„Absolwent informatyki lub matematyki specjalistą na rynku pracy”
Projekt nr POKL.04.01.02-00-017/09-00
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Program Operacyjny Kapitał Ludzki, Priorytet IV, Działanie 4.1, Poddziałanie 4.1.2

Podstawy rachunku prawdopodobieństwa

I rok matematyki

Lista nr 4

Aksjomaty prawdopodobieństwa i jego własności

Niech Ω będzie skończonym lub przeliczalnym zbiorem zdarzeń elementarnych.

Prawdopodobieństwem określonym na rodzinie wszystkich podzbiorów zbioru Ω nazywamy funkcję $P : 2^{\Omega} \to [0,1]$, spełniającą aksjomaty:

(A1) $\forall_{A\subseteq\Omega} \;\; P(A) \geqslant 0$

(A2) $P(\Omega) = 1$

(A3) $\forall_{i\neq j\in\mathbb{N}} \; A_i \cap A_j = \emptyset \implies P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$

Trójkę $(\Omega, 2^{\Omega}, P)$ nazywamy **przestrzenią probabilistyczną**.

Dla tak zdefiniowanego ogólnego modelu zdażenia niezależne oraz prawdopodobieństwo warunkowe definiujemy analogicznie jak w przypadku prawdopodobieństwa klasycznego.

Zdarzenia $A_1, A_2, ..., A_n \subset \Omega$ nazywamy **parami niezależnymi**, gdy zachodzi

$$\forall_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} \; P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\cdot P(A_j)$$

Zdarzenia $A_1, A_2, ..., A_n \subset \Omega$ nazywamy **niezależnymi zespołowo**, gdy zachodzi

$$\forall_{1\leqslant k\leqslant n} \, \forall_{1\leqslant i_1<i_2<...<i_k\leqslant n} \; P(A_{i_1}\cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\cdot ... \cdot P(A_{i_k})$$

Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B, gdzie Niech $P(B) > 0$, nazywamy prawdopodobieństwo

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Zauważmy, że jeżeli zdarzenia A, B są niezależne oraz $P(B) > 0$, to $P(A|B) = P(A)$.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1. Korzystając z aksjomatów prawdopodobieństwa udowodnij, że:
   a) $P(\emptyset) = 0$
   b) $\forall_{i \neq j = 1,\dots,n}\ A_i \cap A_j = \emptyset \Longrightarrow P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$
   c) $P(A') = 1 - P(A)$
   d) $A \subseteq B \Longrightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
   e) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   f) $A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B)$
   g) $P(A \cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$
   h) $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$

2. Niech zdarzenia A, B są niezależne. Udowodnić, że są niezależne następujące zdarzenia

   a) A, B'; b) A', B; c) $A, \emptyset$; d) A, Ω; e) A', B';
   f) $A, B \cup C$ jeśli $B \cap C = \emptyset$ oraz A i C są niezależne.

3. Niech $P(A|B) = P(A|B')$ oraz $P(B) > 0, P(B') > 0$. Udowodnić, że zdarzenia A, B są niezależne.

4. Dane są: $P(A') = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}, P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Oblicz $P(B'), P(A \cap B'), P(B \setminus A)$.

5. Dane są: $P(A \cup B) = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ oraz wiadomo, że $P(A \setminus B) = P(B \setminus A)$. Oblicz $P(A), P(B \setminus A)$.

6. Dane są $P(A) = 0,25,\ P(A \cup B) = 0,75$. Wiedząc, że A, B są niezależne oblicz prawdopodobieństwa $P(B|A)$ oraz $P(A \setminus B)$.

7. Wykaż, że jeśli $P(A) = a, P(B) = b$, gdzie $b \neq 0$, to $P(A \mid B) \geqslant 1 - \frac{1-a}{b}$.

8. Zbadaj, dla jakich zdarzeń A, B spełniony jest warunek $P(A) = \frac{1}{2}(P(A \mid B) + P(A \mid B'))$.

9. Udowodnij, że jeżeli $A \cap B \subseteq C$, to $P(A) + P(B) - P(C) \leqslant 1$.

10. Dane są prawdopodobieństwa $p_1 = P(A)$ i $p_2 = P(A' \cap B)$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia $A' \cap B'$, jeżeli zdarzenia A i B są niezależne.

