

Podstawy rachunku prawdopodobieństwa

I rok matematyki

Lista nr 3

Prawdopodobieństwo warunkowe, całkowite, wzór Bayesa

Niech $A, B \in \Omega$ oraz $P(B) > 0$. **Prawdopodobieństwem warunkowym** zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B nazywamy prawdopodobieństwo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Zauważmy, że jeżeli zdarzenia A, B są niezależne oraz $P(B) > 0$, to $P(A|B) = P(A)$.

Niech niepuste, rozłączne zbiory B_1, B_2, \dots, B_n tworzą rozbiecie przestrzeni Ω , czyli $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$. Załóżmy, że mamy dane $P(B_i)$ oraz $P(A|B_i)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, dla pewnego zdarzenia $A \subset \Omega$. Wtedy zachodzi tak zwane twierdzenie o **prawdopodobieństwie całkowitym** (a priori) zajścia zdarzenia A , tzn. $P(A)$ jest dane wzorem

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

Jeżeli zaszło zdarzenie A , możemy obliczyć prawdopodobieństwo (a posteriori), że spowodowała je przyczyna B_{i_0} , które podaje **wzór Bayesa**:

$$P(B_{i_0}|A) = \frac{P(A|B_{i_0}) \cdot P(B_{i_0})}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)}$$

1. Rzucamy trzema monetami. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyrzucimy dwa orły pod warunkiem, że w pierwszym rzucie wypadł orzeł.
2. Losujemy kartę z talii 52 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy króla, jeżeli wiadomo, że wylosowano figurę?
3. W urnie jest 7 kul: 3 białe i 4 czarne. Losujemy jedną kulę i odkładamy ją. Następnie losujemy drugą kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, że będzie to kula czarna, jeżeli za pierwszym razem wylosowano kulę białą.
4. Losujemy liczbę naturalną. Oblicz prawdopodobieństwo, że będzie ona podzielna przez 6, jeżeli wiadomo, że jest podzielna przez 2.
5. Na pewnym kierunku studiów skład grup studenckich przedstawiał się następująco: I grupa 14 studentek i 11 studentów, II 12 studentek i 12 studentów, III 17 studentek i 5 studentów. Z listy zawierającej spis wszystkich osób studiujących na tym kierunku wylosowano jedną osobę.
 - a) oblicz prawdopodobieństwo, że będzie to studentka.
 - b) wylosowana osoba okazała się studentką. Obliczyć prawdopodobieństwo, że należy ona do grupy III.
6. Mamy 5 urn typu A i 7 urn typu B. W każdej z urn typu A jest po 7 kul białych, 3 czarnych i 5 niebieskich, a w każdej z urn typu B: 4 białe, 4 czarne i 7 niebieskich. Z losowo wybranej urny wzięto dwie kule. Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania kul różnokolorowych.
7. W pewnej fabryce maszyny typu A,B,C dają odpowiednio 25 %, 35 % i 40 % produkcji danego wyrobu. Maszyny te produkują odpowiednio 5 %, 4 % i 2 % braków.
 - Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania towaru dobrego
 - Wylosowano towar dobry. Obliczyć prawdopodobieństwo, że pochodzi on z maszyny B.
8. Do dyspozycji są armaty: I z 1 pociskiem oraz II z 2 pociskami. Do zniszczenia są dwa cele: A i B. Prawdopodobieństwo trafienia w cel A z armaty I wynosi $p_I(A) = 0,8$. Analogicznie $p_I(B) = 0,75$, $p_{II}(A) = 0,5$, $p_{II}(B) = 0,35$. W przypadku trafienia w cel prawdopodobieństwa jego zniszczenia są równe odpowiednio: $P_I(A) = 0,4$, $P_I(B) = 0,5$, $P_{II}(A) = 0,5$, $P_{II}(B) = 0,6$. Jak wykorzystać armaty, aby prawdopodobieństwo zniszczenia obu celów było największe? Obliczyć je.
9. Dane są dwie urny A i B. Urna A zawiera 17 kul białych, 3 czarne i 4 niebieskie, zaś urna B 10 białych, 5 czarnych i 15 niebieskich. Rzucamy kostką do gry, a następnie losujemy dwie kule z urny zgodnie z następującą regułą: *Jeśli w pierwszym rzucie wypadły jedno lub dwa oczka losujemy z urny A, a jeśli 3,4,5 to z urny B. Natomiast gdy wypadło sześć oczek, to rzucamy ponownie i dokonujemy losowania urny zgodnie z regułą podaną dla pierwszego rzutu kostką z tym, że w przypadku wyrzucenia 6 losujemy również z urny B.* Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul różnych kolorów.

