Uniwersytet w Białymstoku

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyki

Krzysztof Bardadyn

Działania C^*-korespondencji na C^*-algebrach

Praca dyplomowa napisana
pod kierunkiem
dr hab. Bartosza K. Kwaśniewskiego

Białystok 2022

Składam serdeczne podziękowania
dr. hab. Bartoszowi K. Kwaśniewskiemu
za cierpliwość i wyrozumiałość
okazaną podczas pisania tej pracy.

Krzysztof Bardadyn

Spis treści

Wstęp

Przez korespondencję między dwoma zbiorami w matematyce, a szczególnie w matematyce stosowanej, rozumie się po prostu relację. W kontekście W^*-algebr pojęcie korespondencji zostało wprowadzone przez Alaina Connes'a w latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku. Korespondencje Connes'a można interpretować jako nieprzemienne relacje między dwoma algebrami operatorowymi. W ujęciu C^*-algebraicznym pojęcie korespondencji długo funkcjonowało pod nazwą bimodułu Hilberta. Formalnie C^*-korespondencję z C^*-algebry A do C^*-algebry B definiujemy jako prawy B-moduł Hilberta wraz z lewym A-działaniem przez operatory sprzęgalne. Natomiast obecnie nazwa bimoduł Hilberta jest zarezerwowana dla bardziej symetrycznej struktury, gdzie załada się również istnienie lewego iloczynu wewnętrzenego. Termin C^*-korespondencja został rozpropagowany, za Schweizerem [28], przez Katsurę [14], [15]. Już począwszy od prac Rieffel'a [25], [26] C^*-korespondencje pełniły kluczową rolę w teorii reprezentacji indukowanych, są też podstawowymi obiektami w konstrukcji KK-teorii w ujęciu Kasparowa [13], [11]. Po ukazaniu się w 1997 przełomowej pracy M. Pimsner'a [23], C^*-korespondencje stały się jednym z najważniejszych narzędzi w teorii C^*-algebr zadanych przez relacje typu dynamicznego lub kombinatorycznego. W szczególności o C^*-korespondencjach można myśleć jako o bardzo ogólnych morfizmach (nieprzemiennych grafach) między C^*-algebrami.

Niniejszą pracę można traktować jako wprowadzenie do teorii C^*-korespondencji z wyżej wspomnianego punktu widzenia, gdzie na C^*-korespondencje patrzy się jak na obiekty działające na C^*-algebrach. Prowadzi to między innymi do naturalnej interpretacji systemów produktowych jako działania półgrupy C^*-korespondencji oraz wiązek Fella jako działania grupowego C^*-korespondencji. Układ i sposób prezentacji materiału jest oparty na cyklu wykładów "'Invitation to actions of C^*-correspondences"' wygłoszonych przez dr. hab. Bartosza Kwaśniewskiego, podczas szkoły VI School on Geometry and Physics, 26-30.06.2017, Białowieża[1]. Materiał jednak został znacznie rozszerzony i uzupełniony o szereg szczegółów i przykładów, a co najważniejsze zawiera pełne dowody. Niniejszą pracę można czytać, po wstępnym kursie z C^*-algebr, bez znajomości teorii modułów Hilberta.

Wyniki prezentowane w pracy są najprawdopodobniej znane ekspertom.

[1] http://wgmp.uwb.edu.pl/wgmp36/abs/Kwasniewski.pdf

Jednakże wiele z nich nie zostało szczegółowo opisane w literaturze, a i sposób ich prezentacji często jest całkiem nowy. W szczególności, dużą wagę w niniejszej pracy przyłożono by prezentowane definicje były efektywne (zawierały tylko niezbędne aksjomaty). Dla przykładu moduły Hilberta definiujemy bez użycia struktury liniowej, która jak wykażemy zawsze istnieje i jest jednoznacznie wyznaczona przez strukturę modułu i iloczyn wewnętrzny. Prezentujemy szczegółowo charakteryzację modułów nad algebrami przemiennymi jako przestrzenie cięć wiązek przestrzeni Hilberta w sensie Fella, co nigdzie do tej pory nie zostało opisane (patrz, podrozdział 2.5). Jako wniosek otrzymujemy charakteryzację modułów Hilberta nad przemienną algebrą z widmem dyskretnym (Wniosek 2.54). To z kolei prowadzi do nowego dowodu charakteryzacji C^*-korespondencji grafowych (Twierdzenie 3.10), otrzymanej pierwotnie w [12]. Bimoduły Hilberta definiujemy za [2] jako struktury będące jednocześnie prawymi i lewymi modułami Hilberta, w których iloczyny wewnętrzne spełniają warunek łączności. Następnie skrupulatnie dowodzimy wszystkich własności, które niektórzy autorzy dołączają do definicji. Przedstawiamy szczegółowy dowód charakteryzacji bimodułów równoważności jako C^*-korespondencji odwracalnych, faktu co do którego również brak stosownej referencji w literaturze.

Struktura pracy przedstawia się następująco.

Rozdział pierwszy (preliminaria) poświęcony jest pojęciom i faktom związanym z teorią C^*-algebr. Zakładamy przy tym, że czytelnik spotkał się już z tymi terminami, na przykład przeszedł podstawowy kurs z teorii C^*-algebr i zna materiał, który można znaleźć w pierwszych rozdziałach [19]. W preliminariach jedynie przypominamy najważniejsze fakty i ustalamy konwencje.

Rozdział drugi można traktować osobnie jako wprowadzenie do teorii C^*-modułów Hilberta. Omawiamy tu szczegółowo wszystkie definicje i dowodzimy podstawowe twierdzenia pełniące kluczową rolę w teorii. Przedstawiamy szereg przykładów modułów Hilberta oraz metod konstrukcji takich struktur, które okażą się użyteczne w dalszych częściach pracy. W tym samym rozdziale omówione są również pewne klasy odwzorowań między C^*-modułami Hilberta. Zrozumienie pojęć takich jak operator sprzęgalny czy operator zwarty jest niezbędne do zrozumienia dalszej części pracy. Ważnym punktem rozdziału drugiego jest charakteryzacja C^*-modułów Hilberta nad algebrami przemiennymi jako C^*-modułów cięć pewnej wiązki przestrzeni Hilberta.

Rozdział trzeci poświęcony jest tytułowemu pojęciu, mianowicie C^*-korespondencjom. Na szeregu przykładów pokazujemy, że C^*-korespondencje stanowią naturalne wspólne uogólnienie dla wielu ważnych obiektów, takich jak: reprezentacje, homomorfizmy, homomorfizmy w algebry mnożników, czy stabilizacje, a także grafy skierowane. Omawiamy szczegółowo konstrukcję iloczynu tensorowego C^*-korespondencji oraz jego interpretację jako złożenia C^*-korespondencji traktowanych jako bardzo ogólne "'morfizmy"' między C^*-algebrami. Prowadzi to do kategorii C^*-algebr, w której morfizmami są klasy równoważności izomorficznych C^*-korespondencji. Jak pokazujemy morfizmy odwracalane w tej kateogorii są niczym innym jak bimodułami równoważności w sensie Mority-Rieffel'a. Na koniec omawiamy systemy produktowe i wiązki Fella jako odpowiednio półgrupowe i grupowe działania C^*-korespondencji na C^*-algebrach.

Rozdział 1

Preliminaria

W tym podrozdziale przypomnimy pokrótce podstawowe pojęcia, głównie z teorii C^*-algebr, patrz [19]. Przy okazji ustalimy konwencje i notację. Wszystkie przestrzenie liniowe będą rozważane nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$. Iloczyn skalarny w przestrzeniach Hilberta jest liniowy ze względu na drugą współrzędną:

Definicja 1.1. Przestrzenią *unitarną* nazywamy przestrzeń wektorową X z zadanym na niej działaniem dwuargumentowym $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ spełniającym dla dowolnych $x, y, z \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ następujące warunki:

(1) $\langle x, \lambda y + \mu z\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \mu\langle x, z\rangle$;

(2) $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$;

(3) $\langle x, x\rangle \geq 0$;

(4) $\langle x, x\rangle = 0 \implies x = 0$.

Odwzorowanie $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ nazywane jest *iloczynem wewnętrznym.* Z definicji iloczynu wewnętrznego wynika, że funkcja $\|x\| := \sqrt{|\langle x, x\rangle|}$ jest normą na X. Powiemy, że X jest *przestrzenią Hilberta* jeżeli X jest zupełna ze wzgledu na wyżej zdefiniowaną normę.

Definicja 1.2. *Algebrą Banacha* nazywamy algebrę A, która jest jednocześnie przestrzenią Banacha ze względu na normę, która jest submultiplikatywna, tzn. dla dowolnych $a, b \in A$ zachodzi $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$. Powiemy, że A jest *przemienna*, jeżeli $ab = ba$ dla dowolnych $a, b \in A$.

Definicja 1.3. *C^*-algebrą* nazywamy algebrę Banacha A wyposażoną w działanie $^* : A \to A$, które dla dowolnych $a, b \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$ spełnia następujące warunki

$$(\lambda a + b)^* = \overline{\lambda}a^* + b^*, \quad (ab)^* = b^*a^*, \quad (a^*)^* = a,$$

oraz zachodzi tzw. *C^*-równość* $\|aa^*\| = \|a\|^2$.

Przykład 1.4 (Przemienna C^*-algebra)**.** Niech M będzie lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa. Powiemy, że funkcja $a : M \to \mathbb{C}$ *znika w nieskończoności* jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ zbiór $\{t \in M : |a(t)| \geq \varepsilon\}$ jest zwarty w M. Przestrzeń

$$C_0(M) = \{a : M \to \mathbb{C}|\ a \text{ jest ciągła i znika w nieskończoności}\}$$

jest przemienną C^*-algebrą ze względu na normę $\|a\| = \sup_{t\in M} |a(t)|$, przy czym mnożenie jest zdefiniowane punktowo zaś $*$ jest braniem funkcji sprzężonej:

$$a^*(t) := \overline{a(t)}.$$

Dzięki twierdzeniu Gelfanda-Naimarka wiemy, że wszysstkie przemienne C^*-algebry są (z dokładnością do izomorfizmu) tej postaci. Zauważmy, że $C_0(M)$ ma jedynkę wtedy i tylko wtedy gdy funkcja stała równa 1 należy do $C_0(M)$, co zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy M jest zwarta. Jeśli M jest zwarta to

$$C_0(M) = C(M) = \{a : M \to \mathbb{C}|\ a \text{ jest funkcją ciągłą}\}.$$

Przykład 1.5 (C^*-algebra operatorów ograniczonych)**.** Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Wówczas $B(H) = \{T : H \to H \text{ liniowy i ograniczony}\}$ jest C^*-algebrą z jedynką, gdzie norma jest standardową normą operatorową zaś * jest braniem operatora sprzężonego. Każda podalgebra $B(H)$ zamknięta ze względu na branie operatora sprzężonego, również jest C^*-algebrą. Twierdzenie Gelfanda-Naimarka-Segala mówi, że każda C^*-algebra jest (z dokładnością do izomorfizmu) pewną podalgebrą $B(H)$. W ogólności $*$-homomorfizm z C^*-algebry A w $B(H)$, dla pewnej przestrzeni Hilberta H jest nazywany *reprezentacją* C^*-algebry A.

Definicja 1.6. Niech A będzie C^* algebrą z jedynką. Widmem elementu $a \in A$ nazywamy zbiór

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \text{ jest elementem nieodwracalnym w } A\}.$$

Uwaga 1.7. Można pokazać, że dla dowolnego $a \in A$, $\sigma(a)$ jest niepustym zbiorem zwartym.

