

Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 1

Przestrzenie Banacha

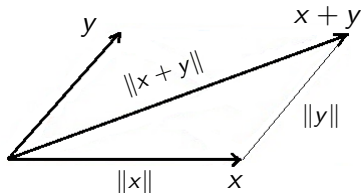
math.uwb.edu.pl/~zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

Przestrzenie unormowane

Co to jest przestrzeń wektorowa (liniowa)? 🏠

Def. Przestrznięcią unormowaną nazywamy przestrzeń liniową X nad ciałem $\mathbb{F} := \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wyposażoną w **normę**, czyli funkcję $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ taką, że dla dowolnych $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{F}$:

- Ⓝ1 $\|x\| = 0 \iff x = 0$, *(niezdegenerowanie)*
- Ⓝ2 $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, *(dodatnia jednorodność)*
- Ⓝ3 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. *(nierówność trójkąta)*



(odwrotna nierówność trójkąta)

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \quad \text{🏠}$$

Norma zadaje **metrykę** wzorem $d(x, y) := \|x - y\|$, $x, y \in X$. Zatem przestrzeń liniowa jest też **przestrznią topologiczną**.

Zbiory otwarte w X są sumami kul otwartych, gdzie **kulą otwartą** o środku w $x \in X$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

$$K(x, r) := \{y \in X : \|x - y\| < r\}.$$

Ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ jest **zbieżny** do $x \in X \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$.

Piszemy wtedy $x_n \rightarrow x$, $x_n \xrightarrow{X} x$ lub $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

Stw. (ciągłość struktury liniowej) W przestrzeni unormowanej mnożenie przez skalar, dodawanie wektorów i norma są funkcjami ciągłymi.

Dowód: Niech $\lambda_n \rightarrow \lambda$, $x_n \rightarrow x$ oraz $y_n \rightarrow y$, czyli $|\lambda_n - \lambda| \rightarrow 0$, $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ oraz $\|y_n - y\| \rightarrow 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} \|\lambda_n x_m - \lambda x\| &\stackrel{N3}{\leq} \|\lambda_n x_m - \lambda_n x\| + \|\lambda_n x - \lambda x\| \\ &\stackrel{N2}{=} |\lambda_n| \cdot \|x_m - x\| + |\lambda_n - \lambda| \cdot \|x\| \longrightarrow 0, \text{ przy } n, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Zatem $\lambda_n x_m \rightarrow \lambda x$, czyli mnożenie przez skalar $\cdot : \mathbb{F} \times X \rightarrow X$ jest ciągłe. Ciągłość dodawania wektorów $+$: $X \times X \rightarrow X$ wynika z

$$\|(x_n + y_m) - (x + y)\| \stackrel{N3}{\leq} \|x_n - x\| + \|y_m - y\| \longrightarrow 0, \text{ przy } n, m \rightarrow \infty$$

Ciągłość normy wynika z „odwrotnej nierówności trójkąta”:

$$\left| \|x_n\| - \|x\| \right| \leq \|x_n - x\| \rightarrow 0, \text{ skąd } \|x_n\| \rightarrow \|x\|. \quad \blacksquare$$



Stefan Banach

Def. Przestrzeni Banacha nazywamy przestrzeń unormowaną zupełną, tzn. przestrzeń $(X, \|\cdot\|)$, gdzie dla każdego $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$

$$\underbrace{\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0}_{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ciąg Cauchy}} \implies \underbrace{\exists_{x_0 \in X} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0}_{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ciąg zbieżny}}$$

Uwaga. Implikacja przeciwna zawsze zachodzi.

Prz. Przestrzeń \mathbb{R} z normą $\|x\| = |x|$ jest przestrzenią Banacha nad \mathbb{R} . Podobnie \mathbb{C} z normą $\|x\| = |x|$ jest przestrzenią Banacha nad \mathbb{C} .

Prz. Przestrzeń \mathbb{F}^n z normą $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^n |x(k)|^2}$ jest przestrzenią Banacha nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (*przestrzeń euklidesowa*)

Stw. Jeśli podprzestrzeń liniowa $Y \subseteq X$ przestrzeni unormowanej X jest przestrzenią zupełną, to Y jest domknięta w X . Jeśli X jest przestrzenią Banacha, to Y jest zupełna $\iff Y$ jest domknięta.

(przypomnijmy, że $\bar{Y} = Y \cup Y^d$, gdzie Y^d punkty skupienia Y)

Dowód: „ \implies ”. Niech $y \in Y^d$, czyli istnieje ciąg $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ zbieżny do $y \in X$. W szczególności $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy w Y . Zatem z zupełności Y , ciąg $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ posiada granicę w Y . Czyli $y \in Y$. Pokazaliśmy, że $Y^d \subseteq Y$. Stąd $Y = \bar{Y}$ domknięta.

