\Delta_{N-1} \setminus (\Delta_{-1} \cup \Delta_N)$  takich, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|bf_{U_n}\| = 0$  oraz  $\|f_{U_n}\| = 1$ . Z ciągu wektorów  $\{f_{\omega_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  nie da się wybrać podciągu zbieżnego, gdyż

$$\|f_{U_n} - f_{U_m}\| = 2^{\frac{1}{p}} \geq 1, \quad m \neq n, \quad (8.3)$$

a stąd  $b$  nie może być operatorem Fredholma. Rzeczywiście, gdyby  $b$  był operatorem Fredholma, to istniałby operator  $R$  taki, że  $Rb = 1 - K$ , gdzie  $K$  jest operatorem zwartym. Wtedy można by wybrać podciąg  $\{f_{U_{n_k}}\}_{k \in \mathbb{N}}$  taki, że ciąg  $\{Kf_{U_{n_k}}\}_{k \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny do  $f_0$ , co prowadzi to sprzeczności, gdyż równość

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f_{U_{n_k}} - Kf_{U_{n_k}}) = \lim_{k \rightarrow \infty} Rb f_{U_{n_k}} = 0$$

implikuje, że  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{U_{n_k}} = f_0$ .

2) Niech  $\tilde{x}$  posiada dodatnio nieskończoną orbitę zaczynającą się od  $x_0 \in \Delta_{+\infty} \setminus \Delta_{-1}$ , por. paragraf 7.3.

Rozważmy najpierw przypadek, gdy  $1 < p < \infty$ . Wtedy przestrzenie  $\ell^p(\mathbb{N})$ ,  $L^p_\mu(\Omega)$  są refleksywne i przechodząc ewentualnie do przestrzeni sprzężonej możemy założyć, że operator  $\pi_{\tilde{x}}(b)$  nie jest ograniczony z dołu. Przy tym założeniu istnieje ciąg  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  wektorów z  $\ell^p(\mathbb{N})$  spełniających relacje:

$$\|f_n\| = 1, \quad \|b_{\tilde{x}} f_n\|^p \leq \frac{1}{n} \quad \text{oraz} \quad f_n = \sum_{k=0}^{N(n)} \lambda_k^{(n)} e_k \quad \text{dla pewnego } N(n) \in \mathbb{N}.$$

Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  oznaczmy  $M(n) := N(n) + J$ , gdzie  $J \in \mathbb{N}$  jest takie, że  $a_{\pm k} = 0$  dla  $|k| > J$ . Analogicznie jak w przypadku 1) dla każdego otwartego, niepustego podzbioru

$$U_n \subset \Delta_{M(n)} \setminus \Delta_{-1}$$

takiego, że zbiór  $\omega_n := \varphi^{-1}(U_n) \cap \Omega_0$  ma miarę skończoną położmy

$$f_{U_n} := \sum_{k=0}^{N(n)} \lambda_k^{(n)} \frac{S_p^k(\chi_{\omega_n})}{\mu(\omega_n)^{\frac{1}{p}}} \in L^p_\mu(\Omega).$$

Zbiory  $\gamma^j(\omega_n)$ ,  $j = 0, \dots, M(n)$ , są parami rozłączne, co wynika z różnowartościowości  $\gamma$  oraz relacji  $\omega_n \subset D \setminus \gamma(D)$ . Zatem  $\|f_{\omega_n}\| = \|f_n\| = 1$ .

Niech  $\varepsilon > 0$  będzie dowolny. Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  zbiór  $U_n$  można wybrać tak, aby

$$\max_{x \in U_n} \left| \left| \sum_{0 \leq k \leq N(n)} \lambda_k^{(n)} a_{k-j}(\alpha^j(x)) \right|^p - \left| \sum_{0 \leq k \leq N(n)} \lambda_k^{(n)} a_{k-j}(\alpha^j(x_0)) \right|^p \right| < \frac{\varepsilon}{M(n)}$$



dla  $j = 0, 1, \dots, M(n)$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \|bf_{U_n}\|^p &= \left\| \sum_{j=0}^{M(n)} \sum_{0 \leq k \leq N(n)} \lambda_k^{(n)} a_{k-j} \frac{S_p^j(\chi_{\omega_n})}{\mu(\omega_n)^{\frac{1}{p}}} \right\|^p \\ &= \frac{1}{\mu(\omega_n)} \sum_{j=0}^{M(n)} \int_{\Omega} \left| \sum_{0 \leq k \leq N(n)} \lambda_k (a_{k-j} \circ \varphi) S_p^j(\chi_{\omega_n}) \right|^p d\mu \\ &= \frac{1}{\nu(U_n)} \sum_{j=0}^{M(n)} \int_{U_n} \left| \sum_{0 \leq k \leq N(n)} \lambda_k^{(n)} a_{k-j}(\alpha^j(x)) \right|^p d\nu(x) \\ &< \varepsilon + \sum_{j=0}^{M(n)} \left| \sum_{0 \leq k \leq N(n)} \lambda_k^{(n)} a_{k-j}(\alpha^j(x_0)) \right|^p = \varepsilon + \|\pi_{\tilde{x}}(b)f_n\|^p \leq \frac{1}{n} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Z dowolności  $\varepsilon$  i  $n$  wynika więc, że operator  $b$  nie jest ograniczony z dołu.

Rozważmy teraz przypadek, gdy  $p = 1$ . Jeśli istnieje niezerowy wektor  $f \in \ell^1(\mathbb{N})$  taki, że  $\pi_{\tilde{x}}(b)f = 0$ , to podobnie jak powyżej można utworzyć ciąg elementów  $f_{U_n} \in L_{\mu}^1(\Omega)$  takich, że  $\|f_{U_n}\| = 1$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} bf_{U_n} = 0$ . Jeśli operator  $\pi_{\tilde{x}}(b)$  jest różnowartościowy, to można rozpatrzyć operator

$$b_{\tilde{x}} := \sum_{i=1}^{\infty} T_{\mathbb{N}}^i \pi_{\tilde{x}}(a_{-i}) + \sum_{i=0}^{\infty} S_{\mathbb{N}}^i \pi_{\tilde{x}}(a_i).$$

działający w przestrzeni  $c_0(\mathbb{N})$ . Wtedy  $(b_{\tilde{x}})^* = \pi_{\tilde{x}}(b)$  i w szczególności operator  $b_{\tilde{x}}$  jest nieodwracalny. Skoro  $(b_{\tilde{x}})^*$  ma trywialne jądro, to  $b_{\tilde{x}}$  nie jest ograniczony z dołu. Zatem istnieje ciąg  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  elementów z  $c_0(\mathbb{N})$  takich, że  $\|f_n\| = 1$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{\tilde{x}}f_n = 0$ . Z pomocą tego ciągu można skonstruować wektory  $\{f_{U_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L_{\mu}^{\infty}(\Omega)$  takie, że  $\|f_{U_n}\| = 1$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b^*)f_{U_n} = 0$ . Rzeczywiście, założmy, że  $\|b_{\tilde{x}}f_n\| \leq \frac{1}{n}$ ,  $f_n = \sum_{k=0}^{N(n)} \lambda_k^{(n)} e_k$  i ustalmy dowolny  $\varepsilon > 0$ . Wtedy, skoro  $b_{\tilde{x}}f_n = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{N(n)} \lambda_k^{(n)} a_{j-k}(\alpha^k(x_0)) \right) e_j$ , to istnieje ciąg niepustych otwartych zbiorów  $U_n \subset \Delta_{M(n)} \setminus \Delta_{-1}$ , gdzie  $M(n) := N(n) + J$ , dla których

$$\max_{x \in U_n} \left| \sum_{0 \leq k \leq N(n)} \lambda_k^{(n)} a_{j-k}(\alpha^k(x)) \right| < \varepsilon + \frac{1}{n}, \quad j = 0, 1, \dots, M(n); \quad n \in \mathbb{N},$$

oraz zbiór  $\omega_n := \varphi^{-1}(U_n) \cap \Omega_0$  ma miarę skończoną. Kładąc  $f_{U_n} = \sum_{k=0}^{N(n)} \lambda_k^{(n)} \chi_{\gamma^k(\omega_n)} \in L_{\mu}^{\infty}(\Omega)$  mamy  $\|f_{U_n}\| = 1$  oraz

$$\begin{aligned} \|b^*f_{U_n}\| &= \left\| \sum_{j=0}^{M(n)} \left( \sum_{0 \leq k \leq N(n)} \lambda_k^{(n)} (a_{j-k} \circ \varphi \circ \gamma^{k-j}) \right) \chi_{\gamma^j(\omega_n)} \right\| \\ &= \max_{j=0, \dots, M(n)} \operatorname{essup}_{\omega_n} \left| \sum_{0 \leq k \leq N(n)} \lambda_k^{(n)} (a_{j-k} \circ \alpha^k \circ \varphi) \right| < \varepsilon + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Stąd operator  $b^*$ , a więc i  $b$ , nie jest odwracalny.

Niech teraz  $p = \infty$ . Wtedy dla operatora  $b_x : c_0(\mathbb{N}) \rightarrow c_0(\mathbb{N})$ , gdzie  $b_x = \pi_x(b)|_{c_0(\mathbb{N})}$  mamy  $(b_x)^{**} = \pi_x(b)$ , skąd  $b_x$  jest nieodwracalny. Jeśli  $b_x$  jest nieograniczony z dołu, to analogicznie jak powyżej konstruujemy ciąg  $\{f_{U_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L_\mu^\infty(\Omega)$  taki, że  $\|f_{U_n}\| = 1$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} b f_{U_n} = 0$ . W przeciwnym razie operator  $(b_x)^*$  ma nietrywialne jądro, a wtedy można skonstruować ciąg  $f_{U_n} \in L_\mu^1(\Omega)$  takich, że  $\|f_{U_n}\| = 1$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} b' f_{U_n} = 0$ , gdzie

$$b' := \sum_{i=1}^{\infty} T_1^i a_{-i} + \sum_{i=0}^{\infty} S_1^i a_i \in L(L_\mu^1(\Omega)).$$

Zatem operator  $b'$  jest nieodwracalny, a stąd, że  $(b')^* = b$ , operator  $b$  również jest nieodwracalny odwracalny.

Jeśli  $X$  nie posiada punktów izolowanych, to we wszystkich rozważanych przypadkach zbiory  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  możemy wybrać tak, aby były one parami rozłączne. Wtedy wszystkie rozpatrywane ciągi  $\{f_{U_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  spełniają relację (8.3) i w konsekwencji wszystkie rozważane powyżej operatory w przestrzeniach  $L_\mu^p(\Omega)$ ,  $p \in [1, \infty]$ , nie są operatorami Fredholma.

3) Niech punkt  $\tilde{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in X_\infty$  posiada ujemnie nieskończoną orbitę kończącą się na  $x_0 \in \Delta_{-\infty} \setminus \Delta_1$ , por. paragraf 7.4.

Analogicznie jak w 2) rozważmy najpierw przypadek, gdy  $1 < p < \infty$  i (przechodząc ewentualnie do operatorów sprzężonych) założmy, że istnieje ciąg  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  wektorów z  $\ell^p(\mathbb{N})$  takich, że  $\|f_n\| = 1$ ,  $\|\pi_x(b)f_n\|^p \leq \frac{1}{n}$  oraz  $f_n = \sum_{k=0}^{N(n)} \lambda_k^{(n)} e_k$  dla pewnego  $N(n) \in \mathbb{N}$ . Oznaczmy  $M(n) := N(n) + J$ ,  $n \in \mathbb{N}$  i dla każdego otwartego, niepustego podzbioru

$$U_n \subset \Delta_{M(n)} \setminus \Delta_{M(n)+1}$$

takiego, że zbiór  $\omega_n := \varphi^{-1}(U_n) \cap \Omega_0$  ma miarę skończoną, połóżmy

$$f_{U_n} = \sum_{k=0}^{N(n)} \lambda_k^{(n)} \frac{S_p^{M(n)-k}(\chi_{\omega_n})}{\mu(\omega_n)^{\frac{1}{p}}} \in L_\mu^p(\Omega).$$

Zbiory  $\gamma^k(\omega_n)$ ,  $k = 0, \dots, M(n)$ , są niepuste i parami rozłączne, gdyż  $\omega_n \subset D_n \setminus D_{n+1}$ , gdzie  $D_n$  jest dziedziną  $\gamma^n$ . Stąd  $\|f_{U_n}\| = \|f_n\| = 1$ .

Ustalmy teraz dowolny  $\varepsilon > 0$ . Zbiór  $U_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , można wybrać tak, aby wartość

$$\max_{x \in U_n} \left| \left| \sum_{0 \leq k \leq N(n)} \lambda_k^{(n)} a_{j-k} (\alpha^{M(n)-j}(x)) \right|^p - \left| \sum_{0 \leq k \leq N(n)} \lambda_k^{(n)} a_{j-k} (\alpha^{M(n)-j}(x_{M(n)})) \right|^p \right|$$

była mniejsza niż  $\frac{\varepsilon}{M(n)}$  dla każdego  $j = 0, 1, \dots, M(n)$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \|b f_{U_n}\|^p &= \left\| \sum_{j=0}^{M(n)} \left( \sum_{0 \leq k \leq N(n)} \lambda_k^{(n)} a_{j-k} \right) \frac{S_p^{M(n)-j}(\chi_{\omega_n})}{\mu(\omega_n)^{\frac{1}{p}}} \right\|^p \\ &= \frac{1}{\nu(U_n)} \sum_{j=0}^{M(n)} \int_{U_n} \left| \sum_{0 \leq k \leq N(n)} \lambda_k^{(n)} a_{j-k} (\alpha^{M(n)-j}(x)) \right|^p d\nu(x) \\ &< \varepsilon + \sum_{j=0}^{M(n)} \left| \sum_{0 \leq k \leq N(n)} \lambda_k^{(n)} a_{j-k} (\alpha^{M(n)-j}(x_{M(n)})) \right|^p \end{aligned}$$

$$= \varepsilon + \left\| \left( \sum_{i=1}^{\infty} \pi_{\tilde{x}}(a_{-i}) T_{\mathbb{N}}^i + \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{\tilde{x}}(a_i) S_{\mathbb{N}}^i \right) f_n \right\|^p = \varepsilon + \|\pi_{\tilde{x}}(b)f_n\|^p \leq \frac{1}{n} + \varepsilon.$$

Z dowolności  $\varepsilon$  i  $n$  operator  $b$  nie jest ograniczony z dołu.

W przypadku, gdy  $p = 1, \infty$ , operator  $b$  nie jest odwracalny, co można pokazać rozumując analogicznie jak w punkcie 2). Podobnie uzasadnia się również fakt, że jeśli  $X$  nie posiada punktów izolowanych, to  $b$  nie jest operatorem Fredholma.

