

Teoria Miary i Całki

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 1

Wstęp i σ -algebra zbiorów

- "Pandemiczne notatki z wykładu"
math.uwb.edu.pl/~zaf/kwasniewski/teaching
 - G. Plebanek "'Miara i całka"' skrypt
-
- S. Łojasiewicz, Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych, PWN, 1987
 - A. Birkholc, Analiza matematyczna. Funkcje wielu zmiennych, PWN 1986
 - W. Rudin, Analiza rzeczywista i zespolona, PWN, Warszawa, 2009.



Riemann



= ??

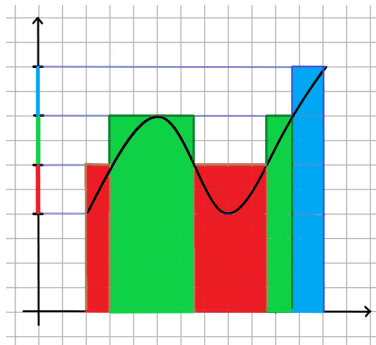
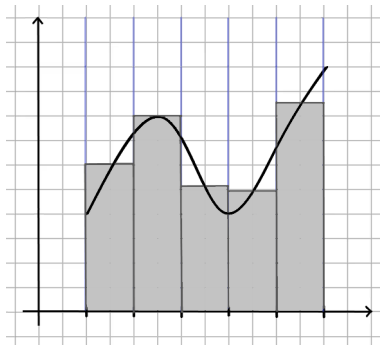


Lebesgue



= 11

Każdy porządkny kasjer liczy w ten drugi sposób



Przewagi Całki Lebesgue'a nad Riemanna

- Większa klasa funkcji całkowlanych
- Możliwość całkowania względem ogólnych miar
- Twierdzenia o przechodzeniu z granicą pod całkę



Analiza
Matematyczna



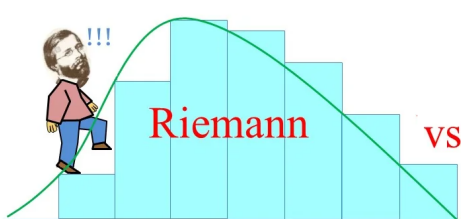
Rachunek
Prawdopodobieństwa



Analiza
Harmoniczna



Analiza
Funkcjonalna



vs



σ -algebry zbiorów

X - zbiór, 2^X - rodzina wszystkich podzbiorów X (zbiór potęgowy)

Def. σ -**albrą** na X nazywamy rodzinę $\mathcal{F}$ podzbiorów X taką, że

❶ $X \in \mathcal{F}$ (zawiera całą przestrzeń)

❷ $A \in \mathcal{F} \implies A' := X \setminus A \in \mathcal{F}$ (zamknięta na dopełnienia)

❸ $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ (zamknięta na sumy ciągów)

Parę $(X, \mathcal{F})$ nazywamy **przestrzenią mierzalną**. Elementy σ -algebry $\mathcal{F}$ nazywamy **zbiorami mierzalnymi**.

Na probabilistyce σ -**ciało** = σ -**algebra**, zdarzenie = zbiór mierzalny



Uw. σ -**algebra** zawsze zawiera $\emptyset$, X , jest zamknięta na skończone operacje teoriomnogościowe oraz **przeliczalne sumy i przekroje**.

Zbiór A jest **przeliczalny** $\iff A$ jest skończony lub równoliczny z $\mathbb{N}$
(czyli $|A| \leq |\mathbb{N}| =: \aleph_0$)

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ - przeliczalne; $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 2^X nieprzeliczalne (X nieskończ.)

Stw. Jeśli $\mathcal{F}$ jest σ -algebrą, to

- i $\emptyset \in \mathcal{F}$ (zawiera zbiór pusty)
- ii $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$ (zamknięta na skończone sumy)
- iii $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ (zamknięta na przekroje ciągów)
- iv $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$ (zamknięta na skończone przekroje)

Dowód: (i) $X \in \mathcal{F}$ z $(\Sigma 1)$. Zatem $\emptyset = X \setminus X = X' \in \mathcal{F}$ z $(\Sigma 2)$.

(ii) Jeśli $A, B \in \mathcal{F}$, to kładąc $A_{2k-1} := A$ oraz $A_{2k} = B$ dla $k \in \mathbb{N}$, mamy $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ i stąd $A \cup B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ na mocy $(\Sigma 3)$.

(iii) Niech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$. Z praw De Morgana otrzymujemy

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A'_n)' = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n \right)' \in \mathcal{F}$$

na mocy $(\Sigma 2)$ i $(\Sigma 3)$.

