

Rachunek prawdopodobieństwa II

Zagadnienia na egzamin 20.06.2012

1. Niezależne zmienne losowe i niezależne σ -ciała: charakteryzacje niezależności, twierdzenie o niezależnych π -układach, niezależność funkcji od niezależnych zmiennych losowych.
2. Konstrukcja niezależnych zmiennych losowych – produktowe przestrzenie probabilistyczne: definicja i dowód jednoznaczności produktowego rozkładu prawdopodobieństwa, przykłady przestrzeni produktowych, twierdzenie Fubinięgo.
3. Wielowymiarowe zmienne losowe: definicja i charakteryzacja wektora losowego (z dowodem), “funkcje od” oraz rozkład wektora losowego, rozkłady wielowymiarowe
4. Związek rozkładu wielowymiarowego z jego rozkładami brzegowymi: rozkład dyskretny i jego charakteryzacja w terminach rozkładów brzegowych (z dowodem), ciągłość rozkładu wielowymiarowego vs ciągłość jego rozkładów brzegowych (dowód + przykład)
5. Dystrybuanta rozkładu wielowymiarowego: definicja i własności charakteryzujące dystrybuantę (z dowodem).
6. Parametry rozkładów wielowymiarowych: wartość oczekiwana, macierz kowariancji i własności ją charakteryzujące (z dowodem), wzór na wariancję sumy zmiennych losowych (z dowodem)
7. Niezależność zmiennych losowych (revisited): charakteryzacja niezależności w terminach rozkładów produktowych (z dowodem), charakteryzacja niezależności zmiennych losowych o rozkładach ciągłych (z dowodem), niezależność funkcji od niezależnych zmiennych losowych, multiplikatywność wartości oczekiwanej niezależnych zmiennych losowych (z dowodem).
8. Sumy niezależnych zmiennych losowych: opis rozkładu sumy zmiennych losowych odpowiednio o rozkładach dyskretnych oraz o rozkładach ciągłych (z dowodami), pojęcie splotu funkcji, splot rozkładów normalnych oraz rozkładów jednostajnych.
9. Wielowymiarowy rozkład normalny: definicja standardowego rozkładu normalnego, pojęcie typu rozkładu, wzór na gęstość funkcji afinicznej od wektora losowego o rozkładzie ciągłym (z dowodem), definicja (ogólnego) rozkładu normalnego i wzór wyrażający jego gęstość
10. Sumy niezależnych zmiennych losowych (revisited): zdarzenia ogonowe (przykłady), prawo zerowej jedynkowej Kołmogorowa (z dowodem), lemat Borela-Cantellego (z dowodem)
11. Prawa wielkich liczb: słabe i mocne prawa wielkich liczb, SPWL dla zmiennych losowych posiadających drugi moment (z dowodem), nierówność Kołmogorowa (z dowodem*), twierdzenie o zbieżności szeregów (z dowodem*), MPWL Kołmogorowa (z dowodem), MPWL Chinczyna-Kołmogorowa (z dowodem)
12. Funkcje charakterystyczne (transformata Fourier’a): definicja i własności funkcji charakterystycznej (z dowodem), twierdzenie Bochnera charakteryzujące funkcje charakterystyczne (dowód w jedną stronę), wzór na n -tą pochodną funkcji charakterystycznej.
13. “Zalety” funkcji charakterystycznych: 1) Niezależność – wzór na funkcję charakterystyczną sumy niezależnych zmiennych losowych, 2) Jednoznaczność – wzór na odwrócenie transformaty Fouriera, w tym przypadek całkowalnej funkcji charakterystycznej (z dowodami), 3) Ciągłość – twierdzenie Levy’ego charakteryzujące słabą zbieżność rozkładów w terminach funkcji charakterystycznych (dowód w jedną stronę)
14. Centralne twierdzenia graniczne: klasyczne CTG Lindeberga-Levy’ego (z dowodem), warunek Lindeberga i jego szczególne przypadki, ogólne CTG Lindeberga (dla zmiennych o niekoniecznie jednakowym rozkładzie), twierdzenie Feller’a ??