4) Niech punkt  $\tilde{x}$  posiada obustronnie nieskończoną orbitę:  $\tilde{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in X_{\infty}$ , gdzie  $x_0 \in \Delta_{\infty}$ , por. paragraf 7.5.

Tak jak w punktach 2) i 3) rozpatrzmy przypadek, gdy  $1 < p < \infty$  i załóżmy, że istnieje ciąg  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  wektorów z  $\ell^p(\mathbb{N})$  takich, że  $\|f_n\| = 1$ ,  $\|\pi_{\tilde{x}}(b)f_n\|^p \leq \frac{1}{n}$  oraz  $f_n = \sum_{k=-N(n)}^{N(n)} \lambda_k^{(n)} e_k$  dla pewnego  $N(n) \in \mathbb{N}$ . Oznaczmy  $M(n) := N(n) + J$ .

Korzystając z topologicznej wolności układu  $(X, \alpha)$ , na mocy Lematu 6.2 dla każdego otoczenia otwartego  $V \subset \Delta_{M(n)}$  punktu  $x_{M(n)}$  (będącego  $M(n)$ -tą współrzędną ciągu  $\tilde{x} = (x_0, x_1, \dots, \dots)$ ) istnieje liczba  $0 \leq m(n) < 2M(n)$  oraz otwarty i niepusty podzbiór  $U_n \subset \Delta_{2M(n)+m(n)}$  taki, że  $\alpha^{m(n)}(U_n) \subset V$  oraz  $U_n \cap \alpha^j(U_n) = \emptyset$ ,  $j = 1, \dots, 2M(n) + m(n)$ . Wtedy kładąc  $\omega_n := \varphi^{-1}(U_n) \cap \Omega_0$ , różnowartościowość  $\gamma$  oraz wybór  $U_n$  implikują, iż zbiory  $\gamma^j(\omega_n)$ ,  $j = 0, 1, \dots, 2M(n) + m(n)$  są parami rozłączne. Stąd dla wektora

$$f_{U_n} := \sum_{k=-N(n)}^{N(n)} \lambda_k^{(n)} \frac{S_p^{M(n)+m(n)-k}(\chi_{\omega_n})}{\mu(\omega_n)^{\frac{1}{p}}} \in L_v^p(X)$$

otrzymujemy  $\|f_{U_n}\| = \|f_n\| = 1$ . Ponadto dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  zbiór  $U_n$  (a właściwie zbiór  $V$ ) możemy wybrać tak, aby wartość

$$\max_{x \in U_n} \left| \left| \sum_{|k| \leq N(n)} \lambda_k^{(n)} a_{j-k}(\alpha^{M(n)+m(n)-j}(x)) \right|^p - \left| \sum_{|k| \leq N(n)} \lambda_k^{(n)} a_{j-k}(\alpha^{M(n)-j}(x_{M(n)})) \right|^p \right|$$

była mniejsza niż  $\frac{\varepsilon}{M(n)}$  dla każdego  $j = 0, \pm 1, \dots, \pm M(n)$ . Wtedy podobnie jak w przypadku 3) otrzymujemy

$$\|bf_{U_n}\|^p < \varepsilon + \|\pi_{\tilde{x}}(b)f_n\|^p \leq \frac{1}{n} + \varepsilon,$$

skąd wnioskujemy, że  $b$  nie jest operatorem odwracalnym. Jeśli  $X$  nie posiada punktów izolowanych, to zbiory  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  możemy wybrać tak, aby były one parami rozłączne. Wtedy ciągi  $\{f_{U_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  spełniają relację (8.3) i operator  $b$  nie jest operatorem Fredholma.

Sytuację, gdy  $p = 1, \infty$  rozpatruje się analogicznie jak w przypadku 2). ■

## Uwagi do rozdziału 8

Dowód Twierdzenia 8.2 jest modyfikacją dowodu analogicznego twierdzenia z pracy [Leb83] przytoczonego tu jako Twierdzenie 8.1.

Główna idea dowodu Twierdzenia 8.7 pochodzi z pracy [Leb83], gdzie wykazano analogiczne twierdzenie w przypadku, gdy operator  $T_p$  jest *odwracalną izometrią*, a algebra  $\mathcal{A}$  jest algebrą wszystkich operatorów mnożenia na przestrzeni  $L_\mu^p(\Omega)$ . Trzeba tu jednak podkreślić, że opracowanie dowodu Twierdzenia 8.7 wymagało istotnie innych metod, niż w wymienionej wyżej pracy [Leb83]. Mianowicie, w [Leb83] (podobnie jak i w obecnej rozprawie) jednym z zasadniczych jest założenie o metryzowalności przestrzeni ideałów maksymalnych algebry  $\mathcal{A}$ , które jeśli  $\mathcal{A} \cong L_\mu^\infty(\Omega)$  implikuje, iż miara  $\mu$  jest skończona, co z kolei wyklucza wszystkie rozpatrywane przez nas przykłady. Właśnie to *założenie o metryzowalności* (pojawiające się w kontekście tranzytywności topologicznych układów dynamicznych, patrz Wniosek 7.15) spowodowało potrzebę wprowadzenia w Definicji 3.1 pewnych warunków, które umożliwiły przeprowadzenie dowodu Twierdzenia 8.7 w przypadku, gdy  $\mathcal{A} \subset L_\mu^\infty(\Omega)$  oraz  $\mathcal{A} \neq L_\mu^\infty(\Omega)$ .

## Rozdział 9

# Widmo konkretnych ważonych operatorów przesunięcia w przestrzeniach $L^p$

W tym rozdziale zakończymy ostatni etap naszych badań. Korzystając z Twierdzenia 8.7 przeniesiemy opis widma otrzymany w przypadku operatorów w przestrzeni Hilberta (rozdział 6), na przypadek konkretnych ważonych operatorów przesunięcia  $aT_p$  w przestrzeniach  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Ponadto, podamy warunki implikujące spójność widma operatorów  $aT_p$ , a dla operatora  $T_p$  omówionego w podrozdziale 3.2 przedstawimy konstrukcję wagi  $a$  takiej, by widmo  $\sigma(aT_p)$  było dowolnym, z góry zadany zwanym zbiorem o symetrii kołowej.

### 9.1 Sprowadzenie do widma operatorów na przestrzeni Hilberta $L^2$ .

Niech  $aT_p$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , będzie konkretnym ważonym operatorem przesunięcia na przestrzeni  $L^p_\mu(\Omega)$  i  $S_p$  jest częściową izometrią sprzężoną z  $T_p$ , patrz podrozdział 3.1. Wtedy algebry

$$\mathcal{A}_+ = S_p T_p \mathcal{A} + (1 - S_p T_p) \mathcal{A},$$

$$\mathcal{B} = \overline{\text{span}} \left\{ \bigcup_{n=0}^{\infty} S_p^n \mathcal{A} T_p^n \right\}$$

składają się z operatorów mnożenia i nie zależą od  $p \in [1, \infty]$  (jeśli traktować je np. jako podalgebry  $L^\infty_\mu(\Omega)$ ), por. Stwierdzenie 3.5. Przez  $(X_+, \alpha_+)$  oraz  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  oznaczamy częściowe układy dynamiczne, które operator  $T_p$  generuje odpowiednio na widmie algebry  $\mathcal{A}_+$  oraz na widmie algebry  $\mathcal{B}$ . Jako wniosek z Twierdzenia 8.7 otrzymujemy

**Twierdzenie 9.1.** *Jeśli przestrzeń  $X$  jest metryzowalna i układ  $(X_+, \alpha_+)$  jest topologicznie wolny. Wtedy dla każdego  $b \in \mathcal{B}$  mamy*

$$\sigma(bT_p) = \sigma(bT_2), \quad \text{dla każdego } p \in [1, \infty].$$

Jeśli dodatkowo  $X_+$  nie posiada punktów izolowanych, to

$$\sigma(bT_p) = \sigma_{ess}(bT_p).$$

**Dowód.** Operatory postaci  $\lambda 1 - bT_p$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , należą do algebry  $B_p$ , patrz strona 142. Z Twierdzenia 8.7 ich odwracalność nie zależy od  $p$ , a w przypadku, gdy  $X_+$  nie posiada punktów izolowanych, odwracalność równoważna jest warunkom Fredholma. ■

Stosując powyższe twierdzenie możemy przenieść na grunt konkretnych operatorów przesunięcia z wagą wszystkie rezultaty z Podrozdziału 6.3. W szczególności mamy

**Twierdzenie 9.2 (Opis widma  $\sigma(bT_p)$ ,  $b \in \mathcal{B}$ ).** *Jeśli przestrzeń  $X$  jest metryzowalna i układ  $(X_+, \alpha_+)$  jest topologicznie wolny (co zawsze ma miejsce jeśli układ  $(X, \alpha)$  jest topologicznie wolny), to dla każdego elementu  $b \in \mathcal{B} = \overline{\text{span}}\{\bigcup_{n=0}^{\infty} S_p^n \mathcal{A} T_p^n\}$  widmo*

$$\sigma(bT_p) = \bigcup_{i \in I} P_i,$$

nie zależy od  $p \in [1, \infty]$ , a każda jego spójna składowa jest pierścieniem  $P_i = \{\lambda \in \mathbb{C} : r_i^- \leq |\lambda| \leq r_i^+\}$ ,  $i \in I \setminus \{0\}$ , lub gdy operator  $bT_p$  jest nieodwracalny, dyskiem  $P_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r_0^+\}$ , których promienie dane są następującymi wzorami:

i) *Jeśli  $b$  jest postaci  $b = a_0 + S_p a_1 T_p + \dots + S_p^n a_n T_p^n$ ,  $a_k \in \mathcal{A}$ , to istnieje podział  $\{\omega_i\}_{i \in I}$  przestrzeni  $X$  na domknięte  $\alpha$ -niezmiennicze zbiory, taki, że dla  $i \in I$  mamy*

$$r_i^- = \min_{\mu \in \text{Erg}(\omega_i, \alpha)} \exp \int_{\omega_i} \ln \left| \sum_{k=0}^n \hat{a}_k(\alpha^{n-k}(x)) \right| d\mu,$$

$$r_i^+ = \max_{\mu \in \text{Erg}(\omega_i, \alpha)} \exp \int_{\omega_i} \ln \left| \sum_{k=0}^n \hat{a}_k(\alpha^{n-k}(x)) \right| d\mu.$$

W szczególności jeśli  $b = a \in \mathcal{A}$ , to

$$r_i^- = \min_{\mu \in \text{Erg}(\omega_i, \alpha)} \exp \int_{\omega_i} \ln |\hat{a}(x)| d\mu, \quad r_i^+ = \max_{\mu \in \text{Erg}(\omega_i, \alpha)} \exp \int_{\omega_i} \ln |\hat{a}(x)| d\mu.$$

ii) *Dla dowolnego  $b$  istnieje podział  $\{\tilde{\omega}_i\}_{i \in I}$  przestrzeni  $\tilde{X}$  na domknięte  $\tilde{\alpha}$ -niezmiennicze zbiory, taki, że dla  $i \in I$  mamy*

$$r_i^- = \min_{\mu \in \text{Erg}(\tilde{\omega}_i, \tilde{\alpha})} \exp \int_{\tilde{\omega}_i} \ln |\hat{b}(\tilde{x})|, \quad r_i^+ = \max_{\mu \in \text{Erg}(\tilde{\omega}_i, \tilde{\alpha})} \exp \int_{\tilde{\omega}_i} \ln |\hat{b}(\tilde{x})| d\mu.$$

Jeśli dodatkowo  $X_+$  nie posiada punktów izolowanych, to widmo  $\sigma(bT_p)$  pokrywa się z widmem istotnym  $\sigma_{ess}(bT_p)$ :

$$\sigma(bT_p) = \sigma_{ess}(bT_p).$$

**Dowód.** Wystarczy zastosować Twierdzenia 9.1, 6.11. ■

**Uwaga 9.3.** W powyższym twierdzeniu fakt, że widmo  $\sigma(bT_p)$  nie zależy od  $p \in [1, \infty]$  można tłumaczyć tym, że wraz ze zmianą  $p$  zmieniamy tu nie tylko przestrzeń, ale też i postać operatora  $T_p$ . Dla ważonych operatorów kompozycji (danych wzorem niezależnym od  $p$ ) postać widma na ogół zależy od przestrzeni, na której te operatory działają. Na przykład dla operatorów  $aT_p$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , z podrozdziału 3.2 mamy

$$(T_p f)(t) = \sqrt[p]{N} f(Nt), \quad f \in L^p(\mathbb{R})$$

i dla ustalonego  $a \in \mathcal{A}$  promień spektralny  $r := r(aT_p) = \text{const}$ , nie zależy od  $p$ . Natomiast oznaczając przez  $r_p(aT)$  promień spektralny operatora  $aT : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$ , gdzie  $T$  jest (nieunormowanym) operatorem kompozycji:

$$(Tf)(t) = f(Nt), \quad f \in L^p(\mathbb{R})$$

otrzymujemy, że  $r_p(aT) = r_p\left(a \frac{1}{\sqrt[p]{N}} \sqrt[p]{N} T\right) = \frac{1}{\sqrt[p]{N}} \cdot r(aT_p) = \frac{r}{\sqrt[p]{N}}$  zależy od  $p$ .

Na mocy Twierdzenia 9.2, korzystając z opisów zawartych w Przykładach 6.13 - 6.18, otrzymujemy automatycznie opis widma operatorów na przestrzeniach  $L^p$  związanych z następującymi układami dynamicznymi:

- przesunięcia Markowa  $(\Sigma_N, \sigma_N)$  - Przykład 6.13
- odwzorowania  $\alpha(z) = z^N$  na okręgu  $S^1$  - Przykład 6.14
- odwzorowania logistyczne  $\alpha_\lambda(x) = 4\lambda x(1-x)$  - Przykład 6.15
- zachowujące orientację homeomorfizmy okręgu  $S^1$  - Przykład 6.17
- przesunięcia na torusie  $\mathbb{T}^d$  - Przykład 6.18

Ponadto we wszystkich tych przykładach widmo pokrywa się z widmem istotnym. Widmo klasycznego operatora przesunięcia z wagą - Przykład 6.16, również nie zależy od przestrzeni  $\ell^p$ ,  $p \in [1, \infty]$ , na której on działa. By uzasadnić ten ostatni fakt nie możemy jednak użyć Twierdzenia 9.2, gdyż przestrzeń  $\beta(\mathbb{N})$  nie jest metryzowalna. Znajduje tu natomiast zastosowanie Twierdzenie 8.2.