Definicja 1.8. Powiemy, że element a C^*-algebry A jest hermitowski, jeżeli $a^* = a$. Ponadto powiemy, że element hermitowski $a \in A$ jest dodatni, jeżeli $\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$. Zbiór elementów dodatnich A będziemy oznaczać A^+.

Elementy dodatnie A^+ tworzą stożek w A. To znaczy zbiór A^+ jest zamknięty ze względu na dodawanie i mnożenie przez nieujemne skalary. Stożek ten wprowadza na A częściowy porządek; dla $a, b \in A$ piszemy:

$$a \leq b \overset{def}{\iff} b - a \in A^+.$$

W szczególności, $a \geq 0$ oznacza, że $a \in A^+$.

Definicja 1.9. Niech A będzie C^* algebrą. Funkcjonał $\rho \in A^*$ nazywamy dodatnim jeżeli dla dowolnego $a \in A^+$, $\rho(a) \geq 0$. Ponadto funkcjonał dodatni ρ nazywamy stanem na A o ile $\|\rho\| = 1$.

Twierdzenie 1.10. *Niech $a \in A$ będzie elementem C^*-algebry A. Następujące warunki są równoważne*

1) $a \in A^+$,

2) $\exists_{b \in A^+} \quad a = b^2$,

3) $\exists_{b \in A} \quad a = b^* b$,

4) *dla dowolnego stanu ρ na A zachodzi $\rho(a) \geq 0$.*

Mówiąc o *homomorfizmach* między C^*-algebrami mamy na myśli odwzorowania liniowe, multiplikatywne i zachowujące inwolucję. Przypomnijmy, że każdy homomorfizm $\alpha : A \to B$ z C^*-algebry A do C^*-algebry B jest automatycznie kontrakcją i ma domknięty obraz - $\alpha(A)$ jest C^*-podalgebrą algebry B. Co więcej, $\alpha : A \to B$ jest injekcją wtedy i tylko wtedy, gdy jest izometrią; wtedy mówimy, że α jest włożeniem, lub *zanurzeniem* A w B.

Istnieją różne sposoby, na które można C^*-algebrę A zanurzyć w C^*-algebrze z jedynką. C^*-algebra mnożników $\mathcal{M}(A)$ algebry A jest w pewnym sensie największym ujedynkowieniem C^*-algebry A. Algebrę $\mathcal{M}(A)$ można skonstruować na wiele różnych, równoważnych sposobów, jako: algebrę centralizatorów, w sposób konkretny, lub za pomocą modułów Hilberta, patrz Przykłady 2.44, 2.46. Tutaj przypomnimy uniwersalną charakteryzację $\mathcal{M}(A)$ jako maksymalnego istotnego ujedynkowienia A.

Definicja 1.11. *Ideałem* w C^*-algebrze A nazywamy ideał dwustronny, domknięty w A. Taki ideał I jest automatycznie samosprzężony, a więc jest C^*-podalgebrą A. Ideał I nazywamy *istotnym* jeżeli dla dowolnego niezerowego ideału J w A mamy $J \cap I \neq \{0\}$.

Twierdzenie 1.12. *Dla każdej C^*-algebry A istnieje C^*-algebra z jedynką $\mathcal{M}(A)$ taka, że*

1) *A siedzi w $\mathcal{M}(A)$ jako ideał istotny, tzn. mamy włożenie $A \hookrightarrow \mathcal{M}(A)$,*

2) *jeżeli B jest C^*-algebrą z jedynką oraz $A \hookrightarrow B$ siedzi w B jako ideał istotny, to istnieje włożenie $B \hookrightarrow \mathcal{M}(A)$ takie, że złożenie włożeń $A \hookrightarrow B \hookrightarrow \mathcal{M}(A)$ pokrywa się z włożeniem z punktu 1).*

Ponadto, jeśli C jest C^*-algebrą z jedynką posiadającą powyższe własności 1) i 2), to $C \cong \mathcal{M}(A)$.

Algebrę $\mathcal{M}(A)$ z powyższymi własnościami nazywamy *algebrą mnożników* C^*-algebry A (jest ona wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do naturalnego izomorfizmu).

Przykład 1.13 (Uzwarcenie Cecha-Stone'a)**.** Jeśli A jest przemienną C^*-algebrą, to $A \cong C_0(M)$, gdzie M jest lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa. Ideały I w A są we wzajemnej jednoznaczności ze zbiorami otwartymi U w M: $I \cong C_0(U)$. Oznaczając przez βM uzwarcenie Cecha-Stone'a przestrzeni M, możemy utożsamić M z otwartym i gęstym podzbiorem βM. Wtedy $A = C_0(M)$ jest ideałem istotnym w $C(\beta M)$. Z uniwersalnej charakteryzacji uzwarcenia Cecha-Stone'a nietrudno teraz zauważyć, że

$$\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(C_0(M)) \cong C(\beta M).$$

Dlatego czasem algebrę mnożników nazywa się nieprzemiennym uzwarceniem Cecha-Stone'a.

Rozdział 2

Moduły Hilberta

2.1 C^*-moduły Hilberta

Przestrzeń Hilberta, lub ogólniej przestrzeń unitarna, jest to przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{C}$ wraz z iloczynem wewnętrznym przyjmującym wartości w $\mathbb{C}$. Zauważmy, że ciało liczb zespolonych $\mathbb{C}$ jest jednowymiarową C^*-algebrą. Idea leżąca u podstaw pojęcia C^*-modułu Hilberta polega na uogólnieniu przestrzeni Hilberta poprzez zastąpienie $\mathbb{C}$ dowolną C^*-algebrą A. Jako że C^*-algebra A jest pierścieniem, a nie ciałem[1], takie uogólnienie prowadzi w sposób nieunikniony do pojęcia modułu.

Zatem podstawową strukturą w tym rodziale będzie prawostronny moduł X nad C^*-algebrą A. To znaczy X jest grupą abelową, z działaniem $+ : X \times X \longrightarrow X$, wraz z określonym odwzorowaniem "prawego mnożenia przez elementy A" $\cdot : X \times A \longrightarrow X$ spełniającego standardowe prawa rozdzielności i łączności:

$$(x+y)\cdot a = x\cdot a + y\cdot a, \qquad x\cdot(a+b) = x\cdot a + x\cdot b, \qquad x\cdot(ab) = (x\cdot a)\cdot b,$$

dla $a, b \in A$, $x, y \in X$. W dalszej części będziemy pomijać znak "$\cdot$". Konwencja by rozpatrywać prawe moduły ma swoje uzasadnienie. Po pierwsze, pozwala ona w sposób wyraźny odróżnić sytuację modułów od sytuacji przestrzeni liniowych, gdzie mnożenie przez skalar zapisujemy z lewej strony. Po drugie prawostronny zapis mnożenia w modułach lepiej współgra z iloczynami wewnętrznymi (które są liniowe ze względu na drugą współrzędną).

Podkreślmy tu, iż w literaturze [21], [18], [24], [11], w definicji modułu hilbertowskiego zakłada się de facto, że prawy A-moduł X jest dodatkowo przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$ oraz, że struktura liniowa X jest kompatybilna ze strukturą liniową C^*-algebry A. W tym rozdziale pokażemy jednak, że istnienie takiej struktury liniowej na X wynika z istnienia iloczynu wewnętrznego. Dzięki temu wynikowi nasza "nowa" definicja modułu hilbertowskiego

[1] A jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy $A = \mathbb{C}$

się upraszcza i jest dokładnym odzwierciedleniem wspomnianej wyżej idei by "$\mathbb{C}$ zastąpić przez A".

Definicja 2.1. Niech X będzie prawym A-modułem nad C^*-algebrą A (nie zakładamy tu struktury liniowej na X). *Nieujemną A-formą hermitowską* na X nazywamy odwzorowanie $\langle\cdot|\cdot\rangle_A : X \times X \to A$ o następujących własnościach

1) $\langle z|xa + yb\rangle_A = \langle z|x\rangle_A a + \langle z|y\rangle_A b$ (*liniowość na drugiej współrzędnej*)
2) $\langle x|y\rangle_A = \langle y|x\rangle_A^*$, (*antysymetria*)
3) $\langle x|x\rangle_A \geq 0$, (*dodatnio-określoność*)

gdzie $x, y, z \in X$, $a, b \in A$. Przy czym warunek 3) oznacza, że $\langle x|x\rangle_A$ jest elementem dodatnim w C^*-algebrze A. Jeśli dodatkowo spełniony jest warunek

4) $\langle x|x\rangle_A = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ (*niezdegenerowaność*)

dla każdego $x \in X$, to $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ nazywamy *A-iloczynem wewnętrznym.*

Uwaga 2.2. Podobnie jak powyżej definiuje się A-formę hermitowską na lewych A-modułach: jedyna różnica polega na tym, że dla A-formy ${}_A\langle\cdot,\cdot\rangle$ na lewym A-module zakłada się A-liniowość w pierwszym argumencie. Każdemu prawemu A-modułowi X z A-formą $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ odpowiada *sprzężony lewy A-moduł* $X^\star := \{x^\star : x \in X\}$, gdzie

$$x^\star + y^\star := (x+y)^\star, \qquad a \cdot x^\star := (x \cdot a^*) \qquad {}_A\langle x^\star, y^\star\rangle := \langle x, y\rangle_A,$$

dla $x, y \in X, a \in A$. Definiując podobnie sprzężenie do lewego A-modułu, otrzymujemy $(X^\star)^\star = X$.

Lemat 2.3. *Każda A-forma hermitowska na prawym A-module jest "anty A-liniowa" na pierwszej współrzędnej, tzn.*

$$\langle xa \pm yb|z\rangle_A = a^*\langle x|z\rangle_A \pm b^*\langle z|y\rangle_A \qquad \textit{dla } x, y, z \in X,\ a, b \in A.$$

DOWÓD. Korzystając z A-liniowości na drugiej współrzędnej mamy $\langle x|z\rangle_A + \langle x|-z\rangle_A = \langle x|z-z\rangle_A = \langle x|0\rangle_A = \langle x|0\rangle_A 0 = 0$. Zatem

$$\langle x|-z\rangle_A = -\langle x|z\rangle_A.$$

Stąd i z antysymetrii $\langle xa \pm yb|z\rangle_A = \langle z|xa \pm yb\rangle_A^* = (\langle z|x\rangle_A a \pm \langle z|y\rangle_A b)^* = a^*\langle x|z\rangle_A \pm b^*\langle z|y\rangle_A$. □

Oczywistym przykładem $\mathbb{C}$-modułu z określonym $\mathbb{C}$-iloczynem wewnętrznym jest przestrzeń unitarna. Kluczową rolę w badaniu tej struktury pełni nierówność Schwarza. Okazuje się, że nierówność ta ma swój analog również w naszym ogólnym przypadku:

Stwierdzenie 2.4. *Niech X będzie A-modułem nad C^*-algebrą A i niech $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ będzie nieujemną A-formą hermitowską na X. Dla dowolnych $x, y \in X$ mamy*

$$\langle x|y\rangle_A \langle y|x\rangle_A \leq \|\langle y, y\rangle_A\| \langle x|x\rangle_A \tag{2.1.1}$$

(nierówność ta zachodzi względem częściowego porządku określonego w A).