11. W pewnym zbiorze Ω dane są zdarzenia A, B o własnościach: $P(A \cap B) = \frac{1}{4}, P(A') = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{2}$. Oblicz $P(A \cup B)$.

12. W pewnym zbiorze Ω dane są zdarzenia A, B takie, że $P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{2}$. Czy A i B mogą się wykluczać? Ile co najmniej wynosi $P(A \cap B)$?

13. Udowodnić, że jeżeli $P(A) + P(B) > 1$, to $A \cap B \neq \emptyset$.

14. Niech $A, B, C \subseteq \Omega$ będą zdarzeniami takimi, że $A \cup B \cup C = \Omega$, $P(B) = 2P(A)$, $P(C) = 3P(A)$ oraz $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C)$. Udowodnij, że $\dfrac{1}{6} \leqslant P(A) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

15. Wykazać, że jeżeli w pewnej przestrzeni probabilistycznej zdarzenia A_1, A_2, A_3 są parami niezależne oraz zdarzenie A_1 nie zależy od iloczynu zdarzeń A_2, A_3, to nie zależy ono także od ich sumy.

16. Udowodnij, że jeżeli $A, B \in \Omega$, $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,6$, to $P(A|B) \geqslant \frac{2}{3}$.

17. Udowodnij, że $\forall_{A,B \subseteq \Omega} \;\; P(A) = 1 - P(A' \cap B) - P((A \cup B)')$

18. Niech $P(A) = x$ i $P(B) = x^2$. Wiadomo, że oba zdarzenia się wykluczają, ale jedno z nich musi zajść. Ile wynosi x?

19. Udowodnij, że jeżeli $P(B) > 0$, to $P(A|B) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$

20. Wykazać, że jeżeli $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) > 0$ to zachodzi (a w szczególności ma sens) następujący wzór, zwany *wzorem łańcuchowym*:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdot ... \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$$

21. Wykazać, że jeżeli zbiory $B_1, B_2, ..., B_n$ stanowią rozbicie przestrzeni Ω na zdarzenia o dodatnim prawdopodobiestwie, to dla dowolnego zdarzenia A zachodzi wzór na *prawdopodobieństwo całkowite*:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i).$$

22. Udowdnić, że jeżeli przy założeniach z powyższego zadania $P(A) > 0$, to dla dowlnego $i_0 = 1, ..., n$ zachodzi *wzór Bayesa*:

$$P(B_{i_0}|A) = \frac{P(A|B_{i_0}) \cdot P(B_{i_0})}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)}.$$

23. W urnie jest n kul białych i 3 czarne. Jakie powinno być n, aby prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych było większe od 0,5?

24. Z urny, w której jest n kul ponumerowanych od 1 do n, losujemy dwie kule bez zwracania. Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch takich kul, że wartość bezwzględna różnicy ich numerów wynosi 3, jest równe $\frac{14}{9n}$. Oblicz ilość kul w urnie.

25. W urnie jest n kul białych i 6 zielonych. Wyznacz n tak, by przy losowaniu z tej urny dwóch kul bez zwracania prawdopodobieństwo wylosowania obu kul zielonych było większe od $\frac{4}{15}$.

26. (Problem 4 kłamców) Spośród czterech ludzi (A,B,C, D) pierwszy (A) otrzymał informację, którą przekazuje drugiemu (B) w postaci sygnału ”tak” lub ”nie”. Drugi w ten sam sposób przekazuje ją trzeciemu (C), trzeci czwartemu (D) i czwarty podaje tę informację. Wiadomo, że każdy z nich mówi prawdę tylko w jednym przypadku na trzy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwszy z tych kłamców powiedział prawdę, jeżeli czwarty powiedział prawdę?