## 9.2 Ważone operatory przesunięcia o dowolnie zadanym typowym widmie.

Jasne jest, że widmo (abstrakcyjnego) operatora przesunięcia z wagą może być w ogólności dowolnym zwartym podzbiorem płaszczyzny zespolonej, por. Przykład 5.7. W świetle Twierdzeń 6.11, 9.2 należałoby jednak uznać, że typowym widmem jest zbiór, którego każda spójna składowa jest pierścieniem, ewentualnie kołem, o środku w zerze. By pogląd ten był w pełni uzasadniony, w obecnym paragrafie, przedstawimy konstrukcję operatora spełniającego założenia Twierdzenia 6.11, którego widmem jest dowolny, przez to twierdzenie dopuszczalny, z góry zadany zbiór. Do tego celu operatora przesunięcia pełniącego ważną rolę w niniejszej pracy, pojawiającego się w Przykładach 0.3, 4.11, 6.14 oraz w podrozdziale 3.2.

Zanim jednak przejdziemy do zapowiedzianej konstrukcji omówimy pokrótce, wykluczające nasze przedsięwzięcie, warunki implikujące spójność widma. Przypomnijmy, że we wszystkich omówionych do tej pory przykładach (patrz uwagi na końcu poprzedniego paragrafu oraz Przykłady 6.13 - 6.18) widmo operatorów ważonego przesunięcia jest spójne. Spójność widma w tych przykładach wynika z nierozkładalności topologicznych układów dynamicznych  $(X, \alpha)$  generowanych przez rozważane operatory na algebrach wag, patrz Twierdzenie 6.12. W przypadku konkretnych ważonych operatorów przesunięcia spójność widma może być całkowicie zdeterminowana przez operator przesunięcia – niezależna od wyboru algebry wag. Takie zjawisko wynika z nierozkładalności metrycznego układu dynamicznego  $(\Omega, \mu, \gamma)$ .

**Definicja 9.4.** Niech  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  będzie przestrzenią z miarą i niech  $\gamma : D \rightarrow \Omega$ ,  $D \in \Sigma$ , będzie odwzorowaniem mierzalnym. Powiemy, że przestrzeń  $\Omega$  jest  $\mu$ -nierozkładalna ze względu na  $\gamma$ , gdy dla każdego  $\gamma$ -niezmienniczego zbioru  $\omega \in \Sigma$ , czyli takiego, że

$$\gamma^{-1}(\omega) = \omega \cap D$$

mamy  $\mu(\omega) = 0$  lub  $\mu(\Omega \setminus \omega) = 0$ .

**Twierdzenie 9.5.** Rozważmy na przestrzeni  $L^p_\mu(\Omega)$  operator postaci

$$(T_p f)(t) = \begin{cases} \left| \frac{d\mu \circ \gamma}{d\mu} \right|^{\frac{1}{p}} f(\gamma(t)), & t \in D \\ 0, & t \notin D \end{cases}.$$

Jeśli przestrzeń  $\Omega$  jest  $\mu$ -nierozkładalna ze względu na  $\gamma$ , to dla każdego konkretnego ważonego operatora przesunięcia  $aT_p$  zbiór  $|\sigma(aT_p)|$  jest spójny.

**Dowód.** Załóżmy, że  $aT_p$  jest konkretnym ważonym operatorem przesunięcia z wagą związanym z układem  $(X, \alpha)$  oraz że zbiór  $|\sigma(aT)|$  jest niespójny. Wtedy na mocy Twierdzenia 5.8 istnieje nietrywialny  $\alpha$ -niezmienniczy domknięto-otwarty podzbiór  $U \subset \Delta_\infty$ . Kładąc

$$\omega := \varphi^{-1}(U),$$

otrzymujemy  $\mu(\omega) > 0$  i  $\mu(\Omega \setminus \omega) > 0$ , patrz Definicja 3.1. Z przemienności diagramu (3.1) mamy  $\omega \subset D$  oraz

$$\gamma^{-1}(\omega) = \gamma^{-1}(\varphi^{-1}(U)) = \varphi^{-1}(\alpha^{-1}(U)) = \varphi^{-1}(U) = \omega.$$

Zatem  $\omega$  jest zbiorem  $\gamma$ -niezmienniczym, co jest sprzeczne z założeniem o nierozkładalności. ■

**Przykład 9.6.** Prosta  $\mathbb{R}$  jest rozkładalna ze względu na podniesienie  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dowolnego homeomorfizmu  $\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ . Jeśli  $\mathbf{T}_p \in L(L^p(\mathbb{R}))$  jest unormowanym operatorem złożenia z  $\gamma$ , patrz paragraf 3.5.1, to nie trudno jest skonstruować operator mnożenia  $a$  na  $L^p(\mathbb{R})$  taki, że zbiór  $|\sigma(a\mathbf{T}_p)|$  jest zbiorem niespójnym. Natomiast jeśli  $\gamma(0) > 0$ , to kompresja  $T_p$  operatora  $\mathbf{T}_p$  do podprzestrzeni  $L^p(\mathbb{R}_+)$  jest operatorem złożenia z odwzorowaniem  $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  względem, którego półprosta  $\mathbb{R}_+$  jest już nierozkładalna. Zatem w tym przypadku, dla dowolnego konkretnego ważonego operatora przesunięcia postaci  $aT_p$  zbiór  $|\sigma(aT_p)|$  jest spójny.



W świetle Twierdzenia 9.5, dla operatorów przesunięcia z Przykładów 4.13 - 4.15, 6.16 - 6.18 nie można wybrać algebry wag tak, aby były spełnione założenia Twierdzenia 9.2 i widmo ważonego operatora przesunięcia było nie spójne. Można to jednak uczynić dla operatorów występujących w Przykładach 4.10 - 4.12, 6.13 - 6.15. Wybieramy tu operator z Przykładów 0.3, 4.11, 6.14.

Niech  $E = L^p(\mathbb{R}_+)$ ,  $p \in [1, \infty]$ , i niech  $T \in L(E)$  będzie unormowanym operatorem złożenia z funkcją  $\gamma(t) = Nt$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . Wtedy  $T_p$  jest odwracalną izometrią i dla  $f \in E$  mamy

$$(T_p f)(t) = \sqrt[p]{N} f(Nt), \quad (T_p^{-1})(t) = \frac{1}{\sqrt[p]{N}} f\left(\frac{t}{N}\right).$$

Niech  $W \subset \mathbb{C}$  będzie dowolnym zwartym zbiorem o symetrii kołowej, tj. niech

$$W = \bigcup_{i \in I} P_i,$$

gdzie zbiory  $P_i = \{\lambda \in \mathbb{C} : r_i^- \leq |\lambda| \leq r_i^+\}$ ,  $0 \leq r_i^- \leq r_i^+$ ,  $i \in I$ , są rozłączne. Skonstruujemy teraz operator mnożenia  $a$  taki, aby  $aT_p$  był konkretnym ważonym operatorem przesunięcia spełniającym założenia Twierdzeniu 9.2 takim, że  $\sigma(aT_p) = \sigma_{ess}(aT_p) = W$ . Konstrukcja przebiegać będzie w trzech krokach.

**I.** Zauważmy, że zbiór

$$|W| = \bigcup_{i \in I} |P_i| = \bigcup_{i \in I} \{x \in [0, +\infty) : r_i^- \leq x \leq r_i^+\}$$

jest zwarty, por. Rysunek 9.1 (a). Podzielmy zbiór indeksów  $I$  na dwie części odpowiadające spójnym składowym zbioru  $|W|$  będących odpowiednio odcinkami oraz punktami

$$I_o := \{i \in I : r_i^- < r_i^+\}, \quad I_p := \{i \in I : r_i^- = r_i^+\}.$$

Zwartość  $W$  implikuje, iż zbiór  $I_o$  jest przeliczalny, natomiast z  $I_p$  możemy wybrać przeliczalny podzbiór  $I'_p$  taki, że zbiór

$$W' = \bigcup_{i \in I'} P_i, \quad \text{gdzie } I' := I_o \cup I'_p,$$

jest zbiorem gęstym w  $W$ . W szczególności zbiór  $|W'| = \bigcup_{i \in I'} |P_i|$  posiada przeliczalną ilość spójnych składowych.

**II.** Zdefiniujmy  $X$  jako następującą podprzestrzeń

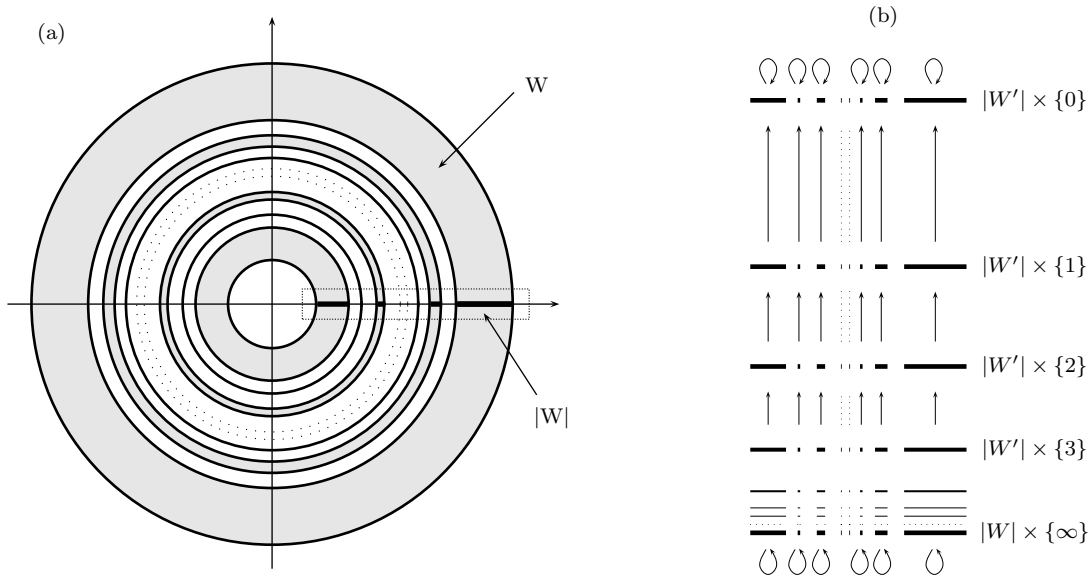
$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} |W'| \times \{n\} \cup |W| \times \{\infty\}$$

przestrzeni produktowej  $|W| \times \bar{\mathbb{N}}$ . Zbiór  $X$  jest domknięty, a więc zwarty. Odwzorowanie  $\alpha : X \rightarrow X$  określimy wzorami

$$\alpha(x, n) = (x, n-1), \quad n > 0, \quad \alpha(x, 0) = (x, 0), \quad \alpha(x, \infty) = (x, \infty)$$

Układ  $(X, \alpha)$ , patrz Rysunek 9.1 (b), jest topologicznie wolny.

**III.** Aby zdefiniować odwzorowanie  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  ustalmy dowolnie wybrany podział  $\{[a_i, b_i)\}_{i \in I'}$ ,  $a_i < b_i$ ,  $i \in I'$ , odcinka  $[1, 2)$ . Niech  $\phi : [1, 2) \rightarrow |W|$  przekształca



Rysunek 9.1: Konstrukcja układu dynamicznego związanego z ważonym operator przesunięcia o z góry zadanym widmie.

liniowo i zgodnie z orientacją odcinek  $[a_i, b_i)$  na odcinek  $|P_i|$  bez prawego punktu końcowego. Połóżmy

$$\varphi(t) = \begin{cases} \phi(\gamma^n(t)) \times \{n\} & t \in \gamma^{-n}([a_i, b_i)) \\ \phi(\gamma^{-n}(t)) \times \{0\} & t \in \gamma^n([a_i, b_i)) \end{cases}, \quad \text{gdzie } n \in \mathbb{N}.$$

Nietrudno spostrzec, że odwzorowanie  $\varphi$  jest poprawnie określone, a co więcej na zbiorze

$$\Omega_0 = (0, 2)$$

jest ono różnowartościowe i zbiór  $\varphi(\Omega_0)$  jest gęsty w  $X$ .

**Stwierdzenie 9.7.** *Przy powyższych oznaczeniach, niech  $a \in C(X)$  będzie rzutem na pierwszą współrzędną:*

$$a(x, n) = x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Operator dany wzorem

$$(aT_p)(f)(t) = a(\varphi(t)) \sqrt[N]{f(Nt)}, \quad f \in L^p(\mathbb{R}_+),$$

jest konkretnym ważonym operatorem przesunięcia związanym z układem  $(X, \alpha)$ , którego widmo pokrywa się z zadanym zbiorem  $W$ :

$$\sigma(aT_p) = \sigma_{ess}(aT_p) = W.$$

**Dowód.** Dla powyżej zdefiniowanych obiektów, warunki 1), 2), 3) Definicji 3.1 są spełnione. Układ  $(X, \alpha)$  jest topologicznie wolny i przestrzeń  $X$  jest metryzowalna. Na mocy Twierdzenia 9.2 oraz definicji wagi  $a$  otrzymujemy, że

$$\sigma(aT_p) = \bigcup_{j \in J} \{ \lambda \in \mathbb{C} : \min_{x \in \omega_j} |a(x)| \leq |\lambda| \leq \max_{x \in \omega_j} |a(x)| \},$$

gdzie  $\{\omega_j\}_{j \in J}$  jest podziałem przestrzeni  $X$  na domknięte  $\alpha$ -niezmiennicze zbiory. Z określenia funkcji  $a \in C(X)$  wynika również, że dla każdego  $j \in J$  istnieją indeksy  $i_1(j), i_2(j) \in I$  takie, że

$$r_{i_1(j)}^- = \min_{x \in \omega_j} |a(x)|, \quad r_{i_2(j)}^+ = \max_{x \in \omega_j} |a(x)|.$$

W szczególności  $W \subset \sigma(aT_p)$ ;  $0 \in W$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $0 \in \sigma(aT_p)$ , patrz Stwierdzenie 5.5. Aby otrzymać równość  $W = \sigma(aT_p)$  wystarczy pokazać, że jeżeli indeksy  $i, i' \in I$  są takie, że

$$Z = \{\lambda \in \mathbb{C} : r_i^+ < |\lambda| < r_{i'}^-\} \subset \mathbb{C} \setminus W,$$

to  $Z \subset \mathbb{C} \setminus \sigma(aT_p)$ . By to wykazać zauważmy, że

$$X_1 = \{|P_i| \times \{n\} \in X : |P_i| \subset [0, r_i^+]\}, \quad X_2 = \{|P_i| \times \{n\} \in X : |P_i| \subset [r_{i'}^-, \infty)\}$$

są rozłącznymi domknięto-otwartymi  $\alpha$ -niezmienniczymi podzbiórami  $X$  oraz  $X = X_1 \cup X_2$ . Stąd operatory mnożenia przez funkcje

$$\chi_{X_1} \circ \varphi, \quad \chi_{X_2} \circ \varphi$$

są wzajemnie dopełniającymi się rzutami komutującymi z operatorem  $aT_p$ . Czyli przestrzeń  $E = L^p(\mathbb{R}_+)$  możemy rozłożyć na sumę prostą podprzestrzeni spektralnych

$$E = E_1 \oplus E_2, \quad \sigma(aT_p) = \sigma(aT_p|_{E_1}) \cup \sigma(aT_p|_{E_2})$$

Restrykcja operatora  $aT_p$  do podprzestrzeni  $E_i$ ,  $i = 1, 2$ , jest konkretnym ważonym operatorem przesunięcia związanym z układem  $(X_i, \alpha)$ . Stosując Twierdzenie 9.2 do operatorów  $aT_p : E_i \rightarrow E_i$ ,  $i = 1, 2$ , otrzymujemy, że

$$|\sigma(aT_p|_{E_1})| \subset [0, r_i^+], \quad |\sigma(aT_p|_{E_2})| \subset [r_{i'}^-, \infty),$$

skąd  $Z \subset \mathbb{C} \setminus \sigma(aT_p)$ . Zatem  $\sigma(aT_p) = W$ .

