„Absolwent informatyki lub matematyki specjalistą na rynku pracy"
Projekt nr POKL.04.01.02-00-017/09-00
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Program Operacyjny Kapitał Ludzki, Priorytet IV, Działanie 4.1, Poddziałanie 4.1.2

Podstawy rachunku prawdopodobieństwa

I rok matematyki

Lista nr 6

Zmienne losowe skokowe jednowymiarowe, rozkład Bernoulliego

Niech Ω będzie skończonym lub przeliczalnym zbiorem zdarzeń elementarnych.

Zmienną losową (skokową, jednowymiarową) X nazywamy funkcję rzeczywistą określoną na zbiorze Ω, tzn. funkcję $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Rozkładem zmiennej losowej X nazywamy prawdopodobieństwo P_X określone na podzbiorach zbioru wartości zmiennej X wzorem

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A)), \qquad A \subset X(\Omega),$$

co pozwala przypisywać prawdopodobieństwa wartościom zmiennej losowej X, odpowiadających zdarzeniom losowym.

W przypadku, gdy zmienna losowa X przyjmuje skończoną ilość wartości $x_1 < x_2 < ... < x_n$, jej rozkład jest jednoznacznie opisany za pomocą tabeli:

x_i	x_1	x_2	...	x_n	$\sum$
p_i	p_1	p_2	...	p_n	1

gdzie $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, ..., n$.

Dystrybuantą zmiennej losowej X nazywamy funkcję $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ określoną wzorem:

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

Własności dystrybuanty:

1) F jest niemalejąca,
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$,
4) F jest prawostronnie ciągła,

Mówimy, że zmienna losowa X ma **rozkład Bernoulliego** jeśli istnieje $p \in [0, 1]$ oraz $n \in \mathbb{N}$ takie, że

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k(1-p)^{n-k}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
Program Operacyjny Kapitał Ludzki, Priorytet IV, Działanie 4.1, Poddziałanie 4.1.2

1. Rzucamy trzema symetrycznymi monetami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych orłów. Podać rozkład tej zmiennej losowej.

2. Rzucamy kostką i symetryczną monetą, na której znajdują się liczby -1,1. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe sumie liczby wypadłej na monecie i liczby wyrzuconych oczek. Podać rozkład tej zmiennej losowej.

3. Rzucamy dwiema kostkami. Podać rozkład zmiennej losowej, która jest:
   a) sumą liczby wyrzuconych oczek,
   b) różnicą liczby oczek wyrzuconych na pierwszej kostce i liczby oczek na drugiej kostce,
   c) iloczynem liczby wyrzuconych oczek,

4. Dane są 4 rozróżnialne urny i 3 kule. Rozmieszczamy kule w urnach. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości pustych urn. Podać rozkład zmiennej losowej. Czy zależy on od rozróżnialności kul?

5. Z talii 52 kart losujemy trzy karty. Zmienną losową X jest ilość wylosowanych asów. Podaj rozkład X.

6. Na trasie autobusu znajdują się 4 sygnalizatory, z których każdy niezależnie i z prawdopodobieństwem $0 < p < 1$ przepuszcza lub z prawdopodobieństwem $1-p$ zatrzymuje autobus. Znaleźć rozkład liczby sygnalizatorów, które minął autobus przed pierwszym zatrzymaniem się.

7. Pewna gra polega na rzucie 3 monetami i otrzymaniu wygranej w wysokości 10 zł w przypadku wyrzucenia trzech reszek oraz przegraniu 2 zł w pozostałych przypadkach. Podaj rozkład zmiennej losowej, opisującej wygraną. Czy gra jest sprawiedliwa?

8. W wypożyczalni jest 20 rowerów, z tego 3 uszkodzone. Grupa 4 turystów losowo wybiera sobie rowery. Podaj rozkład zmiennej X, która jest ilością wybranych rowerów uszkodzonych.