(iv) Można naśladować dowód (ii) lub (iii)



• $\mathcal{F}$ zamknięta na różnice, gdyż $A \setminus B = A \cap B'$ patrz (iv) i $(\Sigma 2)$

- ❶ 2^X jest σ -algebrą (największa σ -algebra na X)
- ❷ $\{\emptyset, X\}$ jest σ -algebrą (najmniejsza σ -algebra na X)
- ❸ $\{\emptyset, A, X\}$ nie jest σ -algebrą (o ile $A \neq \emptyset, X$)
- ❹ $\{\emptyset, A, A', X\}$ jest σ -algebrą (generowaną przez A)
- ❺ Jeśli $\mathcal{F}$ jest σ -algebrą na X oraz $E \subseteq X$, to
$$\mathcal{F}_E := \{E \cap A : A \in \mathcal{F}\} \quad (\text{obcięcie } \mathcal{F} \text{ do } E)$$

jest σ -algebrą na E

- ❻ Jeśli $\mathcal{F}$ jest σ -algebrą na Y , to dla dowolnej funkcji
$$f : X \rightarrow Y$$
$$f^{-1}(\mathcal{F}) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}\} \quad (\text{przeciwwobraz } \mathcal{F})$$
jest σ -algebrą na X

- ❼ Obraz σ -algebry zazwyczaj nie jest σ -algebrą
- ❽ Suma dwóch σ -algebr nie musi być σ -algebrą
- ❾ Przecięcie dowolnej ilości σ -algebr jest σ -algebrą!



Stw. Dla każdej rodziny $\mathcal{G}$ podzbiorów zbioru X istnieje najmniejsza σ -algebra $\sigma(\mathcal{G})$ na X zawierająca $\mathcal{G}$.

Dowód: Rozważmy następujące przecięcie

$$\sigma(\mathcal{G}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \text{ i } \mathcal{F} \text{ jest} \\ \sigma\text{-algebrą na } X}} \mathcal{F}$$

- ❶ $\sigma(\mathcal{G})$ jest σ -algebrą (bo jest przecięciem σ -algebr)
- ❷ $\sigma(\mathcal{G})$ zawiera $\mathcal{G}$ (bo każda przecinana rodzina zawiera $\mathcal{G}$)
- ❸ $\sigma(\mathcal{G})$ zawiera się w każdej σ -algebrze $\mathcal{F}$ zawierającej $\mathcal{G}$ (bo jest przekrojem takich σ -algebr),

czyli $\sigma(\mathcal{G})$ jest najmniejszą rodziną o własnościach (1), (2). ■

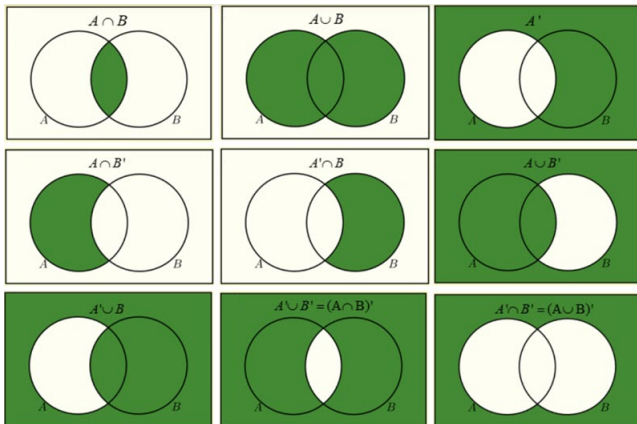
Def. $\sigma(\mathcal{G})$ nazywamy σ -algebrą generowaną przez $\mathcal{G}$.

Prz. Jeśli $A \subseteq X$, to $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, X, A, A'\}$.

Ogólnie $|\mathcal{G}| = n \Rightarrow |\sigma(\mathcal{G})| \leq 2^n$

Uw. Niech $\mathcal{H}$ oraz $\mathcal{G}$ rodziny podzbiorów zbioru X .

- 1 $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{G}) \iff \mathcal{G}$ jest σ -algebrą
- 2 $\sigma(\sigma(\mathcal{G})) = \sigma(\mathcal{G})$
- 3 $\sigma(\mathcal{H}) \subseteq \sigma(\mathcal{G}) \iff \mathcal{H} \subseteq \sigma(\mathcal{G})$
- 4 $\sigma(\mathcal{H}) = \sigma(\mathcal{G}) \iff \mathcal{H} \subseteq \sigma(\mathcal{G})$ oraz $\mathcal{G} \subseteq \sigma(\mathcal{H})$



$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$