By otrzymać równość  $\sigma(aT_p) = \sigma_{ess}(aT_p)$  wystarczy zastosować Twierdzenie 9.2 do operatora  $aT_p$  traktując wagę  $a$ , jako element większej algebry, której widmo powstaje z  $X$  poprzez zastąpienie każdego izolowanego punktu pewnym odcinkiem. ■

## Uwagi do rozdziału 9

Sprowadzenie zagadnienia wyznaczenia widma ważonych, *odwracalnych* operatorów kompozycji w przestrzeniach  $L^p$  do widma takich operatorów w przestrzeni  $L^2$ , było głównym celem pracy [Leb83], por. uwagi do rozdziału 8. W tym rozdziale zakończyliśmy nasze badania, dowodząc twierdzenia analogicznego typu, dla operatorów generujących (na ogół) układy *nieodwracalne*. Tym samym otrzymaliśmy pełny opis widma konkretnych ważonych operatorów przesunięcia w przestrzeniach  $L^p$  (Twierdzenie 9.2).

Wielu autorów, w różnych sytuacjach zwracało uwagę na spójność widma ważonych operatorów kompozycji [Par65], [Kit79]. Zjawisko to w obecnej rozprawie tłumaczy Twierdzenia 6.12 i 9.5. Jednym z ważniejszych przykładów operatorów związanych z topologicznie wolnymi układami dynamicznymi i posiadającymi widmo nie-spójne jest konstrukcja V. B. Ryvkina [AL94, Prz. 7.6], która dotyczyła ważonych operatorów kompozycji z *tranzytywnymi homeomorfizmami* okręgu, działającymi w przestrzeniach  $L^p(S^1)$ . Przedstawioną tu konstrukcję operatorów na  $L^p(\mathbb{R}_+)$ , znajdującą swój finał w Stwierdzeniu 9.7, można traktować jako odpowiednik przykładu Ryvkina w przypadku operatorów typowych dla niniejszej pracy, por. Przykład 9.6.

# Uzupełnienia: Algebra kowariancji

## $C^*(X, \alpha; Y)$

W tym miejscu wprowadzimy i opiszemy obiekty oraz rezultaty pochodzące z różnych prac, którymi posługiwaliśmy się w obecnej rozprawie, a które dotyczą  $C^*$ -algebry  $C^*(X, \alpha; Y)$ . Motywacją takiego postępowania jest, po pierwsze wygoda czytelnika, a po drugie fakt, że przytoczone wyniki nie są po prostu cytatami ze źródeł, lecz ich modyfikacjami (najczęściej niewielkimi uogólnieniami) przystosowującymi je do potrzeb niniejszego tekstu.

## A Definicja i struktura $C^*(X, \alpha; Y)$

W 1936 roku J. F. Murray oraz J. Von Neumann [MN36] przedstawili konstrukcję algebr operatorowych, która z odwracalnym, metrycznym układem dynamicznym wiąże  $W^*$ -algebrę. Obecnie konstrukcja ta jest zwana produktem krzyżowym, a jej odpowiednik w teorii  $C^*$ -algebr wiąże z topologicznym, odwracalnym układem dynamicznym  $(X, \alpha)$   $C^*$ -algebrę generowaną przez kopię algebry  $C(X)$  oraz operator unitarny generujący na  $X$  homeomorfizm  $\alpha$ . W tym kontekście algebra  $C^*(X, \alpha; Y)$ , którą zdefiniujemy poniżej, jest uogólnieniem klasycznego produktu krzyżowego dla  $C^*$ -algebr na przypadek częściowego (niekoniecznie odwracalnego) układu dynamicznego  $(X, \alpha)$ . Wspomnijmy jeszcze, że algebra  $C^*(X, \alpha; Y)$  jest nieznacznym uogólnieniem obiektu skonstruowanego i zbadanego przez autora w pracy [Kwa05'].

Ustalmy częściowy układ dynamiczny  $(X, \alpha)$  i oznaczmy przez  $(\mathcal{A}, \delta)$  odpowiadający mu  $C^*$ -układ dynamiczny, to jest niech  $\mathcal{A} = C(X)$  będzie przemienną  $C^*$ -algebrą, a  $\delta$  jej endomorfizmem danym wzorem

$$\delta(a)(x) = \begin{cases} a(\alpha(x)), & x \in \Delta_1 \\ 0, & x \notin \Delta_1 \end{cases}, \quad a \in \mathcal{A} = C(X). \quad (\text{A.1})$$

Charakterystyczną cechą, zarówno klasycznego produktu krzyżowego, jak i jego uogólnień, jest uniwersalne zachowanie ze względu na reprezentacje kowariantne.

**Definicja A.1** (por. [Kwa05']). Niech  $H$  będzie przestrzenią Hilberta,  $T \in L(H)$  i niech  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow L(H)$  będzie niezdegenerowaną (przeprowadzającą  $1 \in \mathcal{A}$  na operator identycznościowy w  $L(H)$ ) reprezentacją  $C^*$ -algebry  $\mathcal{A}$ . Trójkę  $(\pi, T, H)$  spełniającą relacje

$$T\pi(a)T^* = \pi(\delta(a)), \quad a \in \mathcal{A}, \quad T^*T \in \pi(\mathcal{A})', \quad (\text{A.2})$$

będziemy nazywać *reprezentacją kowariantną* częściowego układu dynamicznego  $(X, \alpha)$ . Jeśli ponadto  $\pi$  jest reprezentacją wierną, to  $(\pi, T, H)$  będziemy nazywać *wierną reprezentacją kowariantną*.

Jeśli  $(\pi, T, H)$  jest wierną reprezentacją kowariantną układu  $(X, \alpha)$ , to  $C^*$ -algebra  $C^*(\pi(\mathcal{A}), T)$  generowana przez  $\pi(\mathcal{A})$  i  $T$ , nie jest wyznaczona jednoznacznie przez parę  $(X, \alpha)$ , gdyż (jak zauważyliśmy już w rozdziale 1) zależy ona od ideału

$$J = \{a \in \mathcal{A} : T^*T\pi(a) = \pi(a)\},$$

którego otoczką  $Y = \text{hull}(J)$  może być dowolnym domkniętym podzbiorem  $X$  zawierającym zbiór  $X \setminus \Delta_{-1}$ , por. Twierdzenie 1.34. Przy czym, jeśli reprezentacja  $\pi$  nie jest wierna, to zbiór  $Y$  nie musi nawet zawierać  $X \setminus \Delta_{-1}$ . Dlatego pośród reprezentacji kowariantnych wprowadzimy następujące, dodatkowe rozróżnienie.

**Definicja A.2** (por. [KL07']). Niech  $Y$  będzie domkniętym podzbiorem  $X$  (niekoniecznie zawierającym  $X \setminus \Delta_{-1}$ ). Powiemy, że *reprezentacja kowariantna*  $(\pi, T, H)$  układu  $(X, \alpha)$  jest *związana ze zbiorem*  $Y$ , jeśli

$$C_Y(X) = \{a \in C(X) : T^*T\pi(a) = \pi(a)\},$$

gdzie  $C_Y(X)$  jest zbiorem funkcji z  $C(X)$  znikających na zbiorze  $Y$ .

Z każdym ustalonym typem reprezentacji kowariantnej, gdzie  $Y$  zawiera  $X \setminus \Delta_{-1}$ , związemy  $C^*$ -algebrę  $C^*(X, \alpha; Y)$ . Autorowi znane są obecnie trzy różne, jawne konstrukcje takiej algebry, por. [Kwa05'], [KL07'], [KL07''], przy czym każda z nich jest dosyć skomplikowana i nie wnosi nic istotnego do niniejszej pracy. Dlatego, poniżej zdefiniujemy algebrę  $C^*(X, \alpha; Y)$  w sposób egzystencjalny, jako pewien obiekt uniwersalny.

**Twierdzenie A.3 (Algebra kowariancji).** Niech  $(X, \alpha)$  będzie częściowym układem dynamicznym i niech  $Y \supset X \setminus \Delta_{-1}$  będzie zbiorem domkniętym. Wtedy istnieje  $C^*$ -algebra  $C^*(\mathcal{A}, \mathbf{T})$  generowana przez kopię algebry  $\mathcal{A}$  oraz operator  $\mathbf{T}$  takie, że spełnione są relacje

$$\delta(a) = \mathbf{T}a\mathbf{T}^*, \quad a \in \mathcal{A}, \quad \mathbf{T}^*\mathbf{T} \in \mathcal{A}',$$

$$C_Y(X) = \{a \in \mathcal{A} : \mathbf{T}^*\mathbf{T}a = a\}$$

i każda reprezentacja kowariantna  $(\pi, T, H)$  układu  $(X, \alpha)$  związana ze zbiorem zawartym w  $Y$ , integruje się do epimorfizmu  $(\pi \times T) : C^*(\mathcal{A}, \mathbf{T}) \rightarrow C^*(\pi(\mathcal{A}), T)$  jednoznacznie wyznaczonego przez relacje

$$(\pi \times T)(a) = \pi(a), \quad a \in \mathcal{A}, \quad (\pi \times T)(\mathbf{T}) = T.$$

Ponadto  $C^*$ -algebra  $C^*(\mathcal{A}, \mathbf{T})$  jest przez wyżej wymienione własności wyznaczona jednoznacznie w następującym sensie: jeżeli  $C^*(\mathcal{A}, \mathbf{T}')$  spełnia podobne relacje (z  $\mathbf{T}'$  w miejsce  $\mathbf{T}$ ), to przyporządkowanie stałe na  $\mathcal{A}$  i takie, że  $\mathbf{T} \mapsto \mathbf{T}'$  przedłuża się do izomorfizmu  $C^*(\mathcal{A}, \mathbf{T}) \cong C^*(\mathcal{A}, \mathbf{T}')$

**Dowód.** Utożsamiając algebrę  $C^*(\mathcal{A}, \mathbf{T})$  z względną algebrą Cuntza-Pimsnera  $\mathcal{O}(J, E)$ , gdzie  $J = C_Y(X)$  i  $E$  jest bimodulem odpowiadającym  $C^*$ -układowi dynamicznemu  $(\mathcal{A}, \delta)$  opisanym w [KL07", Strona 8], patrz też [FMR03, Przykład 1.6], teza wynika z [KL07", Wn. 3.5] oraz [FMR03, Stw. 1.3]. ■

**Definicja A.4.** Algebrę (wyznaczoną z dokładnością do izomorfizmu) w Twierdzeniu A.3 będziemy oznaczać przez  $C^*(X, \alpha; Y)$  i nazywać (względną) *algebrą kowariancji* częściowego układu dynamicznego  $(X, \alpha)$  względem zbioru  $Y$ .

Przedstawimy teraz podstawowe fakty dotyczące struktury algebry  $C^*(X, \alpha; Y)$ . W świetle Twierdzenia 1.28,  $C^*$ -algebra  $C^*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{*n} \pi(\mathcal{A}) T^n)$  generowana przez zbiór  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{*n} \pi(\mathcal{A}) T^n$  nie zależy od wyboru wiernej reprezentacji kowariantnej  $(\pi, T, H)$  układu  $(X, \alpha)$  związanej ze zbiorem  $Y$ . W szczególności algebra ta jest izomorficzna z  $C^*$ -algebrą

$$\mathcal{B} = C^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{T}^{*n} \mathcal{A} \mathbf{T}^n\right) \subset C^*(X, \alpha; Y),$$

gdzie  $\mathbf{T}$  jest uniwersalnym elementem  $C^*(X, \alpha; Y)$ . Co więcej, jeśli  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  jest naturalnym rozszerzeniem  $(X, \alpha)$  związanym z  $Y$ , Definicja 1.32, to możemy przyjąć następujące utożsamienia

$$\mathcal{B} = C(\tilde{X}), \quad \mathcal{B} \mathbf{T}^{*n} \mathbf{T}^n = C(\tilde{\Delta}_{-n}), \quad \mathcal{B} \mathbf{T}^n \mathbf{T}^{*n} = C(\tilde{\Delta}_n),$$

gdzie  $\tilde{\Delta}_n$  jest dziedziną, a  $\tilde{\Delta}_{-n}$  przeciwdziedziną częściowego homeomorfizmu  $\tilde{\alpha}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . W terminologii [LO04]  $C^*$ -algebra  $\mathcal{B}$  nazywana jest *algebrą współczynników* algebry kowariancji  $C^*(X, \alpha; Y)$ , co usprawiedliwia następujące

**Twierdzenie A.5.** *Zbiór elementów postaci*

$$b = \sum_{n=1}^N a_{-n} \mathbf{T}^{*n} + a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \mathbf{T}^n, \quad (\text{A.3})$$

gdzie  $a_{\pm n} \in \mathcal{B} = C(\tilde{X})$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , tworzy gęstą  $*$ -podalgebrę  $C^*$ -algebry  $C^*(X, \alpha; Y)$ . Ponadto współczynniki  $a_{\pm n}$  w przedstawieniu (A.3) można wybrać tak, by

$$a_{-n} = a_{-n} \mathbf{T}^{*n} \mathbf{T}^n \in C(\tilde{\Delta}_{-n}) \quad \text{oraz} \quad a_n = a_n \mathbf{T}^n \mathbf{T}^{*n} \in C(\tilde{\Delta}_n), \quad (\text{A.4})$$

a wtedy są one przez  $b$  wyznaczone jednoznacznie i dla każdego  $n \in \mathbb{Z}$  wzór

$$\mathcal{N}_n(b) = a_n$$

zadaje liniową kontrakcję  $\mathcal{N}_n : C^*(X, \alpha; Y) \rightarrow C(\tilde{\Delta}_n)$ .

