„Absolwent informatyki lub matematyki specjalistą na rynku pracy”
Projekt nr POKL.04.01.02-00-017/09-00
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Program Operacyjny Kapitał Ludzki, Priorytet IV, Działanie 4.1, Poddziałanie 4.1.2 Zwiększenie liczby absolwentów kierunków o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy

Podstawy rachunku prawdopodobieństwa

I rok matematyki

Lista nr 1

Kombinatoryka

Permutacją n–elementową **bez powtórzeń** nazywamy **ciąg** n rozróżnialnych elementów.
Ilość n–elementowych permutacji wyraża się wzorem $P_n = n!$

Permutacją n–elementową **z powtórzeniami** $k_1, k_2, ..., k_r$ nazywamy **ciąg** n elementów, wśród których pewne elementy powtarzają się $k_1, k_2, ..., k_r$ –krotnie.
Ilość n–elementowych permutacji z powtórzeniami wyraża się wzorem $P_n^{k_1,k_2,...,k_r} = \dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_r!}$

Kombinacją k–elementową z n–elementów **bez powtórzeń** nazywamy k–elementowy **podzbiór** zbioru n–elementowego.
Ilość k–elementowych kombinacji z n elementów wyraża się wzorem $C_n^k = \binom{n}{k}$

Kombinacją k–elementową z n–elementów **z powtórzeniami** nazywamy k–elementowy **podzbiór** zbioru n–elementowego z powtórzeniami.
Ilość k–elementowych kombinacji z n elementów z powtórzeniami dana jest wzorem $\widetilde{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$

Wariacją k–elementową z n–elementów **bez powtórzeń** nazywamy k–elementowy **ciąg** ze zbioru n–elementowego, w którym elementy nie mogą się powtarzać.
Ilość k–elementowych wariacji z n elementów wyraża się wzorem

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$$

Wariacją k–elementową z n–elementów **z powtórzeniami** nazywamy k–elementowy **ciąg** ze zbioru n–elementowego, w którym elementy mogą się powtarzać.
Ilość k–elementowych wariacji z n elementów z powtórzeniami wyraża się wzorem $\widetilde{V}_n^k = n^k$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Program Operacyjny Kapitał Ludzki, Priorytet IV, Działanie 4.1, Poddziałanie 4.1.2 Zwiększenie liczby absolwentów kierunków o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy

1. Oblicz: a) $5!$ b) $4!+5!$ c) $100!+101!$ d) $\frac{6!}{4!}$ e) $\frac{28!}{25!}$

2. Oblicz: a) $\binom{4}{2}$ b) $\binom{10}{3}$ c) $\binom{n}{1}$ d) $\binom{n}{2}$

3. Udowodnij, że dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$ takich, że $n \geqslant k$ zachodzą następujące wzory:
   a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
   b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$, dla $k \geqslant 1$
   c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
   d) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0$

4. Na ile sposobów może ubrać się kobieta, która ma 3 suknie, 4 pary butów i 5 kapeluszy?

5. Do windy w 8 piętrowym wieżowcu wsiadły 3 osoby. Na ile różnych sposobów mogły one wysiąść, jeżeli każda z nich wysiada na:
   a) dowolnym piętrze,
   b) innym piętrze,
   c) wszyscy wysiądą na tym samym piętrze

6. W turnieju, w którym uczestniczy 20 graczy, każdy z nich gra po jednej partii z innym. Ile partii rozegrano?

7. Dzieci łączą się w pary. Ile dzieci wzięło udział w zabawie, jeżeli wiadomo, iż mogły się one połączyć na 210 sposobów.

8. Ile można wykonać chorągwi mającej trzy pasy kolorów z 4 barw?

9. Dane jest 7 gatunków cukierków czekoladowych, z których wybieramy 4 rodzaje. Ile różnych paczek można w ten sposób otrzymać?

