„Absolwent informatyki lub matematyki specjalistą na rynku pracy"
Projekt nr POKL.04.01.02-00-017/09-00
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Program Operacyjny Kapitał Ludzki, Priorytet IV, Działanie 4.1, Poddziałanie 4.1.2

Podstawy rachunku prawdopodobieństwa

I rok matematyki

Lista nr 5

Zagadnienia związane ze schematem Bernoulliego

Próbą Bernoulliego nazywamy doświadczenie losowe, w którym otrzymujemy jeden z dwóch możliwych wyników. Umownie jeden z tych wyników nazywamy **sukcesem** a drugi **porażką**. Jeśli prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p, to prawdopodobienstwo porażki wynosi $q = 1 - p$.

Schematem Bernoulliego nazywamy ciąg niezależnych prób Bernoulliego z ustalonym prawdopodobieństem sukcesu w jednej próbie wynoszącym p. Prawdopodobieństwo uzyskania dokładnie k sukcesów w n próbach wynosi

$$B_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

Najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego nazywamy ten wskaźnik k_0, dla którego $P_n(k_0)$ jest niemniejsze od pozostałych prawdopodobieństw. Wskaźnik ten spełnia nierówność

$$(n+1)p - 1 \leqslant k_0 \leqslant (n+1)p.$$

Zagadnienie Pascala polega na obliczeniu prawdopodobieństwa, że liczba doświadczeń w schemacie Bernoulliego będzie równa n, jeśli założymy, że próby przeprowadzamy tak długo, aż otrzymamy k sukcesów. Dla ustalonego k i n, $k \leqslant n$, prawdopodobieństwo to wynosi

$$P_n(k)\binom{n-1}{k-1} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

Zadanie o ruinie gracza polega na obliczeniu prawdopodobieństwa ruiny gracza A. Przy czym w grze bierze udział dwóch graczy A i B posiadających kapitały początkowe odpowiednio a zł i b zł ($N = a+b$). W pojedynczej kolejce gracz A wygrywa 1 zł (zabiera 1 zł graczowi B) z prawdopodobieństwem p $(0 < p < 1)$ lub przegrywa 1 zł (oddaje 1 zł graczowi B). Szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$R_a = \begin{cases} \frac{b}{a+b}, & \text{gdy } p = \frac{1}{2}, \\ \frac{(q/p)^a - (q/p)^N}{1-(q/p)^N}, & \text{gdy } p \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1. Uzasadnić wzór na prawodopodobieństwo uzyskania dokładnie k sukcesów w n próbach Bernoulliego.

2. W urnie mamy N kul, wśród których M jest białych $N-M$ czarnych. Losujemy n razy po jednej kuli, zwracajac ją za każdym razem. Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania k kul białych.

3. Pewna gra polega na rzucie kostką i monetą. Wygrana występuje przy łącznym otrzymaniu piątki i orła. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w trzech grach wygrana nastąpi dokładnie jeden raz?

4. Co jest bardziej prawdopodobne u zawodnika rozgrywającego partię z przeciwnikiem o równej mu sile gry:
   a) wygranie 3 partii z 4, czy 5 z 8?
   b) wygranie nie mniej niż 3 partii z 4, czy nie mniej niż 5 partii z 8?
   c) wygranie nie więcej niż n z $2n$ partii, czy więcej niż n w tejże liczbie partii”?
   d) wygranie nie więcej niż n z $2n+1$ partii, czy więcej niż n w tejże liczbie partii”?

5. Obliczyć prawdopodobieństwo, że na 7 rzutów kostką co najwyżej 3 razy wypadnie liczba oczek nie mniejsza niż 4.

6. Rzucamy cztery razy dwiema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najwyżej trzy razy otrzymamy sumę oczek nie większą od trzech?

7. Uzasadnić, że najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego, z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym p, spełnia nierówność

   $$(n+1)p-1 \leqslant k_0 \leqslant (n+1)p.$$

   Obliczyć $B_5(k)$, $k=0,1,...,5$ dla $p=0,2$ oraz dla $p=0,5$.