**Dowód.** Pierwsza część tezy wynika z [LO04, Stwierdzenie 2.3], natomiast druga z [LO04, Twierdzenie 2.7], por. [ABL05", 3.5]. Korzystając z równości  $C^*(X, \alpha; Y) = C^*(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  można również otrzymać tezę korzystając z [Exel94], patrz też [Kwa05']. ■

Z powyższego twierdzenia wynika, że każdemu elementowi  $b \in C^*(X, \alpha; Y)$  odpowiada ciąg  $\{\mathcal{N}_n(b)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  „współczynników” należących do algebry  $\mathcal{B}$  i jak pokazuje poniższe twierdzenie wyznaczają one element  $b$  jednoznacznie. Zatem operatory  $\{\mathcal{N}_n(b)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  można traktować jako uogólnienie współczynników Fourier’a, por. Przykład B.4.

**Twierdzenie A.6.** Dla  $b \in C^*(X, \alpha; Y)$  następujące warunki są równoważne

- i)  $b = 0$ ;
- ii)  $\mathcal{N}_n(b) = 0$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;
- iii)  $\mathcal{N}_0(b^*b) = 0$ .

**Dowód.** Wynika z [LO04, Tw. 2.15], patrz też [ABL05", Tw. 3.14]. ■

Struktura  $C^*(X, \alpha; Y)$  opisana w powyższych twierdzeniach w istocie zdeterminowana jest przez kanonicznie działające na  $C^*(X, \alpha; Y)$  grupy  $S^1$ .

**Twierdzenie A.7.** Na algebrze kowariancji  $C^*(X, \alpha; Y)$  istnieje działanie  $\gamma : S^1 \rightarrow \text{Aut}(C^*(X, \alpha; Y))$  grupy  $S^1$  jednoznacznie zadane przez relacje

$$\gamma_z(a) := a, \quad \gamma_z(\mathbf{T}) := z\mathbf{T}, \quad a \in \mathcal{A}, \quad z \in S^1.$$

Ponadto algebra  $\mathcal{B}$  jest zbiorem punktów stałych działania  $\gamma$  oraz dla  $b \in C^*(X, \alpha; Y)$  zachodzą wzory

$$\mathcal{N}_n(b) = E_n(b)\mathbf{T}^{*n}, \quad \mathcal{N}_{-n}(b) = E_{-n}(b)\mathbf{T}^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

gdzie

$$E_n(b) = \int_{S^1} z^{-n} \gamma_z(b) d\mu(z), \quad n \in \mathbb{Z},$$

a  $\mu$  jest unormowaną miarą Lebesgue'a na  $S^1$ .

**Dowód.** Traktując  $C^*(X, \alpha; Y) = C^*(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha}; \emptyset)$  jako częściowy produkt krzyżowy  $C(\widetilde{X})$  z częściowym automorfizmem indukowanym przez  $\widetilde{\alpha}$ , wystarczy zastosować [Exel94, Stw. 3.11]. ■

Działanie  $\gamma$  w kontekście abstrakcyjnych ważonych operatorów przesunięcia ma następujące znaczenie: Niech  $a \in \mathcal{B}$  i  $z \in S^1$ . Stąd, że  $\gamma_{\bar{z}}$  jest automorfizmem oraz

$$a\mathbf{T} - z1 = z(a\bar{z}\mathbf{T} - 1) = z\gamma_{\bar{z}}(a\mathbf{T} - 1)$$

widzimy, że element  $a\mathbf{T} - 1$  jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $z \in S^1$  odwracalny jest element  $a\mathbf{T} - z1$ .

**Wniosek A.8.** Dla każdego  $a \in \mathcal{B}$  widmo  $\sigma(a\mathbf{T})$  elementu  $a\mathbf{T}$  w algebrze  $C^*(X, \alpha; Y)$  jest niezmiennicze ze względu na obroty wokół zera.

## B Twierdzenie o Izomorfizmie

Znajomość warunków gwarantujących różnowartościowość epimorfizmu  $(\pi \times T)$  z Twierdzenia A.3 jest dla niniejszej pracy jedną z zasadniczych kwestii, por. Wniosek A.8. Twierdzenia prezentujące wewnętrzne warunki tego typu (niezależne od szczególnej postaci reprezentacji kowariantnej  $(\pi, T, H)$ ) nazywane są w literaturze Twierdzeniami o Izomorfizmie, por. [Ant96], [AL94], [LO04], [ABL05"], [Leb05], [KL07"], [Kwa05']. Dla  $C^*$ -algebry  $C^*(X, \alpha; Y)$  wymaganą rolę pełni pojęcie następujące, patrz [Kwa05', Def. 5.12] oraz podrozdział 6.1.



**Definicja B.1.** Częściowy układ dynamiczny  $(X, \alpha)$  nazywamy *topologicznie wolnym*, jeśli każdy niepusty i otwarty podzbiór  $U \subset F_n = \{x \in \Delta_n : \alpha^n(x) = x\}$ ,  $n > 0$ , przecina niepusto pewien cykl

$$\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\} \subset F_n, \quad \alpha(x_k) = x_{k+1 \pmod n}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

dla którego istnieje punkt  $y \in \Delta_1 \setminus F_n$  taki, że  $\alpha(y) \in \{x_0, x_1, \dots\}$ , por. Rysunek 6.1.

Jeśli układ  $(X, \alpha)$  jest topologicznie wolny, to układ  $(X_+, \alpha_+)$ , opisany w Stwierdzeniu 1.26, generowany przez operator  $\mathbf{T}$  na widmie  $C^*$ -algebry  $C^*(\mathcal{A}, \mathbf{T}^*\mathbf{T})$  również jest topologicznie wolny (patrz Stwierdzenie 6.3).

**Twierdzenie B.2 (Twierdzenie o Izomorfizmie).** *Jeśli układ  $(X_+, \alpha_+)$  jest topologicznie wolny, to dla każdej wiernej reprezentacji kowariantnej  $(\pi, T, H)$  układu  $(X, \alpha)$  związanej z  $Y$  epimorfizm  $(\pi \times T) : C^*(X, \alpha; Y) \rightarrow C^*(\pi(\mathcal{A}), T)$  jest izomorfizmem.*

**Dowód.** Na mocy Stwierdzenia 1.25 odwzorowanie  $\pi$  przedłuża się kanonicznie do izomorfizmu  $\tilde{\pi} : C^*(\mathcal{A}, \mathbf{T}^*\mathbf{T}) = C(X_+) \rightarrow C^*(\mathcal{A}, T^*T)$  w taki sposób, że trójka  $(\tilde{\pi}, T, H)$  jest reprezentacją kowariantną układu  $(X_+, \alpha_+)$  w sensie [Kwa05'], por. Definicja A.1. Stosując [Kwa05', Tw. 6.11] do reprezentacji  $(\tilde{\pi}, T, H)$  otrzymujemy tezę. ■

Często przydatna jest również następująca charakterystyka różnowartościowości epimorfizmu  $(\pi \times T)$  obejmująca dowolne (niekoniecznie topologicznie wolne) układy dynamiczne.

**Twierdzenie B.3.** *Niech  $(\pi, T, H)$  będzie kowariantną reprezentacją układu  $(X, \alpha)$  związana z  $Y$ . Epimorfizm  $(\pi \times T) : C^*(X, \alpha; Y) \rightarrow C^*(\pi(\mathcal{A}), T)$  jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest nierówność*

$$\|a_0\| \leq \|(\pi \times T)\left(\sum_{n=1}^N a_{-n} \mathbf{T}^{*n} + a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \mathbf{T}^n\right)\| \quad (\text{B.1})$$

dla każdego  $a_{\pm n} \in \mathcal{B} = C(\tilde{X})$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ .

**Dowód.** Zastosować którekolwiek z twierdzeń: [LO04, 2.13], [ABL05'', 3.6] lub [KL07', 5.4]. ■

Jako zastosowanie powyższego twierdzenia oraz aby ostatecznie wyjaśnić związek Twierdzeń A.5, A.6, A.7 z klasyczną analizą Fourierską, rozważmy prosty przykład.

**Przykład B.4.** Niech  $H = L^2_\mu(S^1)$ , gdzie  $\mu$  jest unormowaną miarą Lebesgue'a na  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Połóżmy

$$\mathcal{A} = \{\lambda 1 : \lambda \in \mathbb{C}\} \quad \text{oraz} \quad (Tf)(z) = zf(z), \quad f \in H.$$

Operator unitarny  $T$  generuje na widmie  $\mathcal{A}$  odwracalny układ dynamiczny  $(X, \alpha)$ , gdzie  $X = \{x_0\}$ ,  $\alpha(x_0) = x_0$ . W szczególności  $\mathcal{B} = \overline{\text{span}}\{\cup_{n \in \mathbb{N}} T^{*n} \mathcal{A} T^n\} = \mathcal{A} \cong \mathbb{C}$ . Algebra  $C^*(X, \alpha; \emptyset)$  jest klasycznym produktem krzyżowym i wiadomym jest, że  $C^*(X, \alpha; \emptyset) = C(S^1)$ , [Tom87, Str. 134]. Reprezentacja  $(id, T, H)$  spełnia nierówność

(B.1), która przyjmuje tu postać nierówności Cauchy dla współczynników rozwinięcia funkcji analitycznej: dla  $a_{\pm n} \in \mathbb{C}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  i  $z \in S^1$  mamy

$$|a_0| \leq \max_{z \in S^1} \left| \sum_{k=-N}^N a_k z^{k+N} \right| = \max_{z \in S^1} \left| \sum_{k=-N}^N a_k z^k \right| = \left\| \sum_{k=-N}^N a_k T^k \right\|.$$

Zatem  $C^*(\mathcal{A}, T) \cong C^*(X, \alpha; \emptyset) = C(S^1)$  i przy utożsamieniach  $C^*(\mathcal{A}, T) = C(S^1)$  oraz  $\mathcal{B} = \mathcal{A} = \mathbb{C}$ , współczynniki  $\{N_k(b)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  operatora elementu  $b \in C^*(\mathcal{A}, T)$  pokrywają się z klasycznymi współczynnikami Fouriera funkcji  $b \in C(S^1)$ .

## C Zbiory $\alpha$ -niezmiennicze i ideały w $C^*(X, \alpha; Y)$

Pojęcie niezmienniczości wprowadzone przez autora w [Kwa05', Def. 5.1] (a którego znaczenie tłumaczą Twierdzenia C.4, C.7) pomoże nam wyjaśnić związek pomiędzy  $\alpha$ -niezmienniczymi podzbiarami  $X$  oraz  $\tilde{\alpha}$ -niezmienniczymi podzbiarami  $\tilde{X}$ . Jako, że pojęcie to jest słabsze od rozważanej w obecnej pracy  $\alpha$ -niezmienniczości, nazwiemy je słabą  $\alpha$ -niezmienniczością.

**Definicja C.1.** Niech  $(X, \alpha)$  będzie częściowym układem dynamicznym i niech  $\omega \subset X$ . Powiemy, że zbiór  $\omega$  jest *słabo  $\alpha$ -niezmienniczny* jeśli

$$\alpha^n(\omega \cap \Delta_n) = \omega \cap \Delta_{-n}, \quad \text{dla każdego } n = 0, 1, 2, \dots$$

Zbiór  $\omega$  nazywamy  *$\alpha$ -niezmiennicznym*, jeśli  $\alpha^{-1}(\omega) = \omega \cap \Delta_1$ , por. strona 101.

Z jednej strony, łatwo jest podać przykład zbioru słabo  $\alpha$ -niezmiennicznego, którego dopełnienie nie jest słabo  $\alpha$ -niezmienniczne, patrz Przykład C.5, z drugiej strony mamy

**Stwierdzenie C.2.** Niech  $(X, \alpha)$  będzie częściowym układem dynamicznym.

- i) Zbiór  $\omega \subset X$  jest  $\alpha$ -niezmienniczny wtedy i tylko wtedy, gdy  $\omega$  oraz  $X \setminus \omega$  są zbiorami słabo  $\alpha$ -niezmiennicznymi.
- ii) Podział  $\{\omega_i\}_{i \in I}$  przestrzeni  $X$  składa się ze zbiorów  $\alpha$ -niezmiennicznych wtedy i tylko wtedy, gdy składa się ze zbiorów słabo  $\alpha$ -niezmiennicznych.

**Dowód.** Załóżmy, że  $\alpha^{-1}(\omega) = \omega \cap \Delta_1$ . Poprzez indukcję dla  $n > 0$  otrzymujemy

$$\alpha^{-n}(\omega) = \alpha^{-n+1}(\alpha^{-1}(\omega)) = \alpha^{-n+1}(\omega) \cap \alpha^{-n+1}(\Delta_{-1}) = \omega \cap \Delta_n,$$

a stąd  $\omega \cap \Delta_{-n} = \alpha^n(\omega \cap \Delta_n)$ . Zatem  $\omega$  jest zbiorem słabo  $\alpha$ -niezmiennicznym. Równość  $\alpha^{-1}(X \setminus \omega) = X \setminus \omega \cap \Delta_1$  (która wynika z  $\alpha^{-1}(\omega) = \omega \cap \Delta_1$ ) oraz argument podobny do powyższego pokazują, że zbiór  $X \setminus \omega$  jest również słabo  $\alpha$ -niezmienniczny.

Założmy teraz, że  $\omega$  i  $X \setminus \omega$  są zbiorami słabo  $\alpha$ -niezmiennicznymi. Z równości  $\alpha(\omega \cap \Delta_1) = \omega \cap \Delta_{-1}$  i  $\alpha(X \setminus \omega \cap \Delta_1) = X \setminus \omega \cap \Delta_{-1}$  wynikają inkluzje  $\omega \cap \Delta_1 \subset \alpha^{-1}(\omega)$  i  $X \setminus \omega \cap \Delta_1 \subset \alpha^{-1}(X \setminus \omega)$ . Stąd  $\alpha^{-1}(\omega) = \omega \cap \Delta_1$ . ■

Dla odwzorowań różnowartościowych pojęcia niezmienniczości oraz słabej niezmienniczości pokrywają się.

**Stwierdzenie C.3.** *Jeśli  $\alpha$  jest odwzorowaniem różnowartościowym, to następujące warunki są równoważne*

- i)  $\omega$  jest zbiorem słabo  $\alpha$ -niezmienniczym
- ii)  $\omega$  jest zbiorem słabo  $\alpha^{-1}$ -niezmienniczym
- iii)  $\omega$  jest zbiorem  $\alpha$ -niezmienniczym

**Dowód.** Zastosować [Kwa05', Stw. 5.2] oraz Stwierdzenie C.2. ■

Z powyższego stwierdzenia wynika w szczególności, że każdy słabo  $\tilde{\alpha}$ -niezmienniczy podzbiór  $\tilde{X}$  jest automatycznie  $\tilde{\alpha}$ -niezmienniczy.

