

Teoria Miary i Całki

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 4

**Twierdzenie o jednoznaczności miary
(λ i π -układy, miara Lebesgue'a)**

Def. Rodzinę zbiorów $\mathcal{L} \subseteq 2^X$ nazywamy λ -układem na X jeśli

Ⓐ1 $X \in \mathcal{L}$ (zawiera całą przestrzeń)

Ⓐ2 $A \in \mathcal{L} \implies A' := X \setminus A \in \mathcal{L}$ (zamknięta na dopełnienia)

Ⓐ3 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}$ parami rozłączne $\implies \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$ (zamknięta na rozłączne sumy ciągów)

Uw1. Każda σ -algebra jest λ -układem, ale nie na odwrót
(istnienie λ -układu nie będącego σ -algebrą trudne – temat na pracę dyplomową)

Uw2. λ -układ zawsze zawiera $\emptyset$ i jest zamknięty na skończone sumy rozłączne: $A, B \in \mathcal{L}, A \cap B = \emptyset \implies A \sqcup B \in \mathcal{L}$

λ -układ nazywa się też **układem Dynkina**.



σ -algebra = λ -układ + π -układ

Lem. λ -układ $\mathcal{L}$ jest σ -algebrą $\iff \mathcal{L}$ jest π -układem, tzn. jest zamknięty na skończone przekroje: $A, B \in \mathcal{L} \implies A \cap B \in \mathcal{L}$

Dowód: „ $\implies$ ” jasne bo każda σ -algebra jest λ i π -układem.

„ $\impliedby$ ” Niech $\mathcal{L}$ będzie λ i π -układem. Niech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}$. Kładąc $B_1 := A_1$, $B_2 = A_2 \cap A'_1$ i ogólnie $B_n := A_n \cap A'_{n-1} \cap \dots \cap A'_1$ dla $n > 1$, dostajemy parami rozłączne $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}$ oraz $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Zatem $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$ na mocy ($\Lambda 3$).

Def. λ -układem generowanym przez rodzinę $\mathcal{G} \subseteq 2^X$ nazywamy najmniejszy λ -układ $\lambda(\mathcal{G})$ na X zawierający $\mathcal{G}$



Uw. Z definicji wynika, że $\lambda(\mathcal{G}) \subseteq \sigma(\mathcal{G})$, a równość $\lambda(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G})$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda(\mathcal{G})$ jest σ -algebrą.

Tw. (Lemat o λ i π -układach) Sierpiński 1928, Dynkin 1959



Sierpiński

Jeśli rodzina $\mathcal{G} \subseteq 2^X$ jest zamknięta na przekroje, to

$$\lambda(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G}).$$

Równoważnie, λ -układ generowany przez π -układ jest π -układem.

Dowód: Na mocy **Uw** oraz **Lem** wystarczy pokazać, że $\lambda(\mathcal{G})$ jest π -układem! W tym celu użyjemy następujący **Fakt**

Fakt. Jeśli $\mathcal{L}$ jest λ -układem na X oraz $A \in \mathcal{L}$, to
 $\mathcal{L}_A := \{B \subseteq X : A \cap B \in \mathcal{L}\}$ też jest λ -układem na X .



Krok 1. Niech $A \in \mathcal{G}$ oraz $\lambda(\mathcal{G})_A = \{B \subseteq X : A \cap B \in \lambda(\mathcal{G})\}$.

$\mathcal{G}$ jest π -układem $\implies \forall_{B \in \mathcal{G}} A \cap B \in \mathcal{G} \subseteq \lambda(\mathcal{G})$

$$\implies \forall_{B \in \mathcal{G}} B \in \lambda(\mathcal{G})_A \iff \mathcal{G} \subseteq \lambda(\mathcal{G})_A$$

$$\stackrel{\text{Fakt}}{\iff} \lambda(\mathcal{G}) \subseteq \lambda(\mathcal{G})_A \iff \forall_{B \in \lambda(\mathcal{G})} A \cap B \in \lambda(\mathcal{G}).$$

Zatem pokazaliśmy, że $\forall_{A \in \mathcal{G}} \forall_{B \in \lambda(\mathcal{G})} A \cap B \in \lambda(\mathcal{G})$.

