„Absolwent informatyki lub matematyki specjalistą na rynku pracy”
Projekt nr POKL.04.01.02-00-017/09-00
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Program Operacyjny Kapitał Ludzki, Priorytet IV, Działanie 4.1, Poddziałanie 4.1.2

Podstawy rachunku prawdopodobieństwa

I rok matematyki

Lista nr 2

Prawdopodobieństwo klasyczne

Zdarzeniem elementarnym nazywamy każdy możliwy wynik doświadczenia losowego.
Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych oznaczamy przez Ω.

Dalej zakładamy, że Ω jest zbiorem skończonym.

Zdarzeniem (losowym) nazywamy dowolny podzbiór zbioru Ω.

Zdarzeniem pewnym nazywamy zbiór Ω. **Zdarzeniem niemożliwym** nazywamy zbiór pusty $\emptyset$.

Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A nazywamy zdarzenie $A' = \Omega \setminus A$.

Prawa de Morgana: $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$
Prawdopodobieństwem (klasycznym) zdarzenia A nazywamy stosunek ilości zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A do ilości wszystkich zdarzeń elementarnych:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

Zdarzenia A, B nazywamy **niezależnymi** wtedy i tylko wtedy gdy $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Dla dowolnych zdarzeń $A, B \in \Omega$ zachodzą następujące wzory (zasada włączeń–wyłączeń)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Zdarzenia $A_1, A_2, ..., A_n$ nazywamy **parami niezależnymi**, gdy zachodzi

$$\forall_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n}\ P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

Zdarzenia $A_1, A_2, ..., A_n$ nazywamy **niezależnymi zespołowo**, gdy zachodzi

$$\forall_{1 \leqslant k \leqslant n}\ \forall_{1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_k \leqslant n}\ P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot ... \cdot P(A_{i_k})$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1. Rzucamy sześcienną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wynik będzie liczbą parzystą? Jakie jest prawdopodobieństwo, że wynik będzie liczbą pierwszą? Opisz sumę i część wspólną tych zdarzeń oraz oblicz ich prawdopodobieństwa.

2. Rzucamy dwiema monetami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że:
   a) na pierwszej monecie wypadnie reszka?
   b) orzeł wypadnie co najmniej jeden raz?
   c) opisz zdarzenia przeciwne do powyższych zdarzeń,

3. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
   a) suma wyrzuconych oczek jest liczbą parzystą,
   b) suma wyrzuconych oczek jest większa od 7,
   c) wartość bezwzględna różnicy wyrzuconych oczek jest mniejsza od 4,

4. Rzucamy trzema monetami. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
   a) orzeł wypadnie dokładnie dwa razy,
   b) orzeł nie pojawi się na żadnej monecie,

5. Rzucamy n (rozróżnialnych) monet. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych i oblicz prawdopodobieństwo, że reszka wypadnie dokładnie jeden raz.

6. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losując 2 karty z talii 52 kart otrzymamy:
   a) asa pik,
   b) damę,
   c) dowolnego kiera,

7. Losujemy trzy karty z talii 24 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo, że nie będzie wśród nich karty wyższej niż dama?

8. Jakie jest prawdopodobieństwo, że brydżysta otrzyma:
   a) damę pik i asa trefl,
   b) 5 kierów,
   c) 12 kart tego samego koloru,

9. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kwadrat losowo wybranej liczby ze zbioru $X = \{1, 2, ..., 2010\}$ kończy się cyfrą 1.

10. Ze zbioru liczb od 1 do 10 wybieramy kolejno dwie (bez zwracania) i od pierwszej odejmujemy drugą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ich różnica będzie większa od 2.

11. Ze zbioru $X = \{1, \ldots, n\}, (n \geqslant 2)$, losujemy kolejno dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pierwsza z wylosowanych liczb jest większa od drugiej.

12. Ze zbioru $X = \{1, 2, ..., n\}$, $n \geqslant 3$ losujemy bez powtórzeń trzy liczby i ustawiamy w ciąg. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ten ciąg jest rosnący.

13. W urnie znajduje się 5 kul białych, 2 czarne i 5 niebieskich. Losujemy dwie kule. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kul różnokolorowych?