10. Rok liczy 365 dni. Ile jest wszystkich możliwości aby 5 osób urodziło się każda innego dnia?

11. Grupę składającą się z 25 osób podzielono na dwie podgrupy po 13 i 12 osób. Ile jest wszystkich możliwych podziałów?

12. Grupę 6 osobową podzielono na dwie równoliczne podgrupy. Ile jest wszystkich możliwych podziałów?
13. W biegu na 100 metrów startuje 6 zawodników. Ile jest możliwych wyników ukończenia biegu, jeżeli punktowane są 3 pierwsze miejsca i nie uwzględniamy wyników ex aequo.
14. W przedsiębiorstwie do obsady są 3 stanowiska i 5 kandydatów. Ile jest możliwości obsady tych stanowisk?
15. Ile jest wszystkich możliwości losowań w Lotto (Duży Lotek)?
16. Ile jest wszystkich możliwych rozdań w brydżu?
17. Losujemy dwie karty z 52. Na ile sposobów można wylosować:
    a) damę kier? b) dokładnie jedną damę? c) co najmniej jedną damę?
18. Na płaszczyźnie danych jest n niewspółliniowych punktów. Ile różnych prostych można poprowadzić przez te punkty?
19. Na ile różnych sposobów można usadzić 8 osób przy stole:
    a) okrągłym b) kwadratowym?
20. Ile słów z sensem lub bez można utworzyć z liter tworzących to słowo:
    a) abrakadabra b) panna ?
21. Ile różnych liczb czterocyfrowych parzystych można utworzyć ze wszystkich cyfr, jeżeli:
    a) cyfry mogą się powtarzać b) cyfry nie mogą się powtarzać
22. Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych podzielnych przez:
    a) 4 b) 5 c) 25 d) 3 e) 17
23. Dany jest zbiór $A = \{1, 2, 3, ..., 2010\}$. Ile jest liczb w zbiorze A podzielnych przez:
    a) 4 b) 4 lub 6 c) 4 lub 6 lub 10
24. Ile jest wszystkich numerów telefonicznych 9–cyfrowych?
25. Ile jest wszystkich rejestracji samochodowych, w których są trzy litery i cztery cyfry? Zakładamy, że używa się 24 podstawowych liter alfabetu.
26. Ile jest rozmieszczeń k kul w n komórkach, jeżeli:
    a) kule i komórki są rozróżnialne b) kule są nierozróżnialne, a komórki rozróżnialne
    c) w każdej komórce jest co najwyżej jedna kula i zachodzi a) d) wszystkie komórki są zajęte i zachodzi a)

27. Uzasadnić, że współczynniki we wzorze dwumianowym Newtona $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ dla kolejnych n tworzą trójkąt Pascala.

28. Obliczyć:

$$a)\ (2x-3y)^4, \quad b)\ (x-2y)^4, \quad c)\ (1/2-2x)^6, \quad d)\ \text{współczynnik przy } x^4 \text{ w } (3+2x^2)^9.$$

29. Obliczyć: a) $(x+y+z)^3$, b) $(x-y+z+2)^2$, c) $(x-2y+z)^3$.

30. Liczba kombinacji z n elementów po 3 jest 5 razy mniejsza niż liczba kombinacji z $n+2$ elementów po 4. Wyznacz n.

31. Znaleźć środkowy wyraz rozwinięcia dwumianu $\left(\frac{a}{x} - \sqrt{x}\right)^{16}$

32. Który wyraz rozwinięcia dwumianu $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$ jest równy a^7?

33. Znaleźć trzynasty wyraz rozwinięcia dwumianu $\left(9x - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^m$, jeżeli współczynnik dwumianowy trzeciego wyrazu wynosi 105.

34. Iloma sposobami można ustawić osiem nierozróżnialnych wież na szachownicy 8 na 8 tak, aby żadne dwie wieże nie atakowały się wzajemnie?

35. Trzech panów i cztery panie mają zamiar udać się na wycieczkę w szyku zwanym popularnie "‘gęsiego"’. Iloma sposobami mogą się ustawić, jeżeli panowie mają sąsiadować z paniami?