10. Przy spryskiwaniu drzew owocowych pewnym środkiem ginie 70% gąsienic, a te, które przeżyją, uzyskują częściową odporność i przy drugim spryskaniu ginie ich tylko 20%. Oblicz prawdopodobieństwo, że gąsienica zginie przy pierwszym lub drugim spryskaniu drzewa.
11. Na płycie CD jest 20 piosenek. Nagranych jest tam po kolei: 10 piosenek Madonny, 5 piosenek Michaela Jacksona i 5 arii Marii Callas. Włączono losowo wybraną piosenkę i była to piosenka Michaela Jacksona. Jakie jest prawdopodobieństwo, że następna piosenka też jest Jacksona? Jak zmieni się to prawdopodobieństwo, jeżeli wiadomo, że poprzednia piosenka też jest M. Jacksona? A jeśli nie jest Jacksona?
12. W urnie jest b kul białych i c czarnych. $b + c = N$. Losujemy jedną kulę. Jeżeli będzie ona biała, dosypujemy do urny n kul białych, a jeśli czarna, dosypujemy k kul czarnych. Następnie losujemy drugą kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, że będzie ona biała. Oblicz prawdopodobieństwo, że będzie ona biała, jeżeli pierwsza wylosowana kula była czarna.
13. Wiadomo, że wśród kobiet 40% to blondynki a wśród mężczyzn 30% to blondyni. Wylosowano jedną osobę, która ma włosy koloru blond. Oblicz prawdopodobieństwo, że była to kobieta.
14. W pewnej grupie osób średnio jeden mężczyzna na stu mężczyzn jest daltonistą oraz dwie kobiety na tysiąc kobiet są daltonistkami. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana osoba nie będzie daltonistą. Jeżeli wylosowana osoba będzie daltonistą, to oblicz prawdopodobieństwo, że będzie to mężczyzna.
15. Obok pewnej stacji benzynowej przejeżdża trzy razy więcej samochodów osobowych niż ciężarowych. Prawdopodobieństwo, że samochód osobowy będzie tankował paliwo wynosi 0,02, dla ciężarowego wynosi 0,05. Oblicz prawdopodobieństwo, że przejeżdżający samochód będzie tankował paliwo.
Pewien samochód tankował paliwo. Oblicz prawdopodobieństwo, że był on ciężarowy.
16. Mamy 5 urn typu A_1 , zawierających po 4 kule białe i 6 czarnych oraz 7 urn typu A_2 , zawierających po 8 kul białych i 6 czarnych. Z losowo wybranej urny wybrano kulę, która okazała się biała. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pochodzi ona z urny typu A_1 ?
17. Wiadomo, że w trakcie n rzutów monetą przynajmniej raz wypadł orzeł. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że liczba orłów jest większa lub równa 2.
18. Rozważyc poprzednie zadanie dla $n \rightarrow +\infty$
19. Które ze zdarzeń jest bardziej prawdopodobne:
 - w 4 rzutach kostką wypadnie chociaż raz 6 oczek
 - w 24 rzutach dwoma kostkami chociaż raz wypadnie para (6,6).