14. Mamy dwie urny. W pierwszej znajduje się 6 kul białych i 9 czarnych, a w drugiej 10 białych i 5 czarnych. Losujemy kulę z pierwszej urny. Jeżeli będzie ona biała, to losujemy drugą kulę także z pierwszej urny, a jeżeli czarna, to losujemy z drugiej urny. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:
a) kul różnokolorowych, b) dwóch kul białych,

15. Zbadaj, czy zdarzenia A, B są niezależne, gdy:
a) A - zdarzenie polegające na wyrzuceniu jednego orła w rzucie dwiema monetami,
B - zdarzenie polegające na wyrzuceniu jednej reszki w rzucie dwiema monetami,
b) A - zdarzenie polegające na wyrzuceniu liczby parzystej w rzucie kostką,
B - zdarzenie polegające na wyrzuceniu parzystej sumy oczek w rzucie kostką,

16. Oblicz, czy jednakowe jest prawdopodobieństwo wygrania w loterii zawierającej n biletów, spośród których 1 wygrywa i w loterii zawierającej $2n$ biletów, spośród których 2 wygrywają, przy zakupie
a) jednego losu, b) dwóch losów,

17. Dziecko bawi się literkami $A, A, A, E, K, M, M, T, T, Y$. Oblicz prawdopodobieństwo, że przypadkowo złoży ono słowo $MATEMATYKA$.

18. Sześcian wykonany z jasnego drewna pomalowano na czarno. Następnie pocięto go 6 płaszczyznami równoległymi do ścian sześcianu na 27 małych sześcianów. Z powstałego zbioru losujemy jeden mały sześcian. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
a) ma on wszystkie ściany jasne, b) ma on dwie ściany czarne, c) ma on jedną ścianę czarną,

19. Oblicz prawdopodobieństwo, że w losowaniu Lotto (Duży Lotek) nie pojawi się liczba 12.

20. Oblicz prawdopodobieństwo, że w losowaniu Lotto (Duży Lotek):
a) wszystkie wylosowane liczby będą parzyste, b) wszystkie wylosowane liczby będą mniejsze od 30,

21. Wśród 20 rowerów w wypożyczalni są trzy uszkodzone. Losujemy dwa rowery. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy
a) oba dobre, b) dokładnie jeden uszkodzony

22. Wśród 40 osób 5 włada tylko językiem angielskim, 20 – tylko językami angielskim i francuskim oraz 10 tylko językiem rosyjskim. Wybieramy losowo jedną osobę. Oblicz prawdopodobieństwo, że włada ona:
a) językiem angielskim lub francuskim, b) językiem francuskim lub rosyjskim,
c) językiem angielskim, d) żadnym językiem,

23. W szafie jest 10 par butów. Losujemy 4 buty. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy co najmniej jedną parę.

24. Rozważyć zadania 4, 5, 11, 12, 16 dla $n \to +\infty$.

25. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana liczba naturalna jest podzielna przez:
a) 3, b) 10, c) 4 lub 6, d) 4 i 6 e) 2, 3 i 8.

26. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana liczba naturalna jest podzielna przez 4 i niepodzielna przez 10.

27. Wielokąt wypukły ma n kątów. Losujemy dwa jego wierzchołki. Oblicz prawdopodobieństwo, że odcinek je łączący nie jest bokiem tego wielokąta.

28. Rzucamy monetą do momentu wyrzucenia dwóch orłów pod rząd. Oblicz prawdopodobieństwo, że liczba rzutów nie przekroczy 4.

29. Rzucamy dwiema kostkami. Zbadać niezależność zespołową zdarzeń A, B, C, gdy A polega na wyrzuceniu parzystej liczby oczek na pierwszej kostce, B polega na wyrzuceniu nieparzystej liczby oczek na drugiej kostce, C polega na wyrzuceniu nieparzystej sumy oczek na obu kostkach.

30. Rzucamy czworościanem foremnym, którego kolejne ściany są pomalowane na: biało, czarno, czerwono. Czwarta ściana jest pomalowana trzema powyższymi kolorami. Zbadaj niezależność parami i zespołową zdarzeń A, B, C, gdy A polega na wyrzuceniu ściany z kolorem białym, B polega na wyrzuceniu ściany z kolorem czarnym, C polega na wyrzuceniu ściany z kolorem czerwonym.

31. Mamy k-cząstek, z których każda może znaleźć się w każdej z $n \geqslant k$ komórek. Znaleźć prawdopodobieństwo zdarzeń: A - w ustalonych k komórkach będzie po jednej cząstce, B - w jakichkolwiek k komórkach będzie po jednej cząstce. Rozważyć następujące modele:
a) Model Maxwella-Boltzmanna - komórki i cząstki sa rozróżnialne; b) Model Bosego-Einsteina - komórki są rozróżnialne, a cząstki nie; c) Model Fermiego-Diraca - komórki są rozróżnialne, cząstki nie oraz w każdej komórce może znajdować się conajwyżej jedna cząstka.