

Teoria miary i całki
Zagadnienia na egzamin 11.02.2026

1. σ -algebry zbiorów: definicja, własności, przykłady, σ -algebry generowane przez rodziny zbiorów, σ -algebra zbiorów borelowskich na $\mathbb{R}^n$ - różne rodzaje generatorów.
2. Miary: własności, ciągłość miary vs σ -addytywność, przykłady miar.
3. Jednoznaczność miary: λ -układy, Lemat o λ i π -układach oraz twierdzenie Dynkina o jednoznaczności miary.
4. Wnioski z Twierdzenia o jednoznaczności: jednoznaczność miary Lebesgue'a, miary niezmienniczość ze względu na przesunięcia na $\mathbb{R}^n$.
5. Twierdzenie Caratheodoriego o przedłużeniu miary z półpierzścienia na σ -algebrę zbiorów: półpierzścień, miara zewnętrzna, rozszerzenie z półpierzścienia na pierścień, zbiory mierzalne (spełniające warunek Caratheodoriego).
6. Miary Lebesgue'a-Stieltjesa: istnienie i jednoznaczność, charakteryzacja, zastosowanie do rozkładów prawdopodobieństwa, własności.
7. Odwzorowania mierzalne: charakteryzacje, własności, przykłady.
8. Obraz miary przy odwzorowaniu mierzalnym: definicja, przykłady, obraz miary Lebesgue'a przy odwracalnych odwzorowaniach liniowych.
9. Rzeczywiste funkcje mierzalne i funkcje proste: definicje, przykłady, własności, aproksymacja funkcji mierzalnych funkcjami prostymi.
10. Definicja i własności całki: wzór dla funkcji prostych, funkcji nieujemnych i definicja ogólna. Własności całki i przykłady.
11. Twierdzenie Radona-Nikodyma: pochodna Radona-Nikodyma miary absolutnie ciągłe, przykłady (absolutna ciągłość miary Lebesgue'a-Stieltjesa, rozkłady ciągłe w prawdopodobieństwie).
12. Zamiana zmiennych w całce: Twierdzenie ogólne, wnioski i przykłady (absolutna ciągłość miary Lebesgue'a-Stieltjesa, rozkłady ciągłe w prawdopodobieństwie).
13. Twierdzenia o przechodzeniu z granicą pod całkę: twierdzenie Lebiego (o zbieżności monotonicznej), twierdzenie Lebesgue'a (o zbieżności zmajoryzowanej) i lemat Fatou, przykłady.
14. Porównanie całki Riemanna i całki Lebesgue'a, przykład funkcji Dirichleta.
15. Miary produktowe i całki iterowane: konstrukcja i istnienie miary produktowej, twierdzenie Tonellego i twierdzenie Fubinięgo.

Minimalne wymagania na ocenę dostateczną:

Znajomość definicji: σ -algebry, σ -algebry generowanej przez rodzinę zbiorów, σ -algebry zbiorów borelowskich, miary, miary Lebesgue'a (n -wymiarowej objętości), miary produktowej, funkcji mierzalnej, funkcji prostej, konstrukcja całki w sensie Lebesgue'a, związek między całką Lebesgue'a i Riemanna.

Znajomość własności: miary (ciągłość, monotoniczność, itp.), miary Lebesgue'a (n -wymiarowej objętości) (niezmienniczość ze względu na przesunięcia itp.), całki (liniowość, monotoniczność itp.)

Znajomość twierdzeń: Twierdzenie o istnieniu miary Lebesgue'a (n -wymiarowej objętości), Twierdzenie Radona-Nikodyma, Twierdzenie Lebiego (o zbieżności monotonicznej), Twierdzenie Lebesgue'a (o zbieżności zmajoryzowanej)

Minimalne wymagania na ocenę dobrą:

Znajomość definicji: σ -algebra, pierścień, półpierścień, itp. a także takich struktur generowanych przez rodzinę zbiorów, σ -algebra zbiorów borelowskich, miara, przykłady miar; miara Lebesgue'a (n -wymiarowa objętość), miara licząca; miara zewnętrzna, miara produktowa, funkcja mierzalna, funkcja prosta, konstrukcja całki w sensie Lebesgue'a, związek między całką Lebesgue'a i Riemanna.

Znajomość własności: zbiorów borelowskich (różne rodzaje generatorów), miary (ciągłość, monotoniczność, itp.), miary Lebesgue'a (n -wymiarowej objętości) (niezmienniczość ze względu na przesunięcia itp.), funkcji mierzalnych (aproksymacja funkcjami prostymi, zamkniętość na granice punktowe, operacje liniowe itp.), całki (liniowość, monotoniczność itp.)

Znajomość twierdzeń: Twierdzenia o Jednoznaczności miary, Twierdzenie o przedłużeniu miary z półpierścienia na σ -algebrę zbiorów, o istnieniu miary Lebesgue'a (n -wymiarowej objętości), o charakterystyce miar na $\mathbb{R}^n$ niezmienniczych ze względu na przesunięcia, Twierdzenie Radona-Nikodyma, Twierdzenie o aproksymacji funkcji mierzalnych funkcjami prostymi, Twierdzenie Lebiego (o zbieżności monotonicznej), Twierdzenie Lebesgue'a (o zbieżności zmajoryzowanej) i lemat Fatou, Twierdzenia Fubini i Tonellego.

Wymagania na ocenę bardzo dobrą:

To co powyżej plus: dowód istnienia σ -algebry (itp) generowanej przez dowolną rodzinę zbiorów, dowód twierdzenia, że zbiory borelowskie na $\mathbb{R}^n$, są generowane przez prostopadłościany, dowód własności miary (w tym ciągłości miary), kroki w dowodzie Twierdzenia Caratheodoriego, dowód twierdzenia o istnieniu miary Lebesgue'a (n -wymiarowej objętości), dowód własności funkcji mierzalnych (aproksymacja funkcjami prostymi, zamkniętość na granice punktowe, operacje liniowe itp), dowód własności całki (liniowość, monotoniczność itp.), dowód Twierdzenia Lebiego (o zbieżności monotonicznej), dowód Twierdzenia Lebesgue'a (o zbieżności zmajoryzowanej).