Krok 2. Niech $B \in \lambda(\mathcal{G})$ oraz $\lambda(\mathcal{G})_B = \{A \subseteq X : A \cap B \in \lambda(\mathcal{G})\}$.

Krok 1 $\implies \forall_{A \in \mathcal{G}} A \cap B \in \lambda(\mathcal{G}) \iff \forall_{A \in \mathcal{G}} A \in \lambda(\mathcal{G})_B$

$$\iff \mathcal{G} \subseteq \lambda(\mathcal{G})_B \stackrel{\text{Fakt}}{\iff} \lambda(\mathcal{G}) \subseteq \lambda(\mathcal{G})_B$$

$$\iff \forall_{A \in \lambda(\mathcal{G})} A \cap B \in \lambda(\mathcal{G}).$$

Zatem $\forall_{B \in \lambda(\mathcal{G})} \forall_{A \in \lambda(\mathcal{G})} A \cap B \in \lambda(\mathcal{G})$, czyli $\lambda(\mathcal{G})$ jest π -układem. ■

Twierdzenie Dynkina (o jednoznaczności miary)

Niech $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G})$ będzie σ -algebrą generowaną przez $\mathcal{G} \subseteq 2^X$ oraz

- ❶ $\mathcal{G}$ jest zamknięta na przekroje,
- ❷ $X_n \nearrow X$ dla pewnego $\{X_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{G}$.

Dla dowolnych miar μ i ν na $(X, \mathcal{F})$, które pokrywają się na $\mathcal{G}$ i przyjmują skończone wartości na zbiorach X_n z (2), mamy $\mu = \nu$.

Dowód: Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ rodzina

$$\mathcal{L}_n := \{A \in \mathcal{F} : \mu(A \cap X_n) = \nu(A \cap X_n)\}$$

jest λ -układem. Rzeczywiście,

$$(\Lambda 1) \quad \mu(X \cap X_n) = \mu(X_n) \stackrel{X_n \in \mathcal{G}}{=} \nu(X_n) = \nu(X \cap X_n) \implies X \in \mathcal{L}_n.$$

($\Lambda 2$) Dla $A \in \mathcal{L}_n$ mamy $\mu(A \cap X_n) = \nu(A \cap X_n) < \infty$ i stąd

$$\begin{aligned} \mu(A' \cap X_n) &= \mu(X_n \setminus A) \stackrel{\text{różn}}{=} \mu(X_n) - \mu(A \cap X_n) = \nu(X_n) - \nu(A \cap X_n) \\ &\stackrel{\text{różn}}{=} \nu(X_n \setminus A) = \nu(A' \cap X_n). \end{aligned}$$

Zatem $A' \in \mathcal{L}_n$.

(Λ3) Dla parami rozłącznych $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}_n$ mamy

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigsqcup_{m=1}^{\infty} A_m \cap X_n\right) &\stackrel{\sigma\text{-add}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m \cap X_n) \stackrel{A_m \in \mathcal{L}_n}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \nu(A_m \cap X_n) \\ &\stackrel{\sigma\text{-add}}{=} \nu\left(\bigsqcup_{m=1}^{\infty} A_m \cap X_n\right). \end{aligned}$$

Czyli $\bigsqcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{L}_n$. Zatem $\mathcal{L}_n$ jest λ -układem.

Zauważmy teraz, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\mu|_{\mathcal{G}} = \nu|_{\mathcal{G}} \implies \mathcal{G} \subseteq \mathcal{L}_n \xrightarrow{\mathcal{L}_n \text{ } \lambda\text{-układ}} \lambda(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{L}_n.$$

Na mocy założenia (1) oraz **Lemat o λ i π -układach** mamy

$$\lambda(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{F}.$$

Zatem dla każdego $A \in \mathcal{F}$ i $n \in \mathbb{N}$ mamy $\mu(A \cap X_n) = \nu(A \cap X_n)$.

