

# Algebra liniowa

## Pytania na egzamin 2009-2010

1. Zbiory z działaniami. Co to jest działanie dwuargumentowe na zbiorze? Jakie znasz własności działań? Co to jest półgrupa, monoid, grupa? Co to jest ciało, podciało oraz ciało liczbowe? Podać przykłady.
2. Ciało liczb zespolonych. Jak konstruujemy i interpretujemy graficznie liczby zespolone? Jak dodajemy, odejmujemy, mnożymy i dzielimy w ciele liczb zespolonych? Co to jest sprzężenie liczby zespolonej i jakie ma własności?
3. Postać trygonometryczna liczb zespolonych. Co to jest oraz jakie własności posiadają moduł i argument liczby zespolonej? Przedstawić liczbę zespoloną w postaci biegunowej i zinterpretować geometrycznie mnożenie liczb zespolonych.
4. Pierwiastkowanie liczb zespolonych. Podać interpretację geometryczną mnożenia liczb zespolonych oraz Twierdzenie De Moivre'a. Co to jest i jakie własności posiada pierwiastek z liczby zespolonej? O czym mówi zasadnicze twierdzenie algebry?
5. Macierze. Co to jest i jakie znasz rodzaje macierzy? Omów podstawowe działania algebraiczne na macierzach: dodawanie, mnożenie przez skalar, transpozycja oraz mnożenie macierzy.
6. Wyznacznik macierzy. Co to jest wyznacznik i jak go obliczamy dla macierzy stopnia 2 i 3 oraz dla macierzy trójkątnej? Podać interpretację geometryczną wyznacznika, twierdzenie Laplace'a, oraz podstawowe własności wyznacznika związane z operacjami na kolumnach i wierszach.
7. Wyznaczanie macierzy odwrotnej. Sformułować tezę oraz wnioski z Twierdzenia Cauchy (o wyznaczniku iloczynu macierzy). Co to jest macierz odwrotna? Podać twierdzenie o istnieniu i postaci macierzy odwrotnej oraz bezwyznacznikowy algorytm (Gaussa) wyznaczania macierzy odwrotnej.
8. Układy równań liniowych. Co to jest układ równań liniowych? Jakie wyróżniamy rodzaje i jak macierzowo zapisujemy takie układy? Co to jest układ Cramera i o czym mówi Twierdzenie Cramera.
9. Twierdzenie Kroneckera-Capellego. Co to jest i jakie własności posiada rząd macierzy? Sformułować Twierdzenie Kroneckera-Capellego. Omówić algorytm rozwiązywania układów równań liniowych (metoda eliminacji Gaussa-Jordana).
10. Przestrzenie liniowe. Co to jest przestrzeń wektorowa oraz podprzestrzeń przestrzeni wektorowej? Podać przykłady. Co to jest podprzestrzeń generowana przez zbiór wektorów i jak można ją opisać za pomocą pojęcia kombinacji liniowej?
11. Liniowa niezależność i zależność wektorów. Co to jest niezależny oraz zależny układ wektorów? Podać przykłady. Przedstawić podstawowe własności układów liniowo niezależnych. Sformułować Twierdzenie Steinitza oraz wynikające z nich wnioski.
12. Baza i wymiar przestrzeni liniowej. Co nazywamy i jak można scharakteryzować pojęcie bazy w przestrzeni wektorowej? Co nazywamy wymiarem przestrzeni wektorowej i kiedy taka przestrzeń jest nieskończenie wielowymiarowa? Podać przykłady.
13. Identyfikacja przestrzeni skończenie wymiarowych. Co to są współrzędne wektora (w ustalonej bazie)? Skąd wynika ich istnienie i jednoznaczność? Co nazywamy izomorfizmem przestrzeni liniowych i ile z dokładnością do izomorfizmu istnieje przestrzeni wymiaru  $n$  nad ustalonym ciałem  $\mathbb{K}$ ?
14. Odwzorowania liniowe. Co to jest odwzorowanie liniowe? Podać przykłady. Jaką strukturę tworzy zbiór odwzorowań liniowych? Co to jest macierz odwzorowania liniowego i jaki jest związek między przestrzeniami odwzorowań liniowych oraz przestrzeniami macierzy?
15. Przestrzenie euklidesowe. Co to jest iloczyn skalarny? Podać przykłady. Jak można reprezentować iloczyn skalarny za pomocą macierzy? Wykazać nierówność Schwarzera.
16. Przestrzenie euklidesowe, a przestrzenie unormowane i przestrzenie metryczne. Co to jest przestrzeń unormowana i metryczna. Jaki jest związek między tymi typami przestrzeni? Jak określona jest norma oraz metryka w przestrzeni euklidesowej? Kiedy przestrzeń unormowana jest przestrzenią euklidesową?
17. Ortogonalność. Jak definiujemy kąt między wektorami przestrzeni euklidesowej? Kiedy wektory są ortogonalne? Wykazać twierdzenie Pitagorasa. Co to jest i jaką własność posiada układ ortogonalny wektorów? Omówić procedurę ortogonalizacji Grama-Schmidta.