

Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 5

**Równoważność norm.
Przestrzeń operatorów ograniczonych.**

math.uwb.edu.pl/~zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

Równoważność norm

Rozważmy dwie normy $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ na przestrzeni liniowej X .

Def. Norma $\|\cdot\|_1$ jest **mocniejsza** od normy $\|\cdot\|_2$ jeżeli

$$\exists_{c>0} \forall_{x \in X} \quad \|x\|_2 \leq c\|x\|_1.$$

Lem. Następujące warunki są równoważne:

- 1 norma $\|\cdot\|_1$ jest mocniejsza, niż $\|\cdot\|_2$
- 2 zbieżność w normie $\|\cdot\|_1$ pociąga zbieżność w normie $\|\cdot\|_2$
- 3 topologia zadana przez $\|\cdot\|_1$ jest mocniejsza (większa) od topologii zadanej przez $\|\cdot\|_2$.

Dowód: 1 Norma $\|\cdot\|_1$ jest mocniejsza od normy $\|\cdot\|_2 \iff$
 $id : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ jest operatorem ograniczonym \iff

odwzorowanie $id : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ jest ciągłe

(kryterium Heinego) \iff

2

\iff (definicja topologiczna)

3

Def. Normy $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ są **równoważne** jeżeli norma $\|\cdot\|_1$ jest jednocześnie mocniejsza i słabsza od $\|\cdot\|_2$, czyli gdy

$$\exists c_1, c_2 > 0 \quad \forall x \in X \quad \|x\|_2 \leq c_1 \|x\|_1 \quad \text{oraz} \quad \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2.$$

Stw. Następujące warunki są równoważne:

- 1 normy $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ są równoważne
- 2 zbieżność ciągu w $\|\cdot\|_1$ jest równoważna zbieżności w $\|\cdot\|_2$
- 3 topologie zadane przez $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ są takie same.

Ponadto jeśli normy są równoważne, to

$(X, \|\cdot\|_1)$ przestrzeń Banacha $\iff (X, \|\cdot\|_2)$ przestrzeń Banacha

Dowód: Równoważność warunków (1)-(3) wynika z lematu.

Jeśli $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ są równoważne, to ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ jest Cauchy w normie $\|\cdot\|_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest Cauchy w $\|\cdot\|_2$, bo

$$\|x_n - x_m\|_2 \leq c_1 \|x_n - x_m\|_1 \quad \text{oraz} \quad \|x_n - x_m\|_1 \leq c_2 \|x_n - x_m\|_2.$$

Zatem z równoważności zbieżności mamy równoważność zupełności ■ 3 / 10

Prz. Na przestrzeni $X = C[0, 1]$ następujące normy

$$\|x\|_\infty := \max_{t \in [0,1]} |x(t)|, \quad \|x\|_p := \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$$

nie są równoważne. Rzeczywiście, niech $x_n(t) = t^n$. Wtedy

$\|x_n\|_p^p = \int_0^1 t^{pn} dt = \frac{1}{pn+1} \rightarrow 0$, czyli $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} 0$. Ale $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ jest rozbieżny w normie $\|\cdot\|_\infty$ (bo nie jest zbieżny jednostajnie).
Zatem $\|\cdot\|_p$ nie jest mocniejsza, niż $\|\cdot\|_\infty$. Z drugiej strony

$$\|x\|_p = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 \|x\|_\infty^p dt \right)^{1/p} = \|x\|_\infty$$

Czyli $\|\cdot\|_\infty$ jest ściśle mocniejsza, niż $\|\cdot\|_p$.

Zbieżność jednostajna pociąga zbieżność w L^p , ale nie na odwrót.

Zad. Dla $p < p'$, $\|\cdot\|_{p'}$ jest ściśle mocniejsza, niż $\|\cdot\|_p$



(Hint: Nierówność Höldera oraz ciąg $x_n(t) = (\frac{1}{t})^{\frac{1}{p}} 1_{[\frac{1}{n}, 1]} + n^{\frac{1}{p}} 1_{[0, \frac{1}{n}]}$.)

Prz. W przestrzeni $X = \mathbb{F}^n$ normy

$$\|x\|_\infty := \max_{k=1, \dots, n} |x(k)|, \quad \|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |x(k)|^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$$

są równoważne, ponieważ $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$ oraz $\|x\|_p \leq n\|x\|_\infty$.

Twierdzenie.

W przestrzeni skończonej wymiarowej wszystkie normy są równoważne.

Dowód: Z założenia istnieją liniowo niezależne $e_1, \dots, e_n \in X$ takie, że $\forall_{x \in X} \exists_{x(1), \dots, x(n) \in \mathbb{F}} x = \sum_{k=1}^n x(k)e_k$. Wtedy $X \cong \mathbb{F}^n$, gdzie $x \mapsto (x(1), \dots, x(n))$. Zdefiniujmy na X normę wzorem

$$\|x\|_\infty := \max_{k=1, \dots, n} |x(k)|, \quad \text{gdzie } x = \sum_{k=1}^n x(k)e_k.$$

Wystarczy pokazać, że dowolna norma $\|\cdot\|$ na X jest równoważna z $\|\cdot\|_\infty$ (bo równoważność norm jest relacją równoważności, a w szczególności jest relacją przechodnią). W tym celu zauważmy, że

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^n x(k)e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n \|x(k)e_k\| = \sum_{k=1}^n |x(k)| \|e_k\| \leq \|x\|_\infty \sum_{k=1}^n \|e_k\|.$$

Czyli $\|x\| \leq c\|x\|_\infty$ dla $c := \sum_{k=1}^n \|e_k\|$. Stąd $\|\cdot\|_\infty$ mocniejsza, niż $\|\cdot\|$.