Stąd, że $A \cap X_n \nearrow A$ i z ciągłości miary dostajemy

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A \cap X_n) = \nu(A). \quad \blacksquare$$

Def. Miara μ na $(X, \mathcal{F})$ jest σ -skończona jeśli istnieją parami rozłączne $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ takie, że $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} Y_n = X$ oraz $\mu(Y_n) < \infty$

Uw. μ jest σ -skończona $\iff$ istnieje ciąg $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ taki, że $X_n \nearrow X$ oraz $\mu(X_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$.



Wn1. Miara Lebesgue'a jest jednoznacznie wyznaczona przez

$$\forall_{\substack{a_i, b_i \in \mathbb{Q} \\ a_i < b_i}} \lambda^n \left([a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n) \right) = \prod_{i=1}^n |b_i - a_i|$$

Dowód: Rodzina

$$\mathcal{P}_w := \{[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n) : a_i, b_i \in \mathbb{Q}\}$$

jest zamknięta na przekroje i kładąc $X_m = [-m, m)^n \in \mathcal{P}_w$ mamy $X_m \nearrow \mathbb{R}^n$ oraz $\lambda^n(X_m) = (2m)^n < \infty$. Skoro $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{P}_w)$, to dla dowolnej miary μ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mamy

$$\mu|_{\mathcal{P}_w} = \lambda^n|_{\mathcal{P}_w} \implies \mu = \lambda^n. \quad \blacksquare$$

Wn2. Miara Lebesgue'a jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia, tzn. $\forall_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} \forall_{x \in \mathbb{R}^n} \lambda^n(x + B) = \lambda^n(B)$.

Dowód: Niech $x \in \mathbb{R}^n$. Dla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ przesunięty zbiór $x + B := \{x + y : y \in B\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ jest borelowski. Wzór

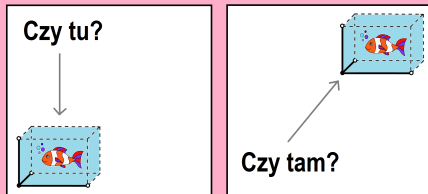


$$\mu(B) := \lambda^n(x + B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

definiuje miarę na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Dla $P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \in \mathcal{P}_w$

$$\begin{aligned} \mu(P) &= \lambda^n(x + P) \\ &= \lambda^n([x_1 + a_1, x_1 + b_1] \times \cdots \times [x_n + a_n, x_n + b_n]) \\ &= \prod_{i=1}^n |(x_i + b_i) - (x_i + a_i)| \\ &= \prod_{i=1}^n |b_i - a_i| \\ &= \lambda^n(P). \end{aligned}$$

Zatem $\mu = \lambda^n$ na mocy **Wn1**. ■



"Prostopadłościan jest ten sam"

Wn3. Każda miara μ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ niezmiennicza na przesunięcia z $c := \mu([0, 1)^n) < \infty$, jest krotnością miary Lebesgue'a: $\mu = c \cdot \lambda^n$.

Dowód: Niech $P = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) \in \mathcal{P}_w$. Niech M będzie wspólnym mianownikiem dla wszystkich ułamków $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. Wtedy

$$P = \bigsqcup_{k=1}^K \left(x^{(k)} + \left[0, \frac{1}{M}\right)^n \right) \text{ dla pewnych } K \in \mathbb{N} \text{ oraz } x^{(k)} \in \mathbb{R}^n.$$

Z niezmienniczości na przesunięcia i addytywności μ oraz λ^n

$$\mu(P) = K\mu\left(\left[0, \frac{1}{M}\right)^n\right) \quad \text{oraz} \quad \lambda^n(P) = K\lambda^n\left(\left[0, \frac{1}{M}\right)^n\right) = \frac{K}{M^n}.$$

Podobnie $c = \mu([0, 1)^n) = M^n \mu\left(\left[0, \frac{1}{M}\right)^n\right)$. Stąd

$$\frac{\mu(P)}{c} = \frac{K\mu([0, \frac{1}{M})^n)}{M^n \mu([0, \frac{1}{M})^n)} = \frac{K}{M^n} = \lambda^n(P).$$

Zatem $\mu(P) = c \cdot \lambda^n(P)$ dla każdego $P \in \mathcal{P}_w$. Czyli $\mu = c \cdot \lambda^n$ na mocy **Wn1**. ■