DOWÓD. Przypomnijmy, że element $a \in A$ jest dodatni wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego stanu ϱ na A zachodzi $\varrho(a) \geq 0$. Niech więc ϱ będzie stanem na A. Wówczas dla dowolnych $x, y \in X$, $a \in A$, zachodzi

$$0 \leq \varrho(\langle x - ya|x - ya\rangle_A) = \varrho(\langle x|x\rangle_A) - 2\mathrm{Re}\varrho(\langle x|y\rangle_A a) + \varrho(a^* \langle y|y\rangle_A a).$$

Kładąc $a = \langle y|x\rangle_A t$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ otrzymujemy

$$0 \leq \varrho(\langle x|x\rangle_A) - 2t\varrho(\langle x|y\rangle_A \langle y|x\rangle_A) + t^2 \varrho(\langle x|y\rangle_A \langle y|y\rangle_A \langle y|x\rangle_A).$$

Zauważmy, że prawa strona powyższego wyrażenia jest funkcją kwadratową od t. Zatem jej wyróżnik musi być nieujemny, a stąd

$$\begin{aligned}\varrho(\langle x|y\rangle_A \langle y|x\rangle_A)^2 &\leq \varrho(\langle x|x\rangle_A)\varrho(\langle x|y\rangle_A \langle y|y\rangle_A \langle y|x\rangle_A) \\ &\leq \|\langle y|y\rangle_A\| \varrho(\langle x|x\rangle_A)\varrho(\langle x|y\rangle_A \langle y|x\rangle_A).\end{aligned}$$

Dzieląc obustronnie przez $\varrho(\langle x|y\rangle_A \langle y|x\rangle_A)$ (jeżeli $\varrho(\langle x|y\rangle_A \langle y|x\rangle_A) = 0$ nierówność jest oczywiście spełniona) otrzymujemy szukaną nierówność. □

Wniosek 2.5. *Niech $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ będzie nieujemną A-formą hermitowską na A-module X. Połóżmy*

$$\|x\| := \sqrt{\|\langle x|x\rangle_A\|}, \qquad \text{dla } x \in X. \tag{2.1.2}$$

Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzą nierówności

1) $\|\langle x|y\rangle_A\| \leq \|x\|\|y\|$ *(nierówność Schwartza),*

2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(nierówność trójkąta).*

W szczególności odwzorowanie $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ dane wzorem

$$d(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{\|\langle x - y|x - y\rangle_A\|} \tag{2.1.3}$$

jest półmetryką na X i jeśli $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ jest iloczynem wewnętrznym, to d jest metryką.

DOWÓD. Przypomnijmy, iż nierówność $a \leq b$ w C^*-algebrze A pociąga za sobą, że $\|a\| \leq \|b\|$. Zatem stosując C^*-równość oraz nierówność (2.1.1) dostajemy

$$\|\langle x|y\rangle_A\|^2 = \|\langle x|y\rangle_A \langle y|x\rangle_A\| \leq \|x\|^2 \|y\|^2,$$

co dowodzi punktu 1). Korzystając z właśnie udowodnionej nierówności oraz z nierówności trójkąta normy w A otrzymujemy

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|\langle x+y|x+y\rangle_A\| \le \|\langle x|x\rangle_A\| + 2\|\langle x|y\rangle_A\| + \|\langle y|y\rangle_A\| \\ &\le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

To dowodzi punktu 2). Ostatnia część tezy wynika łatwo z 2). □

Od tej pory każdy A-moduł wraz z określoną na nim nieujemną A-formą hermitowską będziemy rozważać jako *przestrzeń topologiczną*, z topologią zadaną przez półmetrykę (2.1.3).

Lemat 2.6. *Niech X będzie prawym A-modułem z A-iloczynem wewnętrznym. Wówczas zarówno dodawanie $+ : X \times X \longrightarrow X$, prawostronne mnożenie $\cdot : X \times A \longrightarrow X$ jak i A-forma $\langle\cdot|\cdot\rangle_A : X \times X \longrightarrow A$ są funkcjami ciągłymi.*

Dowód. Ciągłość dodawania wynika wprost z niezmienniczości półmetryki ze względu na przesunięcia. Dalej zauważmy, że dla $x \in X$ i $a \in A$ mamy

$$\|xa\|^2 = \|\langle xa|xa\rangle_A\| = \|a^*\langle x|x\rangle_A a\| \le \|a\|^2\|\langle x|x\rangle_A\| = \|a\|^2\|x\|^2.$$

Zatem korzystając z nierówności trójkąta mamy

$$\|xa - yb\| \le \|x-y\|\|a\| + \|y\|\|a-b\|,$$

co implikuje ciągłość odwzorowania $\cdot : X \times A \longrightarrow X$. Dalej korzystając z nierówności Schwarza i nierówności trójkąta, dla $x, y, x', y' \in X$ mamy

$$\|\langle x|y\rangle - \langle x'|y'\rangle_A\| = \|\langle x|y-y'\rangle - \langle x'-x|y'\rangle_A\| \le \|x\|\|y-y'\| + \|y\|\|x'-x\|. \quad (2.1.4)$$

Nierówność ta implikuje ciągłość odwzorowania $\langle\cdot|\cdot\rangle_A : X \times X \longrightarrow A$. □

Definicja 2.7. (Prawym) *C^*-modułem Hilberta nad A* lub (prawym) *A-modułem Hilberta* nazywamy prawy A-moduł X z A-iloczynem wewnętrznym $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ takim, że wraz z metryką daną wzorem (2.1.3) przestrzeń X jest zupełna.

Następujące stwierdzenie mówi, że każdy moduł z iloczynem wewnętrznym jest *topologicznie niezdegenerowany*, tzn. elementy postaci xa, $x \in X$, $a \in A$ tworzą zbiór gęsty w X. Co więcej, jeśli A ma jedynkę, to moduł taki jest w rzeczywistości *algebraicznie niezdegenerowany*, tzn. $X = \{xa : x \in X, a \in A\}$. To samo zachodzi, gdy X jest przestrzenią zupełną, patrz Wniosek 2.12

Stwierdzenie 2.8. *Jeśli X jest prawym A-modułem z A-iloczynem wewnętrznym, to $X = \overline{\{xa : x \in X, a \in A\}}$. W szczególności, jeśli A ma jedynkę 1, to $x1 = x$ dla $x \in X$.*

DOWÓD. Niech $\{u_i\}_{i\in I}$ będzie jedynką aproksymatywną w A. Dla każdego $x \in X$ mamy

$$\langle x - xu_i, x - xu_i\rangle_A = \langle x, x\rangle_A - \langle x, x\rangle_A u_i - u_i\langle x, x\rangle_A + u_i\langle x, x\rangle_A u_i \longrightarrow 0.$$

Zatem elementy postaci xu_i, $x \in X$, $i \in I$, tworzą zbiór gęsty w X. To implikuje pierwszą część tezy. Druga część wynika z ciągłości mnożenia, patrz Lemat 2.6, oraz faktu, że 1 działa (z prawej strony) na gęstym podzbiorze jak identyczność. Alternatywnie, w pierwszej części dowodu wystarczy wziąć $\{1\}$ w miejsce $\{u_i\}_{i\in I}$ □

Załóżmy teraz, że X jest prawym A-modułem gdzie A jest algebrą z jedynką $1 \in A$. Wtedy na X możemy określić mnożenie przez skalar wzorem

$$(\lambda x) := x(\lambda 1), \quad x \in X, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

W ten sposób X staje się przestrzenią liniową, w której mnożenie przez skalar jest kompatybilne z mnożeniem modułów, tzn.

$$\lambda(xa) = (\lambda x)a = x(\lambda a) \qquad \text{dla } x \in X,\ \lambda \in \mathbb{C}, a \in A. \tag{2.1.5}$$

Zauważmy, że jeżeli $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ jest A-formą hermitowską na X, to (2.1.5) implikuje, że $\langle\cdot|\cdot\rangle_A : X \times X \to X$ jest formą liniową ze względu na drugą i anty-liniową ze względu na pierwszą współrzędną (takie formy będziemy nazywać *półtoraliniowymi*). Co więcej, w świetle Stwierdzenia 2.8, jeśli X jest wyposażony w A-wartościowy iloczyn wewnętrzny, to relacje (2.1.5) determinują jednoznacznie rozważane mnożenie przez skalar. Dla C^*-modułów Hilberta nad dowolną, niekoniecznie jedynkową, C^*-algebrą A mamy:

Twierdzenie 2.9. *Każdy A-moduł Hilberta X można wyposażyć w mnożenie przez skalar spełniające* (2.1.5). *Mnożenie to jest wyznaczone jednoznacznie.*

Z tym mnożeniem X staje się przestrzenią Banacha, (2.1.2) *jest normą, a $\langle\cdot|\cdot\rangle_A : X \times X \to X$ jest formą półtoraliniową.*

DOWÓD. Jednoznaczność mnożenia skalarnego spełniającego (2.1.5) wynika ze Stwierdzenia 2.8 i ciągłości mnożenia modułowego, patrz Lemat 2.6. Aby wykazać istnienie żądanego mnożenia ustalmy jedynkę aproksymatywną $\{u_i\}_{i\in I}$ w A. Niech $x \in X$ oraz $\lambda \in \mathbb{C}$. Zauważmy, że sieć $\{x(\lambda u_i)\}_{i\in I}$ spełnia warunek Cauchy. Rzeczywiście,

$$\begin{aligned}\|x(\lambda u_i) - x(\lambda u_j)\|^2 &= \|\langle x(\lambda u_i) - x(\lambda u_j)|x(\lambda u_i) - x(\lambda u_j)\rangle_A\| \\ &\le 2|\lambda|^2\|\langle x|x\rangle_A u_i - \langle x|x\rangle_A u_j\| \xrightarrow{i,j\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Zatem na mocy zupełności X istnieje granica

$$\lambda x := \lim_{i\in I} x(\lambda u_i). \tag{2.1.6}$$

Jasne jest, że skonstruowane w ten sposób odwzorowanie $\mathbb{C}\times X \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x \in X$ spełnia (2.1.5). Korzystając ze wzoru (2.1.6) łatwo sprawdzić rozdzielność dodawania względem mnożenia, półtoraliniowość formy i jednorodność normy. □

Przypomnijmy, iż (prawym) *modułem Banacha* nad algebrą Banacha A nazywa się przestrzeń Banacha X wraz z ciągłą funkcją dwuliniową $\cdot : X \times A \to X$ zadającą na X strukturę (prawego) modułu nad A.

Wniosek 2.10. *Każdy A-moduł Hilberta jest modułem Banacha.*

Twierdzenie Hewitta-Cohena o Faktoryzacji zachodzi dla modułów Banacha nad algebrami Banacha z jedynką aproksymatywną, patrz np. [17]. My sformułujemy je, gdy A jest C^*-algebrą (co ciekawe twierdzenie to można wtedy dowieść korzystając z teorii modułów Hilberta, patrz [24, Proposition 2.33]).

Twierdzenie 2.11 (Twierdzenie Cohena-Hewitta o Faktoryzacji)**.** *Niech X będzie prawym modułem Banacha nad C^*-algebrą A. Jeżeli X jest topologicznie niezdegenerowany, to jest on niezdegenerowany algebraicznie, tzn. $X = \overline{\{xa : x \in X, a \in A\}}$ implikuje, że $X = \{xa : x \in X, a \in A\}$.*

Wniosek 2.12. *Jeśli X jest A-modułem Hilberta, to $X = \{xa : x \in X, a \in A\}$.*

DOWÓD. Na mocy Wniosku 2.10 i Stwierdzenia 2.8 możemy zastosować Twierdzenie 2.11. □

2.2 Konstrukcje modułów Hilberta

Każdy A-moduł z A-wartościowym iloczynem wewnętrznym uzupełnia się do A-modułu Hilberta.