**Twierdzenie C.4.** *Niech  $J$  będzie ideałem w  $C^*(X, \alpha; Y)$  oraz niech  $Z \subset X$ ,  $\tilde{Z} \subset \tilde{X}$  będą domkniętymi zbiorami takimi, że*

$$C_Z(X) = C(X) \cap J, \quad C_{\tilde{Z}}(\tilde{X}) = C(\tilde{X}) \cap J,$$

tj.  $Z = \text{hull}(C(X) \cap J)$ ,  $\tilde{Z} = \text{hull}(C(\tilde{X}) \cap J)$ . *Wtedy  $Z$  jest zbiorem słabo  $\alpha$ -niezmienniczym,  $\tilde{Z}$  jest zbiorem  $\tilde{\alpha}$ -niezmienniczym oraz*

$$\Phi(\tilde{Z}) = Z, \quad \tilde{Z} = (Z \times (Z \cup \{0\}) \times (Z \cup \{0\}) \times \dots) \cap \tilde{X}, \quad (\text{C.1})$$

gdzie  $\Phi$  jest odwzorowaniem (1.22), dualnym do zanurzenia  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ . Co więcej, relacje (C.1) ustalają wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między wszystkimi domkniętymi zbiorami  $\tilde{\alpha}$ -niezmienniczymi i domkniętymi zbiorami słabo  $\alpha$ -niezmienniczymi.

**Dowód.** Zauważmy, że relacje

$$TC_{\tilde{Z}}(\tilde{X})T^* = \delta(C_{\tilde{Z}}(\tilde{X})) \subset C_{\tilde{Z}}(\tilde{X}), \quad T^*C_{\tilde{Z}}(\tilde{X})T = \delta_*(C_{\tilde{Z}}(\tilde{X})) \subset C_{\tilde{Z}}(\tilde{X}),$$

implikują, iż  $\tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{Z}) = \tilde{Z} \cap \tilde{\Delta}_1$ . Zatem zbiór  $\tilde{Z}$  jest  $\tilde{\alpha}$ -niezmienniczy, a ponadto  $\Phi(\tilde{Z}) = Z$ , co wynika natychmiast z definicji  $Z$ ,  $\tilde{Z}$  oraz  $\Phi : \tilde{X} \rightarrow X$ .

Niech  $\tilde{Z}$  będzie teraz dowolnym domkniętym,  $\tilde{\alpha}$ -niezmienniczym podzbiorem  $\tilde{X}$  oraz niech  $Z := \Phi(\tilde{Z})$ . Wtedy zbiór  $Z$  jest słabo  $\alpha$ -niezmienniczy, gdyż korzystając z równości  $\tilde{\alpha}^n(\tilde{Z} \cap \tilde{\Delta}_n) = \tilde{Z} \cap \tilde{\Delta}_{-n}$  oraz przemienności diagramu (1.23) dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  mamy

$$\alpha^n(Z \cap \Delta_n) = \alpha^n(\Phi(\tilde{Z} \cap \tilde{\Delta}_n)) = \Phi(\tilde{\alpha}^n(\tilde{Z} \cap \tilde{\Delta}_n)) = \Phi(\tilde{Z} \cap \tilde{\Delta}_{-n}) = Z \cap \Delta_{-n}.$$

Domkniętość  $\tilde{Z}$  oczywiście implikuje domkniętość  $Z$ , a równość

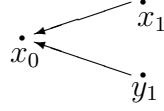
$$\Phi(\tilde{\alpha}^{-n}(\tilde{Z} \cap \tilde{\Delta}_{-n})) = \Phi(\tilde{Z} \cap \tilde{\Delta}_n) = Z \cap \Delta_n,$$

postać odwzorowania  $\tilde{\alpha}^{-n}$  i argument z dowodu z [Kwa05', Tw. 2.15] pokazują, że  $\tilde{Z} = (Z \times (Z \cup \{0\}) \times (Z \cup \{0\}) \times \dots) \cap \tilde{X}$ .

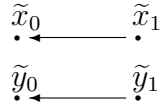
Na odwrót, jeśli  $Z$  jest dowolnym domkniętym zbiorem słabo  $\alpha$ -niezmienniczym, to zbiór  $\tilde{Z} := (Z \times (Z \cup \{0\}) \times (Z \cup \{0\}) \times \dots) \cap \tilde{X}$  jest domknięty w  $\tilde{X}$  i argument z dowodu [Kwa05', Tw. 5.5] pokazuje, że  $\Phi(\tilde{Z}) = Z$ . Stąd nietrudno spostrzec, że  $\tilde{Z}$  jest również zbiorem  $\tilde{\alpha}$ -niezmienniczym, co kończy dowód twierdzenia. ■

Aby zobrazować powyżej ustalone relacje między zbiorami niezmienniczymi rozpatrzmy prosty

**Przykład C.5.** Niech układ  $(X, \alpha)$  będzie dany relacjami:  $X = \{x_0, x_1, y_1\}$ ,  $\Delta_1 = \{x_1, y_1\}$ ,  $\alpha(y_1) = \alpha(x_1) = x_0$ , lub równoważnie diagramem



Wtedy kładąc  $\tilde{x}_0 := (x_0, x_1, 0, \dots)$ ,  $\tilde{x}_1 := (x_1, 0, \dots)$ ,  $\tilde{y}_0 := (x_0, y_1, 0, \dots)$ ,  $\tilde{y}_1 := (y_1, 0, \dots)$ , naturalne rozszerzenie  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  układu  $(X, \alpha)$  związane z  $Y = X \setminus \Delta_{-1}$  jest dane relacjami:  $\tilde{X} = \{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1\}$ ,  $\tilde{\Delta}_1 = \{\tilde{x}_1, \tilde{y}_1\}$ ,  $\tilde{\alpha}(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_0$ ,  $\tilde{\alpha}(\tilde{y}_1) = \tilde{y}_0$



Istnieją dokładnie dwa nietrywialne zbiory słabo  $\alpha$ -niezmiennicze:  $Z_1 = \{x_0, x_1\}$ ,  $Z_2 = \{x_0, y_1\}$  oraz dwa nietrywialne zbiory  $\tilde{\alpha}$ -niezmiennicze:  $\tilde{Z}_1 = \{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1\}$ ,  $\tilde{Z}_2 = \{\tilde{y}_0, \tilde{y}_1\}$ . Oczywiście, żaden ze zbiorów  $Z_1$ ,  $Z_2$  nie jest  $\alpha$ -niezmienniczy.

Stosując Twierdzenie C.4 do ideału będącego jądrem reprezentacji algebry kowariancji otrzymujemy następującą „redukcję” takiej reprezentacji.

**Twierdzenie C.6 (Redukcja reprezentacji algebry  $C^*(X, \alpha; Y)$ ).** *Rozważmy reprezentację  $\pi : C^*(X, \alpha; Y) \rightarrow L(H)$ . Wtedy  $X_\pi := \text{hull}(C(X) \cap \ker \pi)$  jest domkniętym, słabo  $\alpha$ -niezmiennicznym podzbiorem  $X$ , a trójka  $(\pi_R, \pi(\mathbf{T}), H)$ , gdzie*

$$C(X_\pi) \cong C(X)/C_{X_\pi}(X) \ni a + C_{X_\pi}(X) \xrightarrow{\pi_R} \pi(a).$$

*jest wierną reprezentacją kowariantną układu  $(X_\pi, \alpha|_{X_\pi})$  związaną ze zbiorem  $Y \cap X_\pi$ . W szczególności  $\pi_R$  przedłuża się do reprezentacji  $\pi_R : C^*(X_\pi, \alpha|_{X_\pi}; Y \cap X_\pi) \rightarrow L(H)$ , której obrazem jest  $\pi(C^*(X, \alpha; Y))$ , a która ustala izomorfizmy*

$$C(X_\pi) \cong \pi(C(X)), \quad C(\tilde{X}_\pi) \cong \pi(C(\tilde{X})),$$

*gdzie  $\tilde{X}_\pi := \text{hull}(C(\tilde{X}) \cap \ker \pi)$  i  $(\tilde{X}_\pi, \tilde{\alpha}|_{\tilde{X}_\pi})$  traktujemy jako naturalne rozszerzenie układu  $(X_\pi, \alpha|_{X_\pi})$  związane ze zbiorem  $Y \cap X_\pi$ .*

**Dowód.** Na mocy Twierdzenia C.4 układ  $(\tilde{X}_\pi, \tilde{\alpha}|_{\tilde{X}_\pi})$  możemy utożsamić z naturalnym rozszerzeniem układu  $(X_\pi, \alpha|_{X_\pi})$  związanym z  $Y \cap X_\pi$ , a wtedy mamy  $C(X_\pi) \subset C(\tilde{X}_\pi) \subset C^*(X, \alpha; Y)$ . Nietrudno spostrzec, że  $(\pi_R, \pi(\mathbf{T}), H)$ , gdzie  $\pi_R : C(\tilde{X}_\pi) \rightarrow L(H)$  jest zdefiniowane w tezie, jest wierną reprezentacją kowariantną układu  $(\tilde{X}_\pi, \tilde{\alpha}|_{\tilde{X}_\pi})$  związaną z dopełnieniem obrazu  $\tilde{\alpha}|_{\tilde{X}_\pi}$ . Stąd  $(\pi_R|_{C(X_\pi)}, \pi(\mathbf{T}), H)$  jest wierną reprezentacją kowariantną  $(X_\pi, \alpha|_{X_\pi})$  związaną z  $Y \cap X_\pi$ . Reszta wynika z Twierdzeń A.3, 1.28. ■

Twierdzenie C.4 pozwala również łatwo uogólnić, bardzo ważne z punktu widzenia algebr kowariancji, rezultaty [Kwa05', Tw. 6.4, Wn. 6.6].

**Twierdzenie C.7 (Struktura kraty ideałów algebry kowariancji).** *Niech układ  $(X, \alpha)$  będzie taki, że  $\alpha$  nie posiada punktów okresowych i niech  $Y$  będzie dowolnym zbiorem domkniętym zawierającym  $X \setminus \Delta_{-1}$ . Wtedy relacje*

$$C_{\tilde{Z}}(\tilde{X}) = C(\tilde{X}) \cap J, \quad C_Z(X) = C(X) \cap J, \quad C_Z(X) = C_{\tilde{Z}}(\tilde{X}) \cap C(X)$$

ustalają wzajemnie jednoznaczne odpowiedniości między idealami w algebrze kowariancji  $C^*(X, \alpha; Y)$ ; domkniętymi,  $\tilde{\alpha}$ -niezmienniczymi podzbiorami  $\widetilde{X}$  oraz domkniętymi, słabo  $\alpha$ -niezmienniczymi podzbiorami  $X$ .

**Dowód.** W świetle Twierdzenia C.4 wystarczy zastosować [ELQ02, Tw. 3.5], por. [Kwa05', Tw.6.5] ■

**Wniosek C.8.** *Jeśli  $X$  nie posiada nietrywialnych domkniętych podzbiorów  $\alpha$ -niezmienniczych i  $(X, \alpha)$  nie jest cyklem, to algebra  $C^*(X, \alpha; Y)$  jest prosta.*

**Dowód.** Przy powyższych założeniach  $\alpha$  nie posiada punktów stałych więc na mocy Twierdzenia C.7 algebra  $C^*(X, \alpha; Y)$  nie posiada nietrywialnych idealów. ■

Jeśli  $(X, \alpha)$  tworzy cykl, to jest gdy  $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$  i  $\alpha(x_k) = x_{k+1(\text{mod } n)}$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ , wtedy  $C^*(X, \alpha; \emptyset) \cong C(S^1) \otimes M_n = C(S^1, M_n)$ , gdzie  $M_n$  jest algebrą macierzy  $n \times n$ , por. [Tom87, Str. 134]. Zatem  $C^*(X, \alpha; \emptyset)$  posiada nieskończenie wiele idealów.



# Podsumowanie

W przedłożonej pracy badaliśmy własności spektralne ogólnie rozumianych operatorów przesunięcia z wagą, tj. operatorów postaci  $aT$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , gdzie  $T$  jest częściową izometrią w przestrzeni Banacha, generującą (na ogół nieodwracalny) częściowy układ dynamiczny  $(X, \alpha)$  na przestrzeni ideałów maksymalnych przemiennej algebry Banacha  $\mathcal{A}$ . Podstawowym problemem był całkowity opis widma takich operatorów, a najważniejsze otrzymane wyniki oraz ogólna struktura przeprowadzonych badań przedstawiają się następująco.

W pierwszym kroku skonstruowaliśmy „odwracalny obraz” dowolnego, niekoniecznie odwracalnego, układu dynamicznego  $(X, \alpha)$  – w dalszej części pracy, przy badaniu widma  $\sigma(aT)$ , pozwala nam to korzystać z metod oraz idei opracowanych dla operatorów związanych z odwracalnymi układami dynamicznymi. Odwracalny układ dynamiczny  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$ , którego rzutem jest wyjściowy układ  $(X, \alpha)$ , zdefiniowaliśmy jako układ generowany przez operator  $T$  na przestrzeni ideałów maksymalnych przemiennej algebry Banacha  $\mathcal{B}$  zawierającej algebrę  $\mathcal{A}$ . Pełny opis układu  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  przedstawia Twierdzenie 1.28.

W następnym kroku otrzymaliśmy nowe zasady wariacyjne wyznaczające promień spektralny operatorów postaci  $aT$  (Twierdzenia 4.5, 4.7). Najbardziej ogólna z tych zasad wyraża promień spektralny  $r(aT)$  w terminach całek na przestrzeni  $\tilde{X}$  względem miar  $\tilde{\alpha}$ -ergodycznych, gdzie  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$  jest opisanym w rozdziale 1 rozszerzonym układem odwracalnym.

Geometryczny opis widma  $\sigma(aT)$  zaczynamy (w rozdziale 5) od badania rzutu Rieszego odpowiadającego części  $\sigma(aT)$  leżącej wewnątrz koła o zadanym promieniu. Udowodniliśmy, że rzut taki należy do algebry  $\mathcal{A}$  i komutuje z operatorem  $T$ , czyli odpowiada mu funkcja charakterystyczna domknięto-otwartego,  $\alpha$ -niezmienniczego podzbioru  $X$  (Twierdzenie 5.6). Stąd oraz dzięki zasadom wariacyjnym uzyskanym w rozdziale 4 otrzymaliśmy całkowity opis zbioru  $|\sigma(aT)|$  w terminach układu dynamicznego  $(X, \alpha)$  (Twierdzenie 5.6).

Uzyskany w rozdziale 5 opis zbioru  $|\sigma(aT)|$  oraz technika algebr kowariancji (ogólnie pojętych iloczynów krzyżowych  $C^*$ -algebr) pozwoliły nam (w rozdziale 6) uzyskać kompletny opis widma  $\sigma(aT)$  dla operatorów działających w przestrzeni Hilberta, generujących układy topologicznie wolne. Dodatkowo otrzymaliśmy tu także opis widma istotnego  $\sigma_{ess}(aT)$ , a dokładniej pokazaliśmy, że widmo  $\sigma(aT)$  jest niezmiennicze ze względu na obroty wokół zera i jeśli  $X$  nie posiada punktów izolowanych, to  $\sigma(aT) = \sigma_{ess}(aT)$  (Twierdzenie 6.3). Wyniki te zamykają pierwszy istotny etap naszych badań.

