

**Procesy stochastyczne**  
Zagadnienia na egzamin 14.06.2017

1. Procesy stochastyczne. Podstawowe pojęcia: trajektoria, typy procesów, procesy nieróżnialne, modyfikacje procesów, wartość oczekiwana, (auto)kowariancja, (auto)korelacja.
2. Proces Wienera: definicja, charakteryzacja jako proces gaussowski (dowód), charakteryzacja jako proces o przyrostach stacjonarnych.
3. Rozkład procesu stochastycznego. Rozkłady skończenie wymiarowe,  $\sigma$ -ciało zbiorów cylindrycznych
4. Twierdzenie Kołmogorowa o istnieniu procesu: warunki zgodności, istnienie procesu Wienera, twierdzenie o ciągłej modyfikacji procesu.
5. Filtracje: pojęcie procesu adaptowanego do filtracji, charakteryzacja procesów o przyrostach niezależnych w terminach filtracji.
6. Momenty stopu: definicja, charakteryzacje, przykłady.
7.  $\sigma$ -ciało zdarzeń obserwowalnych do momentu stopu: definicja, własności, przykłady. Dyskretne zmienne losowe: definicja, rozkład, dystrybuanta i jej własności.
8. Martynały: definicja (nad, pod)-martynału, własności, przykłady.
9. Twierdzenie Dooba o opcjonalnym zatrzymaniu martynału z czasem dyskretnym (dowód).
10. Nierówności maksymalne dla podmartynałów z czasem dyskretnym i ciągłym.
11. Twierdzenie Dooba o opcjonalnym zatrzymaniu martynału z czasem ciągłym.
12. Twierdzenie o zbieżności (nad)martynałów z czasem dyskretnym i ciągłym (schemat dowodu).
13. Jednostajna całkowalność: definicja, charakteryzacja, charakteryzacja zbieżności w  $L^p$  za pomocą jednostajnej całkowalności i zbieżności według prawdopodobieństwa.
14. Zbieżność martynałów przestrzeniach  $L^p$ .
15. Całka Riemanna-Stieltjesa i wahanie funkcji: konstrukcja całki i własności, rola pojęcia skończonego wahanía funkcji, przykłady funkcji o wahaníu skończonym.
16. Twierdzenie o trywialności martynałów ciągłych z wahaníem skończonym.
17. Całka Paleya-Wienera: konstrukcja i własności.
18. Całka Ito względem procesu Wienera: konstrukcja całki, przestrzeń Hilberta martynałów ciągłych, pojęcie procesu prognozowalnego.
19. Twierdzenie o zatrzymaniu całki stochastycznej: wniosek opisujący nawias skośny dla całki względem procesu Wienera.
20. Uogólnienie całki Ito względem procesu Wienera: Przestrzeń procesów lokalnie całkowalnych w kwadracie, martynały lokalne, martynały lokalnie całkowalne w kwadracie.
21. Rozkład Dooba-Meyera: (dowód jednoznaczności), przykłady, uogólniony rozkład Dooba-Meyera, nawias skośny jako granica "wahanía kwadratowego".
22. Całka względem ciągłych martynałów: konstrukcja, przestrzeń procesów prognozowalnych (lokalnie) całkowalnych w kwadracie względem nawiasu skośnego martynału, własności.
23. Nawias skośny dwóch ciągłych martynałów lokalnych: definicja, charakteryzacja (dowód), własności (dowód).
24. Własności całki stochastycznej: zbieżność zmajoryzowana całek stochastycznych, całkowanie przez podstawienie, całkowanie przez części
25. Ciągłe semimartynały - Wzór Ito: definicja, przykłady, wzór na iloczyn semimartynałów, podstawowe twierdzenie analizy stochastycznej.