8. Wyznaczyć takie prawdopodobieństwo sukcesu p w pojedynczej próbie, aby prawdopodobieństwo dokładnie k sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego było jak największe.

9. Mamy 4 urny typu A_1 zawierające 2 białe i 8 czarnych kul oraz 6 urn typu A_2 o zawartości 3 kul białych i 7 czarnych. Losujemy 4 razy po jednej kuli ze zwracaniem. Obliczyć najbardziej prawdopodobną liczbę kul białych i prawdopodobieństwo otrzymania tej liczby kul.

10. Rzucono 77 razy kostką do gry. Jaka jest najbardziej prawdopodobna ilość wyrzuconych piątek?

11. Działo nr 1 w ciągu określonego czasu wyrzuca 70 pocisków z prawdopodobieństwem trafienia do celu równym $0,8$, a działo nr 2 w ciągu tego samego czasu wyrzuca 60 pocisków z prawdopodobieństwem trafienia do celu równym $0,9$. Dla którego z tych dział najbardziej prawdopodobna ilość celnych strzałów jest większa?

12. Uzasadnić, że w zagadnieniu Pascala prawdopodobieństwo, że liczba doświadczeń będzie równa n wyraża się wzorem $\binom{n-1}{k-1} \cdot p^k(1-p)^{n-k}$.

13. Gracz wykonuje rzuty monetą tak długo, aż otrzyma orła. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia polegajacego na tym, że liczba rzutów nie przekroczy czterech.

14. Trzy fabryki A, B, C produkują towar sztukowy tak, że Fabryka A pokrywa 30% zapotrzebowania rynku, fabryka B – 50% oraz fabryka C – 20%. Jakość towaru produkowanego przez poszczególne fabryki kształtuje się następująco:
w fabryce A: 80% I gatunku, 18% II gatunku, 2% braków
w fabryce B: 40% I gatunku, 55% II gatunku, 5% braków
w fabryce A: 80% I gatunku, 15% II gatunku, 5% braków
Kupujemy na rynku w sposób losowy po jednej sztuce tak długo, aż otrzymamy dwie sztuki I gatunku. Obliczyć prawdopodobieństwo, że zostanie zakupionych 5 sztuk.

15. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym p.

16. Wyprowadzić wzór na prawdopodobieństwo ruiny gracza A w zadaniu o ruinie gracza.

17. Jakie jest prawdopobieństwo, że w zadaniu o ruinie gracza gra zakończy się w skończonym czasie (ruiną któregokolwiek z graczy).

18. Adam przeznaczył na grę w kasynie 500 zł. Ponieważ jest ostrożny będzie stawiał po złotówce na czerwone-czarne. Pójdzie do domu, gdy będzie miał 550 zł, chyba że wcześniej przegra wszystko. Jakie ma szanse wygranej
a) w niespotykanej w kasynach gry sprawiedliwej, tj. gdy szansa wygranej wynosi 1/2,
b) grając w ruletkę amerykańską, gdzie szansa wygranej wynosi 18/38?

19. Rozważyć powyższe zadanie, gdy Adam ma nieograniczony kapitał i gra do chwili, w której wygra b zł.

20. Pijak (i to pijany) znajduje się 3 kroki od przepaści. Szansa wykonania kroku w kierunku przepaści wynosi 1/3, w przeciwnym – 2/3. Jaka jest szansa ocalenia? (Zakładamy, że pijak spada, gdy znajdzie się na krawędzi przepaści)

21. Gracz ma 20 zł, a na powrót do domu potrzebuje 40 zł. W związku z tym rozważa dwie taktyki:
a) stawianie po złotówce na czerowone-czarne aż do chwili, gdy uciuła 40 zł;
b) postawienie całej sumy na czerwone-czarne
Która taktyka daje większe prawdopodobieństwo sukcesu? (Zakładamy, że mamy tu do czynienia z ruletką amerykańską, gdzie szansa wygranej w pojedynczej kolejce wynosi 18/38)