W drugim etapie, rezultaty otrzymane dla operatorów w przestrzeni Hilberta udało

nam się uogólnić i przenieść (w rozdziałach 7 - 9) na konkretne operatory przesunięcia  $aT_p$  działające w przestrzeniach  $L^p_\mu(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , wykazując, że  $\sigma(aT_p) = \sigma(aT_2)$  niezależnie od  $p \in [1, \infty]$ . Końcowy wynik zawarty jest w Twierdzeniu 9.2.

Aby uzyskać Twierdzenie 9.2 wykazaliśmy szereg następujących, również ważnych twierdzeń:

- dla operatorów w przestrzeni Hilberta uzyskaliśmy charakterystykę odwracalności elementów  $C^*$ -algebry  $C^*(\mathcal{A}, T)$  za pomocą operatorów dyskretnych w przestrzeniach  $\ell^2$  (Twierdzenie 7.12);
- udowodniliśmy nową wersję twierdzenia typu Wienera dla bezwzględnie zbieżnych szeregów operatorowych w  $C^*$ -algebrze  $C^*(\mathcal{A}, T)$  (Twierdzenie 7.19);
- wykazaliśmy analogiczną wersję twierdzenia Wienera dla algebr  $B_p$ ,  $p \in [1, \infty]$ , zawierających konkretne operatory przesunięcia  $aT_p$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , w przestrzeniach  $L^p_\mu(\Omega)$  (Twierdzenia 8.1, 8.2, 8.7);
- otrzymaliśmy charakterystykę odwracalności elementów algebry  $B_p$  za pomocą operatorów dyskretnych w przestrzeniach  $\ell^p$  (Twierdzenie 8.7).

Powyżej wymienione twierdzenia tworzą łącznik (wyjaśniający związek) pomiędzy teorią spektralną ważonych operatorów kompozycji w przestrzeniach Hilberta, a odpowiednią teorią takich operatorów w przestrzeniach  $L^p$ .

Obok powyższych rezultatów teoretycznych do wyników obecnej rozprawy należy również zaliczyć szereg przykładów ukazujących naturę i głęboki związek rozważanych obiektów z pojęciami teorii układów dynamicznych. W tej sferze wykonaliśmy co następuje.

Pokazaliśmy, że dowolny częściowy układ dynamiczny  $(X, \alpha)$  może być traktowany jako układ generowany przez pewien operator  $T$  na widmie pewnej algebry  $\mathcal{A}$  (Twierdzenie 1.34), a w przypadku, gdy  $(X, \alpha)$  jest układem jednowymiarowym przedstawiliśmy konkretną konstrukcję takich operatorów w przestrzeniach  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $p \in [1, \infty]$  (Twierdzenia 3.12, 3.14).

Otrzymaliśmy jawny opis przestrzeni ideałów maksymalnych  $\widetilde{X}$  algebry rozszerzonej  $\mathcal{B}$  oraz dynamiki częściowego homeomorfizmu  $\tilde{\alpha}$  generowanego przez  $T$  na  $\widetilde{X}$ , dla operatorów  $T$  generujących na widmie wyjściowej algebry  $\mathcal{A}$  takie klasyczne nieodwracalne układy dynamiczne jak: odwzorowania logistyczne (Twierdzenia 2.9, 2.12, 2.13, 2.14); ekspansywne endomorfizmy okręgu (Twierdzenie 3.8); jednostronne przesunięcia Markowa (Stwierdzenia 3.18, 3.19, Twierdzenie 3.21); odwzorowania na grafach (przykłady 3.16, 3.17). Rezultaty te m. in. unaoczniają związek przestrzeni rozszerzonej  $\widetilde{X}$  z topologicznymi strukturami hiperbolicznych atraktorów, nierozkładalnych continuów oraz układów związanych z kafelkowaniem (ang. tilings).

Przestrzeń  $\widetilde{X}$  posiada również nietrywialną strukturę w przypadku, gdy  $T$  jest nieodwracalnym operatorem generującym odwracalny układ dynamiczny, co pokazaliśmy dokonując klasyfikacji takich przestrzeni  $\widetilde{X}$  za pomocą liczb obrotu dla zachowujących orientację homeomorfizmów okręgu (Twierdzenia 3.28, 3.29) oraz analizując strukturę  $\widetilde{X}$  dla przesunięć na torusie (Twierdzenie 3.32, Przykład 3.33).

Jeśli chodzi o widmo  $\sigma(aT)$  operatorów  $aT$ , to w Przykładach 6.13 - 6.18 (patrz też strona 153), omówiliśmy widmo takich operatorów w przestrzeniach  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $p \in$



$[1, \infty]$ , związanych z odwzorowaniami logistycznymi, ekspansywnymi endomorfizmami okręgu, pełnymi przesunięciami Markowa, homeomorfizmami okręgu i przesunięciami na torusie. Przy obliczaniu promienia spektralnego (Przykłady 4.10 - 4.12), ujawniliśmy ścisły związek spektralnych własności operatorów  $aT$  z ergodycznymi własnościami układów  $(X, \alpha)$  i  $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$ .

Na koniec dla operatora  $T : L^p(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^p(\mathbb{R}_+)$ , będącego operatorem kompozycji z odwzorowaniem  $\gamma(t) = Nt$ , skonstruowaliśmy operator mnożenia  $a$  taki, że  $\sigma(aT) = \sigma_{ess}(aT)$  jest dowolnym, z góry zadany zbiorem zwartym o symetrii kołowej (Stwierdzenie 9.7).



# Spis rysunków

1	Diagram pracy. . . . .	ix
1.1	Częściowy układ dynamiczny $(X, \alpha)$ generowany przez $T$ na $\mathcal{A}$ (a); częściowy układ dynamiczny $(X_+, \alpha_+)$ generowany przez $T$ na $\mathcal{A}_+$ (b).	15
1.2	Układy związane z odwzorowaniem stałym. . . . .	22
2.1	Wykres odwzorowania logistycznego $\alpha_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ (a); Wykres różnowartościowego odwzorowania $\gamma_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ związanego z $\alpha_\lambda$ (b). .	26
2.2	Continuum Brouwera-Janiszewskiego-Knastera. . . . .	30
2.3	Diagram bifurkacyjny dla $\lambda \in [0, 74; 1]$ . . . . .	32
2.4	Wykres $\alpha_\lambda$ dla parametru $0 < \lambda \leq \frac{1}{4}$ (a); $\frac{1}{4} < \lambda \leq \frac{1}{2}$ (b). . . . .	34
2.5	Dynamika układu $(\tilde{X}_\lambda, \tilde{\alpha}_\lambda)$ , gdy $0 < \lambda \leq \frac{1}{4}$ (a); $\frac{1}{4} < \lambda \leq \frac{1}{2}$ (b). . . . .	34
2.6	Wykres $\alpha_\lambda$ dla parametru $\frac{1}{2} < \lambda \leq \frac{3}{4}$ (a); $\frac{3}{4} < \lambda \leq \frac{1+\sqrt{6}}{4}$ (b). . . . .	35
2.7	Dynamika układu $(\tilde{X}_\lambda, \tilde{\alpha}_\lambda)$ , gdy $\frac{1}{2} < \lambda \leq \frac{3}{4}$ (a); $\frac{3}{4} < \lambda \leq \frac{1+\sqrt{6}}{4}$ (b). . .	35
2.8	Continuum węzowe $X_\infty \subset \tilde{X}_\lambda$ dla parametru $\lambda$ zbliżającego się z lewej strony do wartości $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{6}}{4} \approx 0.862$ , w której zachodzi druga bifurkacja.	36
2.9	Continuum węzowe $X_\infty \subset \tilde{X}_\lambda$ po drugiej bifurkacji (zanurzone w prze- strzeni trójwymiarowej $Oxyz$ ). . . . .	38
2.10	Podprzestrzeń $X_\infty \subset \tilde{X}_\lambda$ po czwartej bifurkacji (przedstawienie sche- matyczne). . . . .	39
2.11	Podprzestrzeń $X_\infty \subset \tilde{X}_\lambda$ dla parametru: $\lambda = \mu_1$ (a); $\lambda = \mu_2$ (b). . . .	40
2.12	Podprzestrzeń $X_\infty \subset \tilde{X}_\lambda$ dla $\lambda = \mu_4$ (przedstawienie schematyczne). .	41
2.13	Diagram bifurkacyjny dla $\lambda \in [0, 91; 1]$ . . . . .	42
2.14	Continuum $C_3$ jako atraktor. . . . .	43
2.15	Continua $C_3$ i $C_6$ . . . . .	43
3.1	Solenoid. . . . .	53
3.2	Kawałkami ciągle i kawałkami monotoniczne odwzorowanie odcinka. .	56
3.3	Graf $X$ związany z atraktorem Plykina (a); reguły nawijania zadające odwzorowanie $\alpha : X \rightarrow X$ (b). . . . .	61
3.4	Wykres odwzorowania funkcji $a(t)$ na $[0, 1]$ dla $a \in \mathcal{A}$ (a); Wykres odwzorowania $\beta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ (b). . . . .	61
3.5	Atraktor Plykina. . . . .	62
3.6	Graf $X$ związany z kafelkowaniem Fibonacciego (a); reguły owijania odwzorowania $\alpha : X \rightarrow X$ (b). . . . .	62

3.7	Wykres odwzorowania funkcji $a(t)$ na $[0, 1)$ dla $a \in \mathcal{A}$ (a); Wykres odwzorowania $\beta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ (b). . . . .	63
3.8	Typowe kafelkowanie Fibonacciego (a); reguła podstawiania dla kafelkowań Fibonacciego (b). . . . .	63
3.9	Macierze incydencji $A$ i $B$ . . . . .	65
3.10	Grafy skierowane zadające przesunięcia Markowa z Przykładu 3.20. . . . .	66
3.11	Wykres dystrybuanty miary $\eta$ dla $N = 2$ – diabelskie schody Cantora przedłużone na półprostą $\mathbb{R}_+$ . . . . .	67
3.12	Iteracje odwzorowania podkowy Smale’a. . . . .	69
3.13	Przeciwobrazy odwzorowania podkowy Smale’a. . . . .	69
3.14	Kodowanie punktów zbioru podkowy $H$ . . . . .	70
3.15	Widmo algebry $\mathcal{B}$ związanej z homeomorfizmem okręgu. . . . .	73
3.16	Widmo algebry związanej z przesunięciami na torusie $\mathbb{T}^2$ . . . . .	78
3.17	„Niehomeomorficzne siatki okien” odbite na torusie $X_\infty$ . . . . .	79
3.18	”Homeomorficzne siatki okien” odbite na torusie $X_\infty$ . . . . .	79
3.19	Homeomorfizm torusa ustalający $\widetilde{X}_{(\frac{4}{5}, \frac{4}{5})} \cong \widetilde{X}_{(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})}$ . . . . .	80
4.1	Dystrybuanty miar Markowa na zbiorze Cantora i zbiorze podkowy. . . . .	89
4.2	Miara naturalna na solenoidzie. . . . .	91
4.3	Miara naturalna na B-J-K continuum. . . . .	92
4.4	Gęstość Ulama-Von Neummana na: odcinku (a); B-J-K continuum (b). . . . .	94
6.1	Podukład $(\{y, x_0, \dots, x_{n-1}\}, \alpha)$ topologicznie wolnego układu $(X, \alpha)$ , który istnieje dla każdego niepustego podzbioru otwartego $U \subset F_n$ . . . . .	116
9.1	Konstrukcja układu dynamicznego związanego z ważonym operator przesunięcia o z góry zadany widmie. . . . .	156

# Indeks

- algebra
  - funkcyjna, 84
  - kowariancji, 128, 161
  - półprosta, 2
  - regularna, 2
  - współczynników, 161
- anihilator, 4
- atraktor
  - Plykina, 62
  - Smale'a, 53
- B-J-K continuum, 30
- bifurkacja, 32
- brzeg Szyłowa, 85
- ciąg niemal zbieżny, 94
- continuum, 28
  - Brouwera-Janiszewskiego-Knastera, 30
  - nierozkładalne, 29
  - rozkładalne, 29
  - $\sin(1/x)$ , 35
  - wężowe, 29
- część ułamkowa liczby, 56
- częściowa izometria
  - w przestrzeni Banacha, 5
  - w przestrzeni Hilberta, 5
- częściowy
  - automorfizm, 4
  - homeomorfizm, 4
  - układ dynamiczny, 3
    - topologicznie wolny, 115, 163
- dyskretyzacja, 133, 143
- funkcja entier, 56
- granica
  - Banacha, 94
  - Feigenbauma, 31
  - odwrotna, 13
- kafelkowania, ix
  - Fibonacciego, 63
- komutant, 7
- koniec przestrzeni topologicznej, 36
- liczba obrotu
  - homeomorfizmu okręgu, 73
- luk, 29
- macierz incydencji, 64
- miara
  - ergodyczna, 83
  - Markowa, 88
  - niezmiennicza, 83
- odwzorowanie
  - częściowe, 3
    - dualne do endomorfizmu, 3
    - generowane przez operator, 10
    - logistyczne, 25
- operator
  - generujący częściowe odwzorowanie, 10
  - generujący endomorfizm, 10
  - przesunięcia z wagą
    - abstrakcyjny, vi, x, 10
    - klasyczny, 11
- orbita
  - dodatnio nieskończona, 129
  - punktu  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , 129
  - skończona, 129
  - superstabilna, 35
  - ujemnie nieskończona, 130
- otoczka podzbioru algebry, 3
- podalgebra
  - pełna, 136
- podkowa Smale'a, 69
- podniesienie
  - homeomorfizmu okręgu, 71
- promień, 36

przestrzeń

- $\mu$ -nierozkładalna, 154
- finalna częściowej izometrii, 5
- ideałów maksymalnych, 1
- inicjalna częściowej izometrii, 5

przesunięcie

- Markowa
  - dwustronne, 64
  - jednostronne, 64
- na torusie, 77
- skończonego typu, 64

punkt niebłądzący, 95

radykał, 2

reguły owijania, 61

reprezentacja

- kowariantna, 159, 160
- związana z  $Y$ , 160

solenoid

- $N$ -adyczny, 54

sprzężenie

- częściowych izometrii, 5

sympleks

- miar niezmienniczych, 85
- Poulsena, 88

transformata Gelfanda, 2

twierdzenie

- Denjoy, 76, 96
- o izomorfizmie, 117, 163
- Poincaré, 74
- Szarkowskiego, 32

układ dynamiczny

- jednowymiarowy, 55
- topologicznie wolny, 115, 163

widmo

- algebry Banacha, 1
- istotne operatora, 119

zasada wariacyjna, vii, 84

zbiór

- $\alpha$ -niezmienniczy, 101
- maksymalizujący, 85
- punktów niebłądzących, 95

# Bibliografia

- [AF91] J. M. Aarts, R. J. Fokkink „The classification of solenoids”, Proc. Amer. Math. Soc., V. 111, No. 4 (1991), p. 1161-1163.
- [Ant75] A. B. Antonevich „On a class of pseudodifferential operators with deviating argument on the torus”, Diff. Uravnenija, V. 11, No 9 (1975), p. 1550-1557 (in Russian).
- [Ant96] A. B. Antonevich, *Linear Functional Equations. Operator Approach*, Birkhauser Verlag, Operator Theory Advances and Applications, V. 83, 1996.
- [ABL05'] A. B. Antonevich, V. I. Bakhtin, A. V. Lebedev, *Spectra of operators associated with dynamical systems: from ergodicity to the duality principle*, A mathematical Anthology, Aspects of Differential Geometry, Methods in physics (S. Twareque Ali et al), World Scientific Monograph Series in Mathematics, no. 8, World Scientific, 2005, p. 129-162.
- [ABL05''] A. B. Antonevich, V.I. Bakhtin, A.V. Lebedev „Crossed product of  $C^*$ -algebra by an endomorphism, coefficient algebras and transfer operators”, arXiv: math.OA/0502415 v1 19 Feb 2005.
- [AL94] A. Antonevich, A. Lebedev, *Functional differential equations: I.  $C^*$ -theory*, Longman Scientific & Technical, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 70, 1994.
- [AP98] J. E. Anderson, I. F. Putnam „Topological invariants for substitution tilings and their associated  $C^*$ -algebras”, Ergod. Th. & Dynam. Sys., V. 18 (1998), p. 509-537.
- [BI96] M. Barge, W.T. Ingram „Inverse limits on  $[0, 1]$  using logistic bonding maps”, Topol. Appl., V. 72 (1996), p. 159-172.
- [BM85] M. Barge, I. Martin „Chaos, periodicity, and snakelike continua”, Trans. Amer. Soc. 289 (1985) p.355-365.
- [Bin51] R. H. Bing „Snake-like continua”, Duke Math. J., V. 18 (1951), p. 653 - 663.
- [BP42] S. Bochner, R. S. Phillips „Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative rings”, Ann. Math., V. 43, N.3 (1942), p. 409-418.

- [Boh] P. Bohl „Über die hinsichtlich der unabhängigen variablen periodische differentialgleichung erster ordnung”, *Acta Math.*, V. 40 (1916), p. 321-336.
- [BR79] O. Bratteli, D. W. Robinson, *Operator algebras and Quantum Statistical Mechanics I*, New York 1979.
- [BS03] M. Brin, G. Stuck, *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2003.
- [BD75] J. W. Bunce, J. A. Deddens „A family of  $C^*$ -algebras related to weighted shift operators”, *J. Funct. Analysis*, V. 19 (1975), p. 13-24.
- [CE80] P. Collet, J. -P. Eckmann, *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Birkhauser, Basel, 1980.
- [Dan30] D. van Dantzig „Über topologisch homogene kontinua”, *Fund. Math.*, V. 15 (1930), p. 102 - 125.
- [Den32] A. Denjoy „Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore”, *J. Math Pures et Appl.*, V. 11 (1932), p. 333-375.
- [Dev89] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [O'Don75] D. P. O'Donovan „Weighted shifts and covariance algebras”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, V. 208 (1975), p. 1-25.
- [DJ05] D. E. Dutkay, P. E. T. Jorgensen „Operators, martingales, and measures on projective limit spaces”, *Conform. Geom. Dyn.*, V. 9 (2005), p. 24-45.
- [Exel94] R. Exel „Circle actions on  $C^*$ -algebras, partial automorphisms and generalized Pimsner-Voiculescu exact sequence”, *J. Funct. Analysis*, V. 122 (1994), p. 361-401.
- [ELQ02] R. Exel, M. Laca and J. Quigg „Partial dynamical systems and  $C^*$ -algebras generated by partial isometries”, *J. Operator Theory*, V. 47 (2002), p. 169-186.
- [EV06] R. Exel and A. Vershik „ $C^*$ -algebras of irreversible dynamical systems”, *Can. Math. Jour.*, V 58 (2006), p. 39-63.
- [FMR03] N. J. Fowler, P. S. Muhly and I. Raeburn „Representations of Cuntz-Pimsner algebras”, *Indiana Univ. Math. J.*, V. 52 (2003), p. 569-605.
- [FKS87] S. W. Fomin, I.P. Kornfeld, J. G. Sinaj, *Teoria ergodyczna*, PWN, Warszawa 1982.
- [Gun07] G. Gunatillake „The spectrum of a compact weighted composition operator”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, V. 135, no. 2 (2007), p. 461-467.
- [Hal60] P. R. Halmos, *Lectures on ergodic theory*, Chelsea, New York, 1960.



- [Hal82] P. R. Halmos, *Hilbert space problem book*, Springer-Verlag, 1982.
- [Hen64] G. W. Henderson „The pseudo-arc as an inverse limit with one binding map”, *Duke Math. J.* Vol. 31 (1964), pp.421-425.
- [Kit79] A. K. Kitover „On the spectrum of an automorphism with a weight, and Kamowitz-Sheinberg theorem”, *Funct. anal. appl.* Vol. 13, No 1 (1979), p. 70-71 (in Russian)
- [Kam79] H. Kamowitz „Compact operators of the form  $uC_\varphi$ ”, *Pacific J. Math.* Volume, V. 80, No. 1 (1979), p. 205-211.
- [Kam81] H. Kamowitz „Compact weighted endomorphisms of  $C(X)$ ”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, V. 83, No. 3 (1981), p. 517-521.
- [Koo31] B. Koopman „Hamiltonian systems and transformations in Hilbert spaces”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, V. 17 (1931), p. 315-318.
- [Kum80] A. Kumar „Fredholm composition operators”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, V. 79, No. 2 (1980), p. 233-236.
- [Kur97] K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii* PWN, Warszawa 1997.
- [Kwa07] B.K. Kwaśniewski: „Extensions of  $C^*$ -dynamical systems to systems with complete transfer operators”, arXiv:math.OA/0703800 v1 27 Mar 2007
- [KL07<sup>1</sup>] B.K. Kwaśniewski, A.V. Lebedev „Crossed product by an arbitrary endomorphism”, arXiv:0704.3811 v1 29 Apr 2007
- [KL07<sup>2</sup>] B.K. Kwaśniewski, A.V. Lebedev „Relative Cuntz-Pimsner algebras, partial isometric crossed products and reduction of relations”, arXiv:math.OA/0703801 v1 27 Mar 2007
- [LM94] A. Lasota, M. Mackey, *Chaos, Fractals, and Noise: Stochastic Aspects of Dynamics*, Second Ed., Springer-Verlag, 1994.
- [Leb79] A. V. Lebedev „On the invertibility of elements in  $C^*$ -algebras generated by dynamical systems”, *Uspekhi Mat. Nauk.*, No 4 (1979), p. 199-200 (in Russian).
- [Leb80] A. V. Lebedev, *Weighted shift type operators*, Rozprawa doktorska, Minsk, 1980 (in Russian).
- [Leb82] A. V. Lebedev „Invertibility of elements in algebras of operators with shift. I”, *Vestsi. Akad. Navuk BSSR, Ser. Fiz.- Mat. Navuk*, No 6 (1982), p. 36-43 (in Russian).
- [Leb83] A. V. Lebedev „Invertibility of elements in algebras of operators with shift. II”, *Vestsi. Akad. Navuk BSSR, Ser. Fiz.- Mat. Navuk*, No 3 (1983), p. 41-47 (in Russian).

- [Leb05] A.V. Lebedev „Topologically free partial actions and faithful representations of partial crossed products”, *Funct. anal. appl.*, Vol. 39, No 3 (2005), p. 207-214.
- [LO04] A. V. Lebedev, A. Odziejewicz „Extensions of  $C^*$ -algebras by partial isometries”, *Matemat. Sbornik*, 2004. V. 195, No 7, p. 37–70.
- [LOS78] J. Lindenstrauss, G. Olsen, Y. Sternfeld „The Poulsen simplex”, *Annales de l’institut Fourier*, V. 28, No. 1 (1978), p. 91-114.
- [Lor48] G.G. Lorentz „A contribution to the theory of divergent sequences”, *Acta Math.*, no. 80 (1948), p.167–190.
- [Mbe04] M. Mbekhta „Partial isometries and generalized inverses”, *Acta Sci. Math.*, V. 70 (2004), p. 767-781.
- [MS98] P. S. Muhly and B. Solel „Tensor algebras over  $C^*$ -correspondences (representations, dilations, and  $C^*$ -envelopes)”, *J. Funct. Anal.*, V. 158 (1998), p. 389-457.
- [MN36] F. J. Murray, J. Von Neumann „On rings of operators”, *Ann. Math.*, V. 37 (1936), p. 116-229.
- [Nad92] S. Nadler, *Continuum Theory*, Dekker, New York, 1992.
- [Nor68] E. A. Nordgren „Composition operators”, *Cand. J. Math.*, V. 20 (1968), p. 442-449.
- [Par65] S. K. Parrott, *Weighted translation operators*, Thesis, University of Michigan, Ann Arbor, 1965. 23
- [Ped79] G. K. Pedersen,  *$C^*$ -algebras and their automorphism groups*, London Math. Soc. Monographs, Boston, (1979)
- [Pim97] Pimsner M. V. „A class of  $C^*$ -algebras generalizing both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by  $\mathbb{Z}$ ”, *Fields Inst. Commun.*, Amer. Math. Soc., V. 12 (1997), p. 189-212.
- [Poi85] H. Poincaré „Sur les courbes définies par les équations différentielles”, *J. Math. Pures Appl*, 4e serie, 1 (1885), p. 167-244.
- [Pou61] E. T. Poulsen „A simplex with dense extreme points”, *Annales de l’institut Fourier*, V. 11 (1961), p. 83-87.
- [Rid73] W. C. Ridge „Spectrum of a composition operator”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, V. 37, No. 1 (1973), p. 121-127.
- [Rie81] M. A. Rieffel „ $C^*$ -algebras associated with irrational rotations”, *Pacific J. Math.*, V. 93, No. 2 (1981), p. 415-429.
- [RS90] F. Riesz, B. Sz.-Nagy, *Functional analysis*, Dover Publications, 1990.
- [Rud98] W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, PWN, Warszawa, 1998.

- [Rud01] W. Rudin, *Analiza funkcjonalna*, PWN, Warszawa, 2001.
- [Sak71] S. Sakai, *C\*-Algebras and W\*-Algebras*, Springer, 1971
- [Sem77] V. N. Semenjuta „On singular operator equations with a shift on a circle” DAN SSSR, V. 237, No. 6 (1977), p. 1301-1302.
- [SV87] R. K. Singh, T. Veluchamy „Non-atomic measure spaces and Fredholm-composition operators”, Acta. sci. math., V. 51, No. 3-4 (1987), p. 461-465.
- [SD88] R. K. Singh, N. S. Dharmdikari „Compact and Fredholm composite multiplication operators”, Acta. sci. math., V. 52, No. 3-4 (1988), p. 437-441.
- [Szl82] W. Szlenk *Wstęp do teorii gładkich układów dynamicznych*, PWN, Warszawa 1982.
- [Tak92] H. Takagi „Compact weighted composition operators on  $L^p$ ” Proc. Amer. Math. Soc., V. 116, No. 2 (1992), p. 505-511.
- [Tom87] J. Tomiyama, *Invitation to C\*-algebras and topological dynamics*, World Scientific, Singapore, 1987
- [UN47] S. Ulam, J. von Neumann „On combination of stochastic and deterministic processes”, preliminary report, Bull. Amer. Math. Soc., V. 53 (1947), p. 1120.
- [Wal82] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Springer-Verlag, New York, 1982
- [Wat82] W. T. Watkins „Homeomorphic classification of certain inverse limit spaces with open bonding maps”, Pacific J. Math., V. 103 (1982), p. 589–601.
- [Wil67] R. F. Williams „One-dimensional nonwandering sets”, Topology, V. 6 (1967), p. 473-487.
- [Wil70] R. F. Williams „Classification of 1-dimensional attractors”, Proc. Sym. Pure Math. AMS, V. 14, (1970), p. 341-361.
- [Vie27] L. Vietoris „Über den höheren zusammenhang kompakten raume und eine klasse von zusammenhangenden abbildungen”, Math. Ann., V. 97 (1927), p. 454-472,
- [Yi01] I. Yi „Canonical symbolic dynamics for one-dimensional generalized solenoids”, Trans. Amer. Math. Soc., V. 353 (2001), p. 3741-3767.
- [Żel] W. Żelazko, *Algebra Banacha*, PWN, Warszawa 1968.

**Prace autora dotyczące analizy spektralnej operatorów generujących nieodwracalne układy dynamiczne.**

**Artykuły:**

- [Kwa05'] B.K. Kwaśniewski „Covariance algebra of a partial dynamical system”, Central European Journal of Mathematics, V.3, No 4 (2005), p. 718-765.
- [Kwa05''] B. K. Kwaśniewski „Inverse limit systems associated with  $F_2^n$  zero Schwarzian unimodal mappings”, Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz, Vol 55 (2005), p. 83-109.
- [KL08] B.K. Kwaśniewski, A.V. Lebedev „Reversible extensions of irreversible dynamical systems:  $C^*$ -method”, przyjęta do druku w Mat. Sbor. 2008.

**E-printy:**

- [KL03] B.K. Kwaśniewski, A.V. Lebedev „Maximal ideal space of a commutative coefficient algebra”, arXiv:math.OA/0311416 v1 24 Nov 2003.

**Rezultaty rozprawy zostały wygłoszone m. in. na konferencjach:**

- 1) Functional Analysis and Optimization, Będlewo, 17.09 - 22.09.2007  
Tytuł: „Spectra of weighted partial isometries”
- 2) XXV Workshop on Geometric Methods in Physics, Białowieża, 02.07 - 08.07.2006  
Tytuł: „Reversible extensions of one-dimensional dynamical systems”
- 3) International Conference in Dynamical Systems in memory of Wiesław Szlenk, Warszawa 6.06 - 11.06.2005  
Tytuł: „Projective limits associated with a unimodal mapping”
- 4) XXIV Workshop on Geometric Methods in Physics, Białowieża, 26.06 - 02.07.2005  
Tytuł: „Extensions of commutative algebras associated with  $C^*$ -dynamical systems”
- 5) 6th Conference Geometry and Topology of Manifolds, Krynica, 05.02 - 05.08.2004  
Tytuł: „Covariance algebra of an irreversible partial dynamical system”