„ \impliedby ”. Niech X przestrzeń Banacha. Weźmy ciąg $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ Cauchy w Y . Wtedy $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchy w X , a zatem jest zbieżny w X . Czyli istnieje $y \in X$ taki, że $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$. Skoro $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ i $Y = \bar{Y}$, to $y \in Y$. Zatem $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ zbieżny w Y . Czyli Y przestrzeń zupełna. ■



Uw. Każdą przestrzeń unormowaną można uzupełnić do przestrzeni Banacha (w zasadzie w sposób jednoznaczny)

Twierdzenie (Uzupełnienie przestrzeni unormowanych)

Dla dowolnej przestrzeni unormowanej Y istnieją

- 1 przestrzeń Banacha X (**uzupełnienie** prz. Y)
- 2 liniowa izometria $\Psi : Y \rightarrow X$ taka, że $\overline{\Psi(Y)} = X$.

Czyli Y zanurza się w X jako gęsta podprzestrzeń. Ponadto, takie X jest wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do kanonicznego izometrycznego izomorfizmu. Piszemy często $X = \overline{Y}$.

„Szkic Dowodu”: Elementy X definiujemy jako klasy abstrakcji ciągów Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ względem relacji:

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \stackrel{\text{def}}{\iff} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

Klasę równoważności oznaczamy $[\{x_n\}]$ i kładziemy

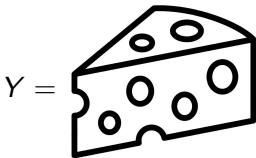
$$[\{x_n\}] + [\{y_n\}] := [\{x_n + y_n\}], \quad \lambda[\{x_n\}] := [\{\lambda x_n\}],$$

$$\|[\{x_n\}]\| := \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|, \quad \Psi(y) = [\{y, y, y, \dots\}]$$

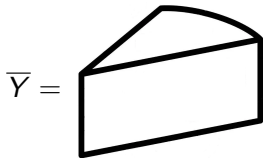


Wn. Przestrzeń unormowana Y jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy jej obraz $\Psi(Y)$ przy dowolnej liniowej izometrii $\Psi : Y \rightarrow X$ w przestrzeń unormowaną X jest domknięty w X .

„Zupełność” = „domkniętość w każdej nadprzestrzeni”



vs



Def. Podprzestrzeń Banacha = domknięta podprzestrzeń liniowa przestrzeni Banacha

Lem. Niech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ będzie ciągiem Cauchy.

- 1 Jeżeli pewien podciąg $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ jest zbieżny do x , to ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do x .
- 2 Dla każdego $q \in (0, 1)$ istnieje podciąg $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taki, że $\|x_{n_l} - x_{n_k}\| \leq q^k$ dla każdego $l \geq k$.

Dowód: Proste



Def. Dla ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ w przestrzeni unormowanej X powiemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny, jeżeli $\{\sum_{n=1}^N x_n\}_{N=1}^{\infty}$ jest zbieżny i wtedy

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N x_n$ nazywamy **sumą szeregu**.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest **absolutnie zbieżny** jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

Stw. Przestrzeń unormowana X jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy szereg absolutnie zbieżny jest zbieżny w X .

Stw. Przestrzeń unormowana X jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy szereg absolutnie zbieżny jest zbieżny w X .

Dowód: Niech $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Wtedy dla $M \geq N \geq 1$ mamy

$$\left\| \sum_{n=1}^M x_n - \sum_{n=1}^N x_n \right\| = \left\| \sum_{n=N}^M x_n \right\| \leq \sum_{n=N}^M \|x_n\| \rightarrow 0, \quad \text{przy } N, M \rightarrow \infty,$$

Zatem $\left\{ \sum_{n=1}^N x_n \right\}_{N=1}^{\infty}$ ciąg Cauchy, więc zbieżny jeśli X zupełna.

Załóżmy teraz, że każdy szereg w X , który jest absolutnie zbieżny jest zbieżny. Niech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ dowolny ciąg Cauchy. Wybierzmy podciąg $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taki, że $\|x_{n_l} - x_{n_k}\| \leq (1/2)^k$ dla $l \geq k$. Połóżmy $y_1 := x_{n_1}$ oraz $y_{k+1} := x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ dla $k \geq 1$. Wtedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| = \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} (1/2)^k = \|x_{n_1}\| + 1 < \infty$$

skąd $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ zbieżny. Ale $\sum_{k=1}^N y_k = x_{n_1} + \sum_{k=1}^N x_{n_{k+1}} - x_{n_k} = x_{n_N}$, czyli podciąg $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ jest zbieżny. Zatem $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny ■