Analiza matematyczna
Lista 4 (funkcji wielu zmiennych, pochodne)

Zad 1. Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne podanych funkcji

$$a)\ f(x,y)=\sqrt{x\sin y},\quad b)\ f(x,y)=\arcsin\sqrt{y-\sqrt{x}},\quad c)\ f(x,y)=\ln(\sqrt{x}-\sqrt{y}).$$

Zad 2. Obliczyć granice, jeśli istnieją

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{x+y}$, b) $\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{x-1}{x+y}$, c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$,

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(xy)^2}{x^2+y^2}$, e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$, f) $\lim_{(x,y)\to(0,3)}\frac{\sin(xy)}{x}$,

g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x-y}$, e) $\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{xy-1}{x-y}$, f) $\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sin xy^2}{y^2+(x-2)^2}$.

Zad 3. Wyznaczyć zbiór punktów, w których funkcja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ jest ciągła, gdy:

$$a)\ f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2} & x\geq 0\\ 2 & x<0\end{cases},\qquad b)\ f(x,y)=\begin{cases}xy & y\geq x\\ 2 & y<x\end{cases}.$$

Zad 4. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji:

a) $f(x,y,z)=x^5y^{10}-x^3\sin z+y^2e^z$, b) $f(x,y)=\arcsin\frac{y}{x}$,

c) $f(x,y)=x\sin(2x+y)$, d) $f(x,y)=\sqrt[3]{2xy}$, e) $f(x,y,z)=x^y+z^x$,

f) $f(x,y)=3^{xy}$, g) $f(x,y)=y^{2x}$, h) $f(x,y)=\sqrt{x+\sqrt{y+\sqrt{x}}}$.

Zad 5. Obliczyć z definicji pochodne cząstkowe funkcji

a) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3-y^3}$, w punkcie $(x_0,y_0)=(0,0)$

e) $f(x,y,z)=\frac{x^3+y}{x^2+y^2+z^2}$, w punkcie $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$

Zad 6. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji

a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, w punkcie $(x_0,y_0)=(0,0)$, w kierunku wektora $\vec{v}=(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$,

b) $f(x,y)=\sin x\cos y$, w punkcie $(x_0,y_0)=(0,\pi)$, w kierunku wektora $\vec{v}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Zad 7. Korzystając z reguły różniczkowania funkcji złożonej obliczyć pochodne cząstkowe względem zmiennych x i y funkcji $z=f(u,v)$, gdzie $f(u,v)=e^{uv}$, $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\arctan\frac{x}{y}$.

Zad 8. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji

a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, w punkcie $(x_0,y_0)=(0,0)$, w kierunku wektora $\vec{v}=(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$,

b) $f(x,y)=\sin x\cos y$, w punkcie $(x_0,y_0)=(0,\pi)$, w kierunku wektora $\vec{v}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Zad 9. Niech φ będzie funkcją różniczkowalną na $\mathbb{R}$. Pokazać, że funkcja

a) $z=y\varphi(x^2-y^2)$ spełnia równanie różniczkowe $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$,

b) $z=\varphi(\frac{x}{y})-x^2-y^2$ spełnia równanie różniczkowe $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-2(x^2+y^2)$.

Zad 10. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji:

a) $f(x,y,z)=x^5y^{10}-x^3\sin z+y^2e^z$, b) $f(x,y)=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$,

c) $f(x,y)=\sin(2x+y)$, d) $f(x,y)=\sqrt[3]{2xy}$, e) $f(x,y,z)=3^{xyz}$,

f) $f(x,y)=\sqrt{2xy+y^2}$, g) $f(x,y)=\ln(x^2+y)$, h) $f(x,y)=\arcsin\frac{x-y}{x}$.