9. Dany jest rozkład zmiennej losowej X:

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,3	0,1	0,2	a

   a) wyznacz stałą a,
   b) oblicz prawdopodobieństwo $P(X > 0)$,
   c) wyznacz dystrybuantę tego rozkładu.

10. W rozkładzie zmiennej losowej X:

x_i	-2	0	2	4	7
p_i	0,05	0,2	$2a$	0,25	$3a$

   a) wyznacz stałą a,
   b) oblicz prawdopodobieństwo $P(|X| > 1)$,
   c) wyznacz dystrybuantę tego rozkładu,

11. Łukasz zasadził pięć sadzonek. Prawdopodobieństwo, że sadzonka wzejdzie wynosi 0,8. Zakładając, że każda sadzonka rośnie niezależnie od pozostałych, podaj rozkład ilości sadzonek, które nie wzejdą.

12. Prawdopodobieństwo tego, że statystyczny student nie jest przygotowany do ćwiczeń wynosi 0,25. Wybieramy losowo 4 osoby. Znaleźć rozkład liczby osób nieprzygotowanych do ćwiczeń oraz obliczyć prawdopodobieństwo, że co najmniej 3 osoby są przygotowane.

13. Wiadomo, że 1% skrzynek pomarańczy psuje się w czasie transportu. Do kontroli wybrano losowo 3 skrzynki. Znajdź rozkład liczby skrzynek z zepsutymi owocami.

14. Znajdź rozkład zmiennej X, jeżeli wiadomo, że przyjmuje ona tylko trzy wartości: $-2, 0, 3$ oraz $P(X \geqslant -1) = 0,8, \quad P(X \geqslant 0) = 4P(X > 0)$.

15. Z pęku n kluczy wybierany jest jeden i pasowany do zamka. Klucz, który nie pasuje jest odkładany, a z pozostałych jest losowany kolejny klucz. Wartością zmiennej losowej X jest numer tej próby, w której klucz pasuje do zamka. Wiadomo, że tylko jeden klucz otwiera zamek. Wyznaczyć rozkład X.

16. Wiadomo, że 30% Polaków to blondyni. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród 5 wylosowanych osób wszystkie będą blondynami.

17. Rzucamy monetą 10 razy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że orzeł wypadnie co najmniej 8 razy?

18. Wyrazić za pomocą dystrybuanty następujące prawdopodobieństwa:
$P(X \leqslant b)$, $P(X \geqslant b)$, $P(X < b)$, $P(X > b)$, $P(a \leqslant X \leqslant b)$, $P(a < X \leqslant b)$,
$P(a \leqslant X < b)$, $P(a < X < b)$.

19. Wyznaczyć dystrybuanty rozkładów z zadań: 1-15.

20. Ze zbioru odcinków: jeden o długości 4 cm, dwa o długości 5 cm i trzy o długości 6 cm losujemy trzy odcinki i budujemy z nich trójkąt. Podaj rozkład zmiennej losowej, która jest obwodem wylosowanego trójkąta.

21. Spośród wierzchołków sześciokąta foremnego losujemy dwa i łączymy je odcinkiem. Długość tego odcinka jest zmienną losową. Podać jej rozkład.

22. Na egzamin przygotowano 45 pytań, z których zdający losuje 4. Za odpowiedź na wszystkie cztery pytania otrzymuje ocenę bardzo dobrą, za odp. na trzy pytania ocenę dobrą, za odp. na dwa pytania ocenę dostateczną, w pozostałych przypadkach ocenę niedostateczną. Podać rozkład zmiennej losowej, która jest oceną jeżeli zdający umie odpowiedzieć na $\frac{2}{3}$ pytań.

23. Dwóch strzelców strzela na przemian do celu. Strzelanie kończy się w momencie pierwszego trafienia celu. Prawdopodobieństwo trafienia dla pierwszego strzelca wynosi 0,4 a dla drugiego 0,7. Podaj rozkład zmiennej, która jest ilością wystrzelonych naboi.