Stwierdzenie 2.13 (Uzupełnienie)**.** *Niech X_0 będzie A-modułem z A-iloczynem wewnętrznym. Niech X będzie uzupełnieniem X_0 w metryce* (2.1.3)*. Wtedy X jest A-modułem Hilberta zawierającym $X_0 \subseteq X$ jako gęsty A-podmoduł. Mianowicie, operacje w X, dla $x, y \in X$ i $a \in A$, dane są wzorami*

$$x + y := \lim_{n\to\infty} x_n + y_n, \qquad xa = \lim_{n\to\infty} x_n a, \qquad \langle x, y\rangle_A = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle_A, \quad (2.2.1)$$

gdzie $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subseteq X_0$ są dowolnymi ciągami takimi, że $x_n \to x$ i $y_n \to y$.

DOWÓD. Niech $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subseteq X_0$ takie, że $x_n \to x$ i $y_n \to y$ w X. Nietrudno zauważyć, że ciągi $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n a\}$ oraz $\{\langle x_n, y_n\rangle_A\}$ są ciągami Cauchy; na przykład korzystając z (2.1.4) mamy

$$\|\langle x_n|y_n\rangle - \langle x_m|y_m\rangle_A\| \le \|x_n\|\|y_n - y_m\| + \|x_m - x_n\|\|y_m\| \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

gdyż ciągi $\{\|x_n\|\}$, $\{\|y_n\|\}$ jako zbieżne są ograniczone. Zatem granice w (2.2.1) istnieją (i nie zależą od wyboru ciągów $x_n \to x$ i $y_n \to y$). Rozdzielność A-mnożenia względem dodawania, A-liniowość na drugiej współrzędnej oraz antysymetria odwzorowania $\langle\cdot|\cdot\rangle_A : X \times X \to A$ wynikają wprost z (2.2.1) oraz faktu, że operacje te zachodzą w X_0. Aby pokazać dodatnio określoność zauważmy, że $\langle x|x\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n|x_n\rangle \geq 0$, jest elementem dodatnim, gdyż zbiór elementów dodatnich jest domknięty w A. Jeśli założymy, że $\langle x|x\rangle = 0$, to $\lim_{n\to\infty}\langle x_n|x_n\rangle = 0$, czyli $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, więc $x = 0$. Tym samym udowodniliśmy tezę. □

Następujący lemat wykorzystamy by wywnioskować dwie rzeczy. Po pierwsze, każdy A-moduł z nieujemną A-formą hermitowską faktoryzuje się do A-modułu z A-iloczynem wewnętrznym. Po drugie, moduły Hilberta posiadają naturalne ilorazy nad C^*-algebrami ilorazowymi.

Lemat 2.14. *Niech I będzie ideałem w C^*-algebrze A i niech X będzie prawym A-modułem z nieujemną A-formą hermitowską $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$. Wtedy*

$$N := \{x \in X : \langle x|x\rangle_A \in I\} = \{x \in X : \langle x|y\rangle_A \in I \text{ dla każdego } y \in X\} \tag{2.2.2}$$

jest domkniętym A-podmodułem X. Przestrzeń X/N jest A/I-modułem z A/I-iloczynem wewnętrznym, gdzie

$$(x+N)(a+I) := xa + N, \qquad \langle x+N|y+N\rangle_{A/I} := \langle x|y\rangle_A + I, \qquad x, y \in X.$$

Odległość ilorazowa na X/N pokrywa się z metryką zadaną przez $\langle\cdot|\cdot\rangle_{A/I}$.

DOWÓD. Niech $N := \{x \in X : \langle x|x\rangle_A \in I\}$. Inkluzja $\{x \in X : \langle x|y\rangle_A \in I \text{ dla wszystkich } y \in X\} \subseteq N$ jest jasna. By wykazać inkluzję przeciwną weźmy $x \in N$ i $y \in X$. Na mocy (2.1.1) mamy $\langle x|y\rangle_A(\langle x|y\rangle_A)^* \leq \|\langle y,y\rangle_A\|\,\langle x|x\rangle_A \in I$. Zatem $\langle x|y\rangle_A \in I$, patrz np. [22, Proposition 1.4.5]. Czyli zachodzi równość w (2.2.2). Stąd otrzymujemy natychmiast $N + N \subseteq N$. Jasne jest także, że $N \cdot A \subseteq N$. Zbiór N jest domknięty na mocy ciągłości A-formy. Zatem N jest domkniętym A-podmodułem modułu X. Skoro $\{x \cdot i : x \in X, i \in I\} \subseteq N$, to prawe działanie A/I na X/N jest poprawnie określone. Korzystając z (2.2.2) otrzymujemy, że produkt wewnętrzny na X/N jest poprawnie określony (niezdegenerowaność wynika wprost z konstrukcji).

By wykazać ostatnią część tezy, niech $\|x+N\|$ oznacza "normę" indukowaną przez A/I-iloczyn wewnętrzny i niech $\|x+N\|_{X/N}$ będzie "normą ilorazową". To znaczy,

$$\|x+N\|^2 = \inf_{i\in I}\|\langle x,x\rangle_A - i\| \quad \text{oraz} \quad \|x+N\|^2_{X/N} = \inf_{y\in N}\|\langle x-y, x-y\rangle_A\|.$$

Jako że $\langle x-y, x-y\rangle_A = \langle x,x\rangle_A - i$ dla $i := \langle y,y\rangle_A - \langle x,y\rangle_A - \langle y,x\rangle_A \in I$, to $\|x+N\| \leq \|x+N\|_{X/N}$. By wykazać nierówność przeciwną przypomnijmy, iż dla dowolnej jedynki aproksymatywnej $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ w I, dla każdego $a \in A$

mamy $\inf_{i\in I}\|a-i\| = \lim_{\lambda\in\Lambda}\|a-au_\lambda\|$, patrz np. [22, 1.5.4]. Zauważmy też, że $\|u_\lambda a - u_\lambda a u_\lambda\| \leq \|\mu_\lambda\|\|a-au_\lambda\| \to 0$. Zatem

$$\begin{aligned}\|x+N\|^2 &= \lim_{\lambda\in\Lambda}\|\langle x,x\rangle_A - \langle x,x\rangle_A u_\lambda\Big)\|\\ &= \lim_{\lambda\in\Lambda}\|\langle x,x\rangle_A - \langle x,x\rangle_A u_\lambda - \Big(u_\lambda\langle x,x\rangle_A + u_\lambda\langle x,x\rangle_A u_\lambda\Big)\|\\ &= \lim_{\lambda\in\Lambda}\|\langle x-xu_\lambda, x-xu_\lambda\rangle_A\| \leq \|x+N\|^2_{X/N},\end{aligned}$$

gdzie nierówność zachodzi, gdyż $\{x\cdot i : x\in X, i\in I\}\subseteq N$. □

Wniosek 2.15 (Eliminacja wektorów izotropowych). *Każda nieujemna A-formą hermitowska $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ na X faktoryzuje się do A-iloczynu wewnętrznego na X/N gdzie $N := \{x\in X : \langle x|x\rangle_A = 0\}$. To znaczy X/N jest modułem ilorazowym z prawym działaniem $(x+N)a := xa + N$ i A-iloczynem wewnętrznym*

$$\langle x+N|y+N\rangle_A := \langle x|y\rangle_A, \qquad x,y\in X.$$

DOWÓD. Wystarczy zastosować Lemat 2.14 dla ideału $I = \{0\}$. □

Wniosek 2.16 (Ilorazowe moduły Hilberta). *Niech X będzie prawym A-modułem z A-iloczynem wewnętrznym. Dla każdego ideału I w A mamy*

$$\begin{aligned}XI := \overline{\{x\cdot i : x\in X, i\in I\}} &= \{x\in X : \langle x|x\rangle_A \in I\}\\ &= \{x\in X : \langle x|y\rangle_A\in I \text{ dla każdego } y\in X\}\end{aligned}$$

Jeśli X jest A-modułem Hilberta, to $XI = \{x\cdot i : x\in X, i\in I\}$ i moduł ilorazowy X/XI jest modułem Hilberta nad A/I.

DOWÓD. Z Lematu 2.14 wiemy, że $N = \{x\in X : \langle x|x\rangle_A\in I\} = \{x\in X : \langle x|y\rangle_A \in I$ dla każdego $y\in X\}$ i jest to zbiór domknięty w X. Możemy go traktować jako I-moduł z I-iloczynem wewnętrznym. Zatem $N = XI = \overline{\{x\cdot i : x\in X, i\in I\}}$ na mocy Stwierdzenia 2.8. Jeśli dodatkowo X jest zupełny, to $N = XI$ jest I-modułem Hilberta, a zatem $XI = \{x\cdot i : x\in X, i\in I\}$ w świetle Wniosku 2.12. Przypomnijmy, patrz Twierdzenie 2.9, że X jest przestrzenią Banacha. Wtedy XI jest domkniętą podprzestrzenią liniową X. Skoro norma na X/XI jest standardową normą ilorazową dla przestrzeni Banacha, patrz ostatnia część Lematu 2.14, to zupełność X/XI wynika, ze znanego faktu, że przestrzeń ilorazowa przestrzeni Banacha przez podprzestrzeń Banacha jest przestrzenią Banacha. □

Oczywiście każdy domknięty A-podmoduł A-modułu Hilberta X jest również w naturalny sposób A-modułem Hilberta - *podmodułem Hilberta* modułu X. Zauważmy, że podmoduł XI we Wniosku 2.16 możemy traktować zarówno jako A-moduł za A-iloczynem wewnętrznym jak i I-moduł z I-iloczynem wewnętrznym. Aby wyjaśnić ogólnie możliwość obcięcia i rozszerzenia algebry współczynników wprowadźmy następującą:

Definicja 2.17. Powiemy, że A-moduł Hilberta X, lub też, że określony na nim A-iloczyn wewnętrzny $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$, jest *pełny* jeżeli $\langle X|X\rangle_A = A$, gdzie

$$\langle X|X\rangle_A := \overline{\operatorname{span}}\{\langle x|y\rangle_A : x, y \in X\}.$$

Lemat 2.18 (Obcięcie algebry współczynników). *Dla każdego A-modułu Hilberta X, przestrzeń $\langle X|X\rangle_A$ jest ideałem w C^*-algebrze A. Dla każdej C^*-algebry B takiej, że $\langle X|X\rangle_A \subseteq B \subseteq A$, możemy X traktować jako B-moduł Hilberta. W szczególności, X jest pełny, gdy traktować go jako $\langle X|X\rangle_A$-moduł.*

DOWÓD. To że $\langle X|X\rangle_A$ jest ideałem w A wynika natychmiast stąd, że $a\langle x|y\rangle_A b = \langle xa^*|yb\rangle_A$ dla $x, y \in X$, $a, b \in A$. Pozostała część tezy jest oczywista. □

Lemat 2.19 (Rozszerzenie algebry współczynników). *Załóżmy, że X jest A-modułem Hilberta, gdzie A jest ideałem w C^*-algebrze B. A-mnożenie na X przedłuża się w jednoznaczny sposób do B-mnożenia tak, że X jest B-modułem Hilberta z iloczynem wewnętrznym $\langle x|y\rangle_B := \langle x|y\rangle_A \in A \subseteq B$ dla $x, y \in X$.*

DOWÓD. Niech $\{\mu_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ będzie jedynką aproksymatywną w A. W świetle Wniosku 2.12. Jeśli prawe A-mnożenie się przedłuża do B-mnożenia to musi być zadane wzorem $xb := \lim_\lambda x(\mu_\lambda b)$ dla $x \in X$, $b \in B$. Aby wykazać, że granica $\lim_\lambda x(\mu_\lambda b)$ zawsze istnieje wystarczy pokazać, że $\{x(\mu_\lambda b)\}_{\lambda\in\Lambda}$ jest siecią Cauchy, co sprawdza się analogicznie jak w dowodzie Twierdzenie 2.9. Proste rachunki pokazują, że z tak określonym B-mnożeniem, X jest B-modułem. Również B-liniowość iloczynu wewnętrznego jest łatwa do sprawdzenia: $\langle x|yb\rangle_B = \langle x|\lim_\lambda y(\mu_\lambda b)\rangle_A = \lim_\lambda\langle x|y\rangle_A(\mu_\lambda b) = \lim_\lambda(\langle x|y\rangle_A\mu_\lambda)b = \langle x|y\rangle_A b$. □

Mamy również naturalne pojęcie sumy prostej modułów Hilberta. Przyjmujemy tu następującą konwencję dotyczącą zbieżności szeregu. Dla dowolnej rodziny $\{a_i\}_{i\in I}$ elementów w przestrzeni Banacha E, oznaczamy przez $F(I)$ rodzinę skończonych podzbiorów zbioru I. Rodzina $F(I)$ jest naturalnie skierowna ze względu na inkluzję. Jeżeli sieć $\{\sum_{i\in F} a_i\}_{F\in F(I)}$ jest zbieżna, to jej granicę oznaczamy przez $\sum_{i\in I} a_i$ i mówimy, że *szereg* $\sum_{i\in I} a_i$ *jest zbieżny* w E. W szczególności szereg $\sum_{i\in I} a_i$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $U \in F(I)$ taki, że dla dowolnego skończonego podzbioru $F \subseteq I \setminus U$ mamy $\|\sum_{i\in F} a_i\| < \varepsilon$.

Stwierdzenie 2.20. *(Suma prosta) Niech $\{X_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną A-modułów Hilberta. Zbiór*

$$\bigoplus_{i\in I} X_i := \{(x_i) \in \prod_{i\in I} X_i : \textit{szereg } \sum_{i\in I}\langle x_i, x_i\rangle_A \textit{ jest zbieżny w } A\}$$

wraz z działaniami

$$(x_i) + (y_i) := (x_i + y_i), \quad (x_i)a := (x_i a), \quad \langle (x_i), (y_i)\rangle_A = \sum_{i\in I}\langle x_i, y_i\rangle_A$$

gdzie $(x_i), (y_i) \in \bigoplus_{i\in I} X_i$, $a \in A$, jest A-modułem Hilberta.

DOWÓD. Niech $F \in F(I)$. Jasne jest, że skończona suma prosta $\bigoplus_{i\in F} X_i$ wraz z powyżej określonymi działanimi jest prawym A-modułem z A-iloczynem wewnętrznym. Zatem dla "normy" w tej sumie zachodzi nierówność trójkąta. Zatem dla dowolnych $(x_i),(y_i) \in \bigoplus_{i\in I} X_i$ mamy

$$\|\sum_{i\in F}\langle x_i+y_i, x_i+y_i\rangle_A\| \le \|\sum_{i\in F}\langle x_i, x_i\rangle_A\| + \|\sum_{i\in F}\langle y_i, y_i\rangle_A\|.$$

Dla F leżącego poza dostatecznie dużym zbiorem z $F(I)$ prawe strony powyższej nierówności będą dowolnie małe. Czyli szereg $\sum_{i\in F}\langle x_i+y_i, x_i+y_i\rangle_A$ jest zbieżny, tzn. $(x_i)+(y_i) \in \bigoplus_{i\in I} X_i$. Analogicznie z nierówności Schwartza w $\bigoplus_{i\in F} X_i$:

$$\|\sum_{i\in F}\langle x_i, y_i\rangle_A\| \le \|\sum_{i\in F}\langle x_i, x_i\rangle_A\| \cdot \|\sum_{i\in F}\langle y_i, y_i\rangle_A\|$$

wynika, że szereg $\sum_{i\in I}\langle x_i, y_i\rangle_A$ jest zbieżny, tzn. A-forma jest poprawnie określona. Podobnie, dla $a \in A$, nierówność

$$\|\sum_{i\in F}\langle x_i a, x_i a\rangle_A\| = \|a^* \sum_{i\in F}\langle x_i, x_i\rangle_A a\| \le \|a\|^2 \|\sum_{i\in F}\langle x_i, x_i\rangle_A\|$$

implikuje, iż prawe A-mnożenie jest poprawnie określone. Sprawdzenie, że $\bigoplus_{i\in I} X_i$ jest prawym A-modułem z A-iloczynem wewnętrznym nie nastręcza trudnośći. Potrzebujemy jeszcze tylko wykazać zupełność.

Niech $x^n = (x_i^n) \in \bigoplus_{i\in I} X_i$ dla $n \in \mathbb{N}$ będzie ciągiem Cauchy w $\bigoplus_{i\in I} X_i$. Dla każdego $(x_i) \in \bigoplus_{i\in I} X_i$ oraz $i_0 \in I$ mamy $\|x_{i_0}\| \le \|(x_i)\|$. Stąd wynika natychmiast, że dla każdego $i \in I$ ciąg $\{x_i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy w X_i, a zatem jest zbieżny do pewnego elementu $x_i^0 \in X_i$. Potrzebujemy pokazać, że $x^0 := (x_i^0)$ należy do $\bigoplus_{i\in I} X_i$ oraz że ciąg $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega do x^0 w $\bigoplus_{i\in I} X_i$.

Weźmy dowolny $\varepsilon > 0$. Niech N będzie takie, że $\|x^M - x^N\| < \varepsilon/3$ dla każdego $M \ge N$. Niech zbiór $U \in F(I)$ będzie taki, że dla każdego $F \in F(I)$ zawartego w $I \setminus U$ mamy $\|\sum_{i\in F}\langle x_i^N, x_i^N\rangle_A\| \le \varepsilon/3$. Niech $F \in F(I)$ będzie zawarty w $I \setminus U$. Wprowadźmy oznacznie $\|(x_i)\|_F := \sqrt{\|\sum_{i\in F}\langle x_i, x_i\rangle_A\|}$ - jest to "norma rzutu" elementu $(x_i) \in \bigoplus_{i\in I} X_i$ na podmoduł $\bigoplus_{i\in F} X_i$. Zauważmy, że $\|(x_i)\|_F^2 \le \sum_{i\in F}\|x_i\|^2$. Stąd i z konstrukcji x^0, dla dostatecznie dużego $M \ge N$ mamy $\|x^0 - x^M\|_F < \varepsilon/3$. Reasumując dostajemy

$$\|x^0\|_F \le \|x^0 - x^M\|_F + \|x^M - x^N\|_F + \|x^N\|_F < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

To dowodzi zbieżności szeregu $\sum_{i\in I}\langle x_i^0, x_i^0\rangle_A$. Zatem $x^0 \in \bigoplus_{i\in I} X_i$.

Aby wykazać, że x^n zbiega do x^0 wystarczy pokazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje N takie, że dla dowolnego $F \in F(I)$ zachodzi $\|x^N - x^0\| < \varepsilon$. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje N takie, że $\|x^N - x^M\| < \varepsilon/2$ dla każdego $M \ge N$. Tym bardziej $\|x^N - X^M\|_F < \varepsilon/2$ dla każdego $M \ge N$ oraz $F \in F(I)$. Dla każdego $F \in F(I)$ istnieje M takie, że $\|x^0 - x^M\|_F < \varepsilon/2$. Stąd

$$\|x^N - x^0\|_F \le \|x^N - x^M\|_F + \|x^M - x^0\|_F < \varepsilon,$$

co kończy dowód stwierdzenia. □

2.3 Przykłady modułów Hilberta

Przykład 2.21 (Przestrzeń Hilberta)**.** Przestrzenie Hilberta są niczym innym jak modułami Hilberta nad $\mathbb{C}$, czyli C^*-algebrą wymiaru jeden.

Przykład 2.22 (C^*-algebry)**.** Każdą C^*-algebrę A możemy w naturalny sposób traktować jako A-moduł Hilberta wraz z operacjami odziedziczonymi z A. Mianowicie, na przestrzeni liniowej $A_A := A$ wyposażamy prawe mnożenie odziedziczone z A oraz A-wartościowy iloczyn wewnętrzny dany wzorem

$$\langle x, y \rangle_A := x^* y, \qquad x, y \in A_A.$$

Zauważmy, że $\|x\|_{A_A}^2 = \|\langle x, x\rangle_A\|_A = \|x^* x\|_A = \|x\|_A^2$, tzn. norma w module A_A pokrywa się z normą w C^*-algebrze A. W szczególności, pokazuje to zupełność A_A. Moduł A_A nazywamy *trywialnym modułem Hilberta nad A*. Zauważmy, że jeżeli J jest domkniętym prawym ideałem w A, to przestrzeń $J_A := J$ jest podmodułem Hilberta modułu A_A. Każdy podmoduł Hilberta modułu A_A jest postaci J_A dla pewnego domkniętego prawego ideału w A.

Przykład 2.23 (Standardowy A-moduł Hilberta)**.** Sumę prostą przeliczalnej ilości kopii modułu trywialnego A_A oznacza się $\mathbb{H}_A := \bigoplus_{k=1}^{\infty} A_A$ i nazywa się *standardowym A-modułem*. To znaczy, por. Stwierdzenie 2.20, $\mathbb{H}_A$ jest A-modułem Hilberta, gdzie

$$\mathbb{H}_A = \{(x_k) \in \prod_{k=1}^{\infty} A : \text{szereg } \sum_{k=1}^{\infty} x_k^* x_k \text{ zbiega } A\},$$

$(x_k) + (y_k) = (x_k + y_k)$, $(x_k)a = (x_k a)$ oraz $\langle (x_k), (y_k)\rangle_A = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^* x_k$. Znaczenie standardowowego A-modułu $\mathbb{H}_A$ w teorii obrazuje słynne twierdzenie Kasparova, które mówi, że moduł $\mathbb{H}_A$ pochłania każdy przeliczalnie generowany A-moduł Hilberta. Dokładniej, mówimy, że A-moduł Banacha X jest *przeliczalnie generowany*, jeżeli istnieje ciąg elementów $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ takich, że $X = \overline{\text{span}}\{x_n a : a \in A, n \in \mathbb{N}\}$. Twierdzenie Kasparova mówi, że jeżeli X jest przeliczalnie generowanym A-modułem Hilberta to suma prosta $X \oplus \mathbb{H}_A$ jest izomorficzna z $\mathbb{H}_A$:

$$X \text{ jest przeliczalnie generowany } \Longrightarrow X \oplus \mathbb{H}_A \cong \mathbb{H}_A.$$

Przy czym mamy tu na myśli *izomorfizm A-modułów Hilberta*: dla A-modułów Hilberta piszemy $X \cong Y$ jeżeli istnieje bijekcja $\Phi : X \to Y$ zachowująca A-formy - wtedy Φ automatycznie zachowuje całą strukturę, w szczególności jest A-liniową izometrią, patrz [11, Theorem 1.1.24]. Jako wniosek otrzymujemy stwierdzenie

> *Każdy przeliczalnie generowany A-moduł Hilberta jest izomorficzny z podmodułem $\mathbb{H}_A$.*

Przykład 2.24 (Konkretne A-moduły Hilberta)**.** Załóżmy, że A jest *konkretną* C^*-algebrą, tzn. że $A \subseteq \mathcal{B}(H)$ jest C^*-algebrą operatorów działających w pewnej przestrzeni Hilberta H. Załóżmy, że $X \subseteq \mathcal{B}(H)$ jest domkniętą podprzestrzenią taką, że

$$XA \subseteq X, \qquad X^*X \subseteq A.$$

Wtedy X z dodawaniem i prawym A-mnożeniem odziedziczonym z algebry $\mathcal{B}(H)$ oraz iloczynem A-wewnętrznym zdefiniowanym, jak w Przykładzie 2.22, wzorem $\langle x, y\rangle_A := x^*y$, $x, y \in X$, jest A-modułem Hilberta. Moduły tej postaci będziemy nazywać *konkretnymi A-modułami Hilberta*. Twierdzenie Gelfanda-Naimarka-Segala, por. Przykład 1.5, uogólnia się na moduły Hilberta. To znaczy każdy A-moduł Hilberta X jest izomorficzny z pewnym konkretnym A-modułem Hilberta, patrz np. [20].

Przykład 2.25 (Konkretne $\mathbb{C}$-moduły Hilberta i algebry Cuntza)**.** Rozpatrzmy bardziej dokładnie przypadek konkretnych A-modułów Hilberta, gdy $A = \mathbb{C}$. Niech $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Na (nieskończenie wymiarowej) przestrzeni Hilberta H można skonstruować rodzinę $\{S_i\}_{i=1}^d \subseteq \mathcal{B}(H)$ izometri o wzajemnie ortogonalnych obrazach. Algebraicznie jest to równoważne następującym relacjom:

$$S_i^*S_j = 1\delta_{i,j}, \qquad \text{for all } i, j = 1, \dots, \tag{2.3.1}$$

gdzie $\delta_{i,j}$ jest deltą Kroneckera, a $1 \in \mathcal{B}(H)$ jest operatorem identycznościowym. Kładąc

$$X = \overline{\operatorname{span}}\{S_i\}_{i=1}^d \qquad \text{oraz} \qquad A = \mathbb{C}1 \subseteq \mathcal{B}(H),$$

otrzymujemy konkretny $\mathbb{C}$-moduł Hilberta (d-wymiarową przestrzeń Hilberta - operacjami odziedziczonymi z $\mathcal{B}(H)$). W szczególności, jeśli $x = \sum_{i=1}^d \lambda_i S_i$ i $y = \sum_{i=1}^d \gamma_i S_i$ należą do X dla pewnych λ_i, $\gamma_i \in \mathbb{C}$, to korzystając z (2.3.1) otrzymujemy

$$x^*y = (\sum_{i=1}^d \lambda_i S_i)^* \sum_{j=1}^d \gamma_j S_j = \sum_{i,j=1}^d \overline{\lambda_i}\gamma_j S_i^* S_j = (\sum_{i=1}^d \overline{\lambda_i}\gamma_i)1 \in A.$$

Patrząc na powyższy rachunek nietrudno jest sytaucję odwrócić. To znaczy, jeżeli $X \subseteq \mathcal{B}(H)$ jest dowolnym konkretnym ośrodkowym (przeliczalnie generowanym) modułem Hilberta nad $A = \mathbb{C}1$, to jest on powyższej postaci (wtedy X jest ośrodkową przestrzenią Hilberta, więc posiada ortonormalną bazę przeliczalną $\{S_i\}_{i=1}^d$). Co więcej, z dokładnością do izomorfizmu, każdy (ośrodkowy) $\mathbb{C}$-moduł Hilberta jest powyższej postaci, gdzie dodatkowo możemy wybrać izometrie $\{S_i\}_{i=1}^d$ tak, aby sum ich obrazów dawała całą przestrzeń H, tj.

$$\sum_{i=1}^d S_i S_i^* = 1.$$

Wtedy C^*-algebra $C^*(X) = C^*(\{S_i\}_{i=1}^d)$ generowana przez X jest niczym innym jak algebrą Cuntza $\mathcal{O}_d$, patrz [5].

Przykład 2.26 (Lokalnie trywialne wiązki wektorowe)**.** Niech M będzie zwartą przestrzenią Hausdorffa. Niech (E, π, M) będzie *lokalnie trywialną wiązką wektorową* and M, tzn.

1. E jest przestrzenią topologiczną;
2. $\pi : E \to M$ jest ciągłą surjekcją, taką, że włókno $E_t := \pi^{-1}(t)$, $t \in M$ ma strukturę przestrzeni liniowej nad $\mathbb{C}$;
3. każdy punkt $t_0 \in M$ posiada otwarte otoczenie $U \subseteq M$, dla którego istnieje $n \in \mathbb{N}$ oraz homeomorfizm $\phi : U \times \mathbb{C}^n \to \pi^{-1}(U)$ taki, że
   - $(\pi \circ \phi)(t, v) = t$ dla każdego $(t, v) \in U \times \mathbb{C}^n$
   - dla każdego $t \in M$, odwzorowanie $\mathbb{C}^n \ni v \mapsto \phi)(t, v) \in E_t$ jest izomorfizmem liniowym odpowiednich przestrzeni.

Przestrzeń ciągłych cięć wiązki E, czyli zbiór

$$\Gamma(\pi) = \{x : M \to E \text{ odwzorowanie ciągłe i } x(t) \in E_t \text{ dla każdego } t \in M\}$$

wraz z następującymi działaniami, określonymi punktowo:

$$(x + y) := x(t) + y(t), \qquad (xa)(t) = a(t)x(t)$$

gdzie $x, y \in \Gamma(\pi)$, $a \in C(M)$, jest $C(M)$-modułem. Oczywiście jest to również przestrzeń liniowa z określonym punktowo mnożeniem przez skalary z $\mathbb{C}$. Twierdzimy, że $\Gamma(\pi)$ można wyposażyć w naturalny $C(M)$-iloczyn wewnętrzny. Rzeczywiście, niech $\{U_i\}_{i=1^n}$ będzie otwartym pokryciem M takim, że dla każdego $i = 1, ..., n$ mamy homeomorfizm $\phi_i : U \times \mathbb{C}^{n_i} \to \pi^{-1}(U)$ spełniający warunki opisane w punkcie 3 powyżej. Niech $\{f_i\}_{i=1}^n$ będzie rozkładem jedynki względem pokrycia $\{U_i\}_{i=1}^n$, tzn. $f_1, ..., f_n \in C(M)$ są takie, że $0 \leq f_i \leq 1$, $\mathrm{supp} f_i := \overline{\{t \in M : f(t) \neq 0\}} \subset U$, dla każdego $i = 1, ...n$ oraz $\sum_{i=1}^n f_i = 1$, por. [27, Twierdzenie 2.13]. Dla każdego i niech $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ oznacza standardowy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta $\mathbb{C}^{n_i}$. W każdym włóknie E_t, $t \in M$, określamy iloczyn skalarny wzorem $\langle v, w \rangle_t := \sum_{i: t \in U_i} f_i(t) \langle \phi_i^{-1}(v), \phi_i^{-1}(w) \rangle_i$, $v, w \in E_t$. Wtedy wzór

$$v(t) := \langle x(t), y(t) \rangle_t, \qquad x, y \in \Gamma(\pi),\ t \in M$$

zadaje poprawnie określony $C(M)$-iloczyn wewnętrzny na $\Gamma(\pi)$. Istotnie jedynie poprawność definicji wymaga tu komentarza. Jednak wprost z konstrukcji widzimy, iż funkcja $M \ni t \mapsto \langle x, y \rangle_{C_0(M)}(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \langle \phi_i^{-1}(x(t)), \phi_i^{-1}(y(t)) \rangle_i$ jest ciągła, a więc należy do $C(M)$. Nietrudno również wykazać, że przestrzeń $\Gamma(\pi)$ w normie zadanej przez $C(M)$-iloczyn wewnętrzny jest zupełna. Zatem

> *każdej lokalnie trywialnej wiązce wektorowej nad* M *odpowiada* $C(M)$*-moduł Hilberta.*

W podrozdziale 2.5 wykażemy ogólne twierdzenie charakteryzujące dowolne moduły Hilberta nad przemiennymi C^*-algebrami za pomocą (niekoniecznie trywialnych) ciągłych wiązek przestrzeni Hilberta.

Przykład 2.27 (Odwzorowania dyskretne)**.** Niech $s : E \to V$ będzie odwzorowaniem ze zbioru E w zbiór V. Możemy traktować E oraz V jako przestrzenie topologiczne z topologią dyskretną. Wtedy $C_0(V)$ jest algebrą funkcji znikających w nieskończoności, a $C(E)$ jest po prostu algebrą funcji z E w $\mathbb{C}$. Z odwzorowaniem $s : E \to V$ wiążemy $C_0(V)$-moduł Hilberta X_s, gdzie

$$X_s := \{x \in C(E) : V \ni v \longmapsto \sum_{e \in s^{-1}(v)} |x(e)|^2 \in \mathbb{C} \text{ jest klasy } C_0(V)\},$$

jest wyposażony w strukturę liniową z $C(E)$, a struktura modułu Hilberta zadana jest wzorami

$$(x \cdot a)(e) := x(e)a(s(e)), \qquad \langle x, y\rangle_A(v) := \sum_{e \in s^{-1}(v)} \overline{x(e)}y(e),$$

gdzie $a \in C_0(V)$, $x, y \in X$, $e \in E$, $v \in V$. Poprawność powyższej definicji i zupełność przestrzeni X_s pozostawiamy czytelnikowi (patrz [16, Proposition 1.10], gdzie rozważa się ogólniejszą sytuację, gdzie $s : E \to V$ jest lokalnym homeomorfizmem pomiędzy dwoma przestrzeniami lokalnie zwartymi). W podrozdziale 2.5, patrz Wniosek 2.54, pokażemy, że każdy moduł Hilberta nad $C_0(V)$, gdzie V jest przestrzenią dyskretną, jest związany jak wyżej z pewnym odwzorowaniem dyskretnym.

2.4 Odwzorowania między C^*-modułami Hilberta

W całym niniejszym podrodziale X oraz Y są A-modułami Hilberta.

Definicja 2.28. Odwzorowanie $T : X \to Y$ nazywamy *operatorem sprzęgalnym* jeżeli istnieje odwzorowanie $T^* : Y \to X$ takie, że

$$\langle Tx, y\rangle_A = \langle x, T^*y\rangle_A, \qquad \text{dla wszystkich } x \in X,\ y \in Y. \tag{2.4.1}$$

Zbiór operatorów sprzęgalnych działających z X w Y oznaczamy przez $\mathcal{L}(X, Y)$. Przyjmujemy też oznaczenie $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$.

Uwaga 2.29. Zauważmy, że każdy element $x \in X$ jest jednoznacznie wyznaczony przez wartości $\{\langle x, z\rangle_A\}_{z \in X}$. Rzeczywiście, jeśli $\langle x, z\rangle_A = \langle y, z\rangle_A$ dla każdego $z \in X$, to kładąc $z = x - y$ otrzymujemy $0 = \langle x, z\rangle_A - \langle y, z\rangle_A = \langle x - y, z\rangle_A = \langle x - y, x - y\rangle_A$, czyli $x = y$. W szczególności z uwagi tej wynika, że jeżeli T i T^* spełniają (2.4.1), to T wyznacza T^* jednoznacznie, i vice versa.

Lemat 2.30. *Niech T i T^* spełniają* (2.4.1)*. Wtedy oba odwzorowania T oraz T^* są automatycznie ograniczonymi operatorami liniowymi komutującymi z prawym A-działaniem. Ponadto w normie operatorowej zachodzi C^*-równość: $\|T^*T\| = \|T\|^2$. W szczególności $\|T^*\| = \|T\|$.*

DOWÓD. Dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$ oraz $a \in A$ mamy

$$\begin{aligned}\langle T(x_1a + x_2)|y\rangle_A &= \langle x_1a + x_2|T^*y\rangle_A = a^*\langle x_1|T^*y\rangle_A + \langle x_2|T^*y\rangle_A \\ &= a^*\langle Tx_1|y\rangle + \langle Tx_2|y\rangle_A = \langle (Tx_1)a + Tx_2|y\rangle_A.\end{aligned}$$

W świetle Uwagi 2.29, dowodzi to, że $T(x_1a + x_2) = (Tx_1)a + Tx_2$. Czyli T jest A-liniowy. W konsekwencji T jest również $\mathbb{C}$-liniowy, patrz (2.1.6). By wykazać, że T jest ograniczony wystarczy pokazać, że wykres T jest domknięty i przywołać Twierdzenie o Wykresie Domkniętym. Załóżmy więc, że $x_n \to x_0$ w X oraz $Tx_n \to y_0$ w Y, wtedy dla dowolnego $y \in Y$, otrzymujemy

$$\langle y_0|y\rangle_A = \lim_{n\to\infty}\langle Tx_n|y\rangle_A = \lim_{n\to\infty}\langle x_n|T^*y\rangle_A = \langle x_0|T^*y\rangle_A = \langle Tx_0|y\rangle_A,$$

co implikuje $Tx_0 = y_0$, patrz Uwaga 2.29. Zatem T ograniczony. Analogicznie można wykazać ograniczoność T^*.

Korzystając z nierówności Schwartz'a otrzymujemy

$$\begin{aligned}\|T\|^2 &= \sup_{\|x\|=1}\|\langle Tx|Tx\rangle_A\| = \sup_{\|x\|=1}\|\langle x|T^*Tx\rangle_A\| \\ &\leq \sup_{\|x\|=1}\|x\|\|T^*Tx\| = \|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\|.\end{aligned}$$

Skąd $\|T\| \leq \|T^*\|$. Skoro $(T^*)^* = T$, to przez symetrię również $\|T^*\| \leq \|T\|$, czyli $\|T\| = \|T^*\|$. Stąd dostajemy, że $\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$, co implikuje, że $\|T^*T\| = \|T\|^2$. □

Stwierdzenie 2.31. *$\mathcal{L}(X,Y)$ jest podprzestrzenią Banacha przestrzeni $\mathcal{B}(X,Y)$, a $\mathcal{L}(X)$ jest podalgebrą Banacha algebry $\mathcal{B}(X)$. De facto $\mathcal{L}(X)$ wraz z inwolucją * zadaną przez* (2.4.1) *jest C^*-algebrą z jedynką.*

DOWÓD. Korzystając z własności iloczynów wewnętrznych łatwo zobaczyć, dla $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$ oraz $\lambda \in \mathbb{C}$, że odwzorowanie $\lambda T_1 + T_2$ jest sprzęgalne oraz $(\lambda T_1 + T_2)^* = \overline{\lambda}T_1^* + T_2^*$. W szczególności, $\mathcal{L}(X,Y)$ jest podprzestrzenią liniową $\mathcal{B}(X,Y)$. Aby wykazać, że jest ona domknięta zauważmy, że odwzorowanie $^* : \mathcal{L}(X,Y) \to \mathcal{L}(Y,X)$ jest izometrycznym anty-liniowym izomorfizmem, por. Lemat 2.30. Zatem jeśli $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ jest zbieżny w $\mathcal{B}(X,Y)$, to $\{T_n^*\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{L}(Y,X)$ jest zbieżny w $\mathcal{B}(Y,X)$. Oznaczając odpowiednie granice T oraz T^* mamy

$$\langle Tx|y\rangle_A = \lim_{n\to\infty}\langle T_nx|y\rangle_A = \lim_{n\to\infty}\langle x|T_n^*y\rangle_A = \langle x|T^*y\rangle_A.$$

Zatem $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. To kończy dowód pierwszej części tezy. By wykazać pozostałą część, wystarczy zauważyć, że $(TS)^* = S^*T^* \in \mathcal{L}(X)$ dla dowolnych $T, S \in \mathcal{L}(X)$, gdyż antyliniowść * pokazaliśmy powyżej, a C^*-równość zachodzi na mocy Lematu 2.30. □

Przykład 2.32 (Nie każdy ograniczony operator A-liniowy jest sprzęgalny). Niech $A = C(M)$ gdzie M jest dowolną nieskończoną zwartą przestrzenią Hausdorffa. Wtedy istnieje $t_0 \in M$ który nie jest punktem izolowanym. Niech $J = \{a \in A : a(t_0) = 0\}$ będzie ideałem maksymalnym w A odpowiadającym punktowi t_0. Rozważmy podmoduł $J = J_A$ modułu trywialnego $A = A_A$, patrz Przykład 2.22. Włożenie $T : J \to A$ (tzn. $T(a) = a$ dla $a \in J \subseteq A$) jest w oczywisty sposób A-liniową izometrią. Jednak nie jest to operator sprzęgalny. Rzeczywiście, załóżmy ad absurdum, że istnieje operator sprzężony $T^* : A \to J$. Wtedy $T^*(1) \in J$, czyli $T^*(1)$ jest funkcją ciągłą na M taką, że $T^*(1)(t_0) = 0$. Z drugiej strony, dla dowolnego $a \in J$ zachodzi

$$a^* = a^*1 = (Ta)^*1 = \langle Ta|1\rangle_A = \langle a|T^*(1)\rangle_A = a^*T^*(1).$$

Skąd wnioskujemy, że $T^*(1)(t) = 1$ dla t różnych od t_0. Zatem $T^*(1)$ jest funkcją charakterystyczną zbioru $M \setminus t_0$. Jednakże, taka funkcja nie jest ciągła, gdy t_0 nie jest punktem izolowanym.

Stwierdzenie 2.33 (Izomorfizmy modułów Hilberta). *Niech $T : X \to Y$ będzie odwzorowaniem. Następujące warunki są równoważne:*

1) *T jest surjekcją zachowującą A-iloczyny wewnętrznw, tzn. $\langle Tx|Ty\rangle_A = \langle x|y\rangle_A$ dla $x, y \in X$.*

2) *$T \in \mathcal{B}(X, Y)$ jest odwracalną A-liniową izometrią zachowującą A-iloczyny wewnętrzne.*

3) *$T \in \mathcal{L}(X, Y)$ oraz $T^*T = 1 \in \mathcal{L}(X)$ i $TT^* = 1 \in \mathcal{L}(Y)$.*

DOWÓD. Załóżmy 1). Wtedy $\|Tx\|^2 = \|\langle Tx|Tx\rangle_A\| = \|\langle x|x\rangle_A\| = \|x\|^2$, czyli T jest izometrią. W szczególności $T : X \to Y$ jest bijekcją. Dla odwzorowania odwrotnego $T^{-1} : Y \to X$ oraz dowolnych $x \in X$, $y \in Y$ mamy

$$\langle Tx, y\rangle_A = \langle Tx, TT^{-1}y\rangle_A = \langle x, T^{-1}y\rangle_A.$$

Zatem T jest sprzęgalny i $T^* = T^{-1}$. Stąd otrzymujemy 3), ale też i 2) na mocy Lematu 2.30.

Implikacja z 2) do 1) jest trywialna. Potrzeba więc tylko pokazać, że 3) pociąga 1). Załóżmy 3). Wtedy T jest operatorem odwracalnym, a więc i surjekcją. Ponadto, dla $x, y \in X$ mamy

$$\langle Tx, Ty\rangle_A = \langle x, T^*Ty\rangle_A = \langle x, y\rangle_A,$$

czyli T zachowuje iloczyny wewnętrzne. □

Definicja 2.34. *A-moduły Hilberta X i Y są izomorficzne*, gdy istnieje odwzorowanie $T : X \to Y$ spełniające równoważne warunki w Stwierdzeniu 2.33. Wtedy T nazywamy izomorfizmem albo *operatorem unitarnym* z X na Y.

Wniosek 2.35. *Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ jest operatorem unitarnym na X wtedy i tylko wtedy, gdy T jest unitarnym elementem C^*-algebry $\mathcal{L}(X)$.*

Stosując nierówność Schwartza możemy dla operatorów sprzęgalnych ulepszyć nierówność ograniczoności w następujący sposób.

Stwierdzenie 2.36. *Jeśli $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ to dla każdego $x \in X$ zachodzi*

$$\langle Tx, Tx\rangle_A \le \|T\|^2 \langle x, x\rangle_A.$$

DOWÓD. Niech ϱ będzie stanem na A. Zauważmy, że $\varrho(\langle x|y\rangle_A)$ jest nieujemnie określoną formą półtoraliniową na X. Stosując indukcyjnie nierówność Schwartza dla tej formy otrzymujemy

$$\begin{aligned}\varrho(\langle Tx|Tx\rangle_A) &= \varrho(\langle T^*Tx|x\rangle_A) \le \varrho(\langle T^*Tx|T^*Tx\rangle_A)^{1/2}\varrho(\langle x|x\rangle_A)^{1/2}\\ &= \varrho(\langle (T^*T)^2x|x\rangle_A)^{1/2}\varrho(\langle x|x\rangle_A)^{1/2}\\ &\le \varrho(\langle (T^*T)^2x|(T^*T)^2x\rangle_A)^{1/4}\varrho(\langle x|x\rangle_A)^{1/2+1/4}\\ &\vdots\\ &\le \varrho(\langle (T^*T)^{2^n}x|x\rangle_A)^{1/2^n}\varrho(\langle x|x\rangle_A)^{1/2+1/4+\ldots+1/2^n}\\ &\le \|T^*T\|\|x\|^{1/2^{n-1}}\varrho(\langle x|x\rangle_A)^{1-1/2^n}.\end{aligned}$$

Przechodząc z n do nieskończoności otrzymujemy $\varrho(\langle Tx|Tx\rangle_A) \le \|T\|^2\varrho(\langle x|x\rangle_A)$. Z dowolności ϱ otrzymujemy $\langle Tx, Tx\rangle_A \le \|T\|^2\langle x, x\rangle_A$. □

Niech $x \in X$, $y \in Y$, rozważmy operator $\Theta_{x,y} : Y \to X$ dany wzorem

$$\Theta_{x,y}(z) = x\langle y|z\rangle_A. \tag{2.4.2}$$

Zauważmy, że dla $z \in Y$,$w \in X$ mamy

$$\langle \Theta_{x,y}(z)|w\rangle_A = \langle x\langle y|z\rangle_A|w\rangle_A = \langle z|y\rangle_A\langle x|w\rangle_A = \langle z|y\langle x|w\rangle_A\rangle_A = \langle z|\Theta_{y,x}w\rangle_A.$$

Zatem $\Theta_{x,y} \in \mathcal{L}(Y, X)$ jest operatorem sprzęgalnym i $\Theta^*_{x,y} = \Theta_{y,x}$.

Definicja 2.37. Elementy domkniętej podprzestrzeni $\mathcal{L}(X, Y) \subseteq \mathcal{B}(Y, X)$ generowanej przez operatory postaci (2.4.2):

$$\mathcal{K}(Y, X) := \overline{\operatorname{span}}\{\Theta_{x,y} : x \in X, y \in Y\}$$

nazywamy *operatorymi zwartymi* z X w Y. Kładziemy też $\mathcal{K}(X) := \mathcal{K}(X, X)$.

Uwaga 2.38. Elementy $\mathcal{K}(Y, X)$, tj. operatory zwarte w powyższym sensie, na ogół nie są zwarte jako operatory liniowe między przestrzeniami Banacha Y i X. Dlatego też czasem nazywa się je uogólnionymi operatorami zwartymi.

Lemat 2.39. *Jeśli X, Y, Z są A-modułami Hilberta, to*

$$\mathcal{K}(Y, X)\mathcal{L}(Z, Y) \subseteq \mathcal{K}(Z, X), \qquad \mathcal{L}(Y, X)\mathcal{K}(Z, Y) \subseteq \mathcal{K}(Z, X).$$

W szczególności, $\mathcal{K}(X)$ jest ideałem w C^*-algebrze $\mathcal{L}(X)$.

DOWÓD. Dla $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$ oraz $T \in \mathcal{L}(Z,Y)$ i $S \in \mathcal{L}(Y,X)$ mamy $\Theta_{x,y}T = \Theta_{x,T^*y}$ oraz $S\Theta_{y,z} = \Theta_{Sy,z}$, co dowodzi pierwszej części tezy. Wprost z definicji wynika, że $\mathcal{K}(X)$ jest domkniętą podprzestrzenią $\mathcal{L}(X)$. Zatem $\mathcal{K}(X)$ jest ideałem (dwustronnym) w C^*-algebrze $\mathcal{K}(X)$. □

Lemat 2.40. *Jedynka aproksymatywna w $\mathcal{K}(X)$ zbiega punktowo do jedynki w $\mathcal{L}(X)$. W szczególności, $\mathcal{K}(X)$ działa na X w sposób niezdegenerowany, tzn. $\mathcal{K}(X)X = X$.*

DOWÓD. Na mocy Wniosku 2.12, patrz też Lemat 2.18, wektory postaci $x = u\langle v, w\rangle_B$ rozpinają gęstą podprzestrzeń w X. Jeśli $\{\mu_\lambda\}$ jest jedynką aproksymatywną w $\mathcal{K}(X)$ to

$$\mu_\lambda x = \mu_\lambda u\langle v, w\rangle_B = \mu_\lambda \Theta_{u,v} w \longrightarrow \Theta_{u,v} w = x.$$

Stąd wynika pierwsza część tezy. W szczególności, $\overline{\{Tx : T \in \mathcal{K}(X), x \in X\}} = X$. Zatem $\{Tx : T \in \mathcal{K}(X), x \in X\} = X$ na mocy Twierdzenia Hewitta-Cohena. □

Lemat 2.41. *Dla dowolnego $x \in X$ mamy $\|\Theta_{x,x}\| = \|\langle x, x\rangle_A\|$.*

DOWÓD. Zauważmy najpierw, że $\|x\|^2 = \sup\{\|\langle x, y\rangle_A\| : y \in X, \|y\| \le 1\}$. Stąd

$$\begin{aligned}
\|\Theta_{x,x}\|^2 &= \sup\{\|x\langle x, y\rangle_A\|^2 : y \in X, \|y\| \le 1\} \\
&= \sup\{\|\langle y, x\rangle_A\langle x, x\rangle_A\langle x, y\rangle_A\| : y \in X, \|y\| \le 1\} \\
&= \sup\{\|\langle y, x\langle x, x\rangle_A^{1/2}\rangle_A\langle x\langle x, x\rangle_A^{1/2}, y\rangle_A\| : y \in X, \|y\| \le 1\} \\
&= \sup\{\|\langle x\langle x, x\rangle_A^{1/2}, y\rangle_A\|^2 : y \in X, \|y\| \le 1\} \\
&= \|x\langle x, x\rangle_A^{1/2}\| = \|\langle x, x\rangle_A^{1/2}\langle x, x\rangle_A\langle x, x\rangle_A^{1/2}\| = \|\langle x, x\rangle_A^2\| = \|x\|^4.
\end{aligned}$$

□

Następujące twierdzenie zostało wykazane przez Kasparova. Szczegółowy dowód można znaleźć np. w [18].

Twierdzenie 2.42 (Kasparov)**.** *$\mathcal{L}(X)$ jest maksymalnym, istotnym ujedynkowieniem C^*-algebry $\mathcal{K}(X)$, tzn.*

$$\mathcal{L}(X) \cong \mathcal{M}(\mathcal{K}(X)),$$

C^*-algebra $\mathcal{L}(X)$ jest izomorficzna z algebrą mnożników C^*-algebry $\mathcal{K}(X)$.

Przykład 2.43 (Przestrzenie Hilberta)**.** Jeśli $A = \mathbb{C}$, to $X = H$ jest przestrzenią Hilberta i wtedy

$$\mathcal{K}(X) = K(H), \qquad \mathcal{L}(X) = B(H).$$

To znaczy $\mathcal{K}(X)$ jest algebrą operatorów zwartych w zwykłym sensie. Natomiast $\mathcal{L}(X)$ jest C^*-algebrą wszystkich operatorów ograniczonych na H.

Przykład 2.44 (C^*-algebry)**.** Niech A będzie dowolną C^*-algebrą. Możemy ją traktować jako $A = A_A$ trywialny A-moduł Hilberta. Wtedy

$$\mathcal{K}(A) \cong A, \qquad \mathcal{L}(A) \cong \mathcal{M}(A).$$

Pierwszy izomorfizm jest zdeterminowany przez przyporządkowanie $\mathcal{K}(A) \ni \Theta_{x,y} \mapsto xy^* \in A$. W świetle Twierdzenia 2.42, drugi izomorfizm wynika z pierwszego. Warto tu jednak podkreślić, że przy standardowej konstrukcji algebry $\mathcal{M}(A)$ za pomocą podwójnych centralizatorów, patrz np. [19], ten drugi izomorfizm jest niemal równoważny defincji $\mathcal{M}(A)$. Mianowicie, nietrudno spostrzec, iż para (L, R) jest podwójnym centralizatorem algebry A wtedy i tylko wtedy, gdy $T = L \in \mathcal{L}(A)$ jest operatorem sprzęgalnym i wtedy $R(a) = (T^*(a))^*$ dla $a \in A$, oraz norma centralizatora pokrywa się z normą T w $\mathcal{L}(A)$.

Przykład 2.45 (Standardowy A-moduł Hilberta)**.** Rozważmy standardowy A-moduł Hilberta $\mathbb{H}_A := \bigoplus_{k=1}^{\infty} A_A$, patrz Przykład 2.23. Wtedy, patrz np. [11, Lemat 1.2.7] zachodzą izomorfizmy

$$\mathcal{K}(\mathbb{H}_A) \cong A \otimes \mathbb{K}, \qquad \mathcal{L}(\mathbb{H}_A) \cong \mathcal{M}(A \otimes \mathbb{K}),$$

gdzie $\mathbb{K}$ jest algebrą operatorów zwartych działających na nieskończenie wymiarowej ośrodkowej przestrzeni Hilberta (taka algebra z dokładnością do izomorfizmu jest dokładnie jedna - można wziąć np. $\mathbb{K} = K(\ell^2)$). Przypomnijmy, iż algebra $\mathbb{K}$ jest nuklearna, patrz np. [19, Przykład 6.3.2], zatem iloczyn tensorowy $A \otimes \mathbb{K}$ jest jednoznacznie zdefiniowany. Algebrę $A \otimes \mathbb{K}$ nazywa się *stabilizacją C^*-algebry A.*

Przykład 2.46 (Konkretne moduły Hilberta)**.** Niech $X \subseteq B(H)$ będzie konkretnym modułem Hilberta nad $A \subseteq B(H)$, patrz Przykład 2.24. Wtedy przyporządkowanie $\Theta_{x,y} \mapsto xy^* \in B(H)$ przedłuża się do izomorfizmu

$$\mathcal{K}(X) \cong \overline{XX^*} = \overline{\operatorname{span}}\{xy^* : x \in X, y \in Y\} \subseteq B(H),$$

patrz np. [23, Lemma 3.2]. Powyższy izomorfizm przedłuża się do izomorfizmu

$$\mathcal{L}(X) \cong \{T \in B(H) : T|_{(XH)^\perp} \equiv 0 \text{ oraz } TX \subseteq X,\ T^*X \subseteq X\}.$$

por. [10, Proposition 1.6] lub [6, Proposition 2.1]. W szczególności, jeśli wziąć $X = A$ i założyć, że $AH = H$, to powyższy izomorfizm daje $\mathcal{M}(A) \cong \{T \in B(H) : TA \subseteq A,\ AT \subseteq A\}$, co jest kolejnym opisem algebry mnożników.

2.5 Moduły Hilberta nad algebrami przemiennymi

Rozpatrzymy teraz przypadek A-modułu Hilberta w sytuacji, gdy C^*-algebra A jest przemienna. Wiadomo, że w takim przypadku możemy utożsamić A z algebrą funkcji znikających w nieskończoności $C_0(M)$ gdzie M jest lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa. W niniejszym podrozdziale sformułujemy i udowodnimy twierdzenie w pełni charakteryzujące C^*-moduły Hilberta nad algebrami przemiennymi, które można traktować jako rozszerzenie wspomnianej charakteryzacji przemiennych C^*-algebr. Należy tu podkreślić, że twierdzenie to (w różnych formach, patrz np. [29]) jest znane ekspertom, lecz w pełnej ogólności i w formie przedstawionej poniżej nie zostało nigdzie opublikowane. Dlatego też dołożymy starań, aby przedstawić szczegółowy dowód.

Zaczniemy od omówienia podstawowych faktów dotyczących wiązek przestrzeni Hilberta (Banacha) w sensie Fella.

Definicja 2.47 ([8] Definicje 13.4, 13.5)**.** *Wiązką przestrzeni Banacha* nad M nazywamy przestrzeń Hausdorffa E wraz z ciągłą i otwartą surjekcją $\pi : E \to M$ taką, że włókno $E_t := \pi^{-1}(t)$ posiada strukturę przestrzeni Banacha dla każdego $t \in M$. Ponadto mają być spełnione następujące warunki:

1) Przekształcenie $E \ni e \mapsto \|e\| \in \mathbb{R}$ jest ciągłe,
2) Przekształcenie $E^{(2)} := \{(e_1, e_2) \in E \times E : \pi(e_1) = \pi(e_2)\} \ni (e_1, e_2) \mapsto e_1 + e_2 \in E$ jest ciągłe,
3) Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{C}$ przekształcenie $E \ni e \mapsto \lambda e \in E$ jest ciągłe,
4) Dla każdej sieci $\{e_i\}_{i \in I} \subset E$ takiej, że $\lim_{i\to\infty} \|e_i\| = 0$ oraz $\lim_{i\to\infty} \pi(e_i) = t$, mamy $\lim_{i\to\infty} e_i = 0_t \in E_t$.

Jeśli dodatkowo każde włókno E_t, $t \in M$, jest przestrzenią Hilberta to (E, π, M) nazywamy *wiązką przestrzeni Hilberta.*

Uwaga 2.48. Warunek czwarty w istocie oznacza, że topologie we włóknach zadawane przez strukturę przestrzeni Banacha oraz przez topologię z E są ze sobą zgodne, patrz [8, Proposition 13.11]. Warunek ten, wraz z 2) i 3) implikuje, że odwzorowanie dwóch zmiennych $\mathbb{C} \times E \ni (\lambda, e) \to \lambda e \in E$ jest ciągłe, co jest wzmocnieniem 3), patrz [8, Proposition 13.10