Załóżmy nie wprost, że $\|\cdot\|$ nie jest mocniejsza, niż $\|\cdot\|_\infty$. Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ znajdziemy $x_n \in X$ takie, że $\|x_n\|_\infty > n\|x_n\|$. Kładąc $y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|_\infty}$ otrzymujemy ciąg zbieżny do 0 w $\|\cdot\|$, gdyż

$$\|y_n\| = \frac{\|x_n\|}{\|x_n\|_\infty} < \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Czyli $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$. Z drugiej strony, $\|y_n\|_\infty = 1$, czyli ciąg $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ jest zawarty w sferze jednostkowej w normie $\|\cdot\|_\infty$, która jest zbiorem **zwartym** (norma $\|\cdot\|_\infty$ jest równoważna normie euklidesowej $\|\cdot\|_2$, patrz Przykład). Zatem na mocy **Twierdzenia Bolzano-Weierstrassa** istnieje podciąg $\{y_{n_k}\}_{n_k=1}^\infty$ zbieżny w normie $\|\cdot\|_\infty$ do pewnego $y \in X$. Wtedy $\|y\|_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \|y_{n_k}\|_\infty = 1$ i w szczególności $y \neq 0$. Ale skoro $\|\cdot\|_\infty$ jest mocniejsza, niż $\|\cdot\|$, to $y_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} y \neq 0$ bo $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$. ■



Wn1. Każda skończenie wymiarowa przestrzeń unormowana jest zupełna ($\dim(X) = n < \infty \implies X$ przestrzeń Banacha).

Dowód: Skoro norma na $X \cong \mathbb{F}^n$ jest równoważna normie euklidesowej, to X zupełna (bo \mathbb{F}^n zupełna w $\|\cdot\|_2$). ■

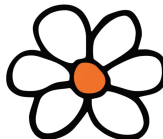
Wn2. Skończenie wymiarowa podprzestrzeń jest domknięta w każdej przestrzeni unormowanej.

Wn3. Każdy operator liniowy określony na przestrzeni skończenie wymiarowej jest automatycznie ograniczony (ciągły).

Dowód: Niech $T : X \rightarrow Y$ liniowy i $X \cong \mathbb{F}^n$. Skoro na X wszystkie normy równoważne, to możemy założyć, że $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x(k)|$, gdzie $x = \sum_{k=1}^n x(k)e_k$. Wtedy

$$\|Tx\| = \left\| \sum_{k=1}^n x(k)Te_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |x(k)| \|Te_k\| \leq C \cdot \|x\|$$

gdzie $C := \max_{k=1, \dots, n} \|Te_k\|$. Czyli T jest ograniczony. ■



Przestrzeń operatorów ograniczonych

Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi.

Przestrzeń operatorów ograniczonych z X w Y

$$B(X, Y) := \{T : X \rightarrow Y \text{ operator liniowy i ograniczony}\}$$

jest przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, wraz z działaniami

$$(T + S)x := Tx + Sx, \quad (\lambda T)x := \lambda Tx \quad \left(\begin{array}{l} \text{działania} \\ \text{określone} \\ \text{punktowo!} \end{array} \right)$$

oraz normą operatorową $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$.



Twierdzenie

Y przestrzeń Banacha $\iff B(X, Y)$ przestrzeń Banacha

Dowód: “ \Leftarrow ” potrzebujemy Tw. Hahna-Banacha (Wyk11)



“ \implies ” Niech $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subseteq B(X, Y)$ ciąg Cauchy. Dla każdego $x \in X$

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| \rightarrow 0.$$

Zatem ciąg $\{T_n x\}_{n=1}^\infty \subseteq Y$ jest ciągiem Cauchy w Y , więc jest on zbieżny (bo Y zupełna). Jego granicę oznaczmy przez $Tx \in Y$. W ten sposób otrzymujemy operator liniowy $T : X \rightarrow Y$. Ponadto,

$$\begin{aligned} \|(T - T_n)x\| &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|(T_m - T_n)x\| \\ &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|T_m - T_n\| \|x\| \leq \sup_{m \geq n} \|T_m - T_n\| \|x\|. \end{aligned}$$

Stąd

$$\|T - T_n\| \leq \sup_{m \geq n} \|T_m - T_n\| \rightarrow 0, \text{ gdy } n \rightarrow \infty.$$

Czyli $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ zbiega w normie do T . W szczególności, skoro $T_n \in B(X, Y)$ oraz $T - T_n \in B(X, Y)$ (dla dostatecznie dużych n), to $T = T - T_n + T_n \in B(X, Y)$ jest ograniczony.

Zatem $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ jest zbieżny w przestrzeni $B(X, Y)$. ■

Ciało skalarów $Y := \mathbb{F}$ jest przestrzenią Banacha.

Definicja

Przestrzeń Banacha $B(X, \mathbb{F})$ nazywamy **przestrzenią sprzężoną** lub **przestrzenią dualną** do przestrzeni X i oznaczamy ją X^* . Elementy przestrzeni $X^* = B(X, \mathbb{F})$ nazywamy **funkcjonałami ograniczonymi** na X .

Prz. Przykładem funkcjonału ograniczonego jest całka

$$L^1(\mu) \ni x \longmapsto f(x) := \int x \, d\mu \in \mathbb{F}.$$

Uw. Zasadniczą motywacją do rozważania przestrzeni dualnej X^* jest fakt, że pozwala ona zdefiniować następującą formę dwuliniową (zwaną czasem *parowaniem*)

$$X^* \times X \ni (f, x) \longmapsto \langle f, x \rangle := f(x) \in \mathbb{F},$$

która imituje **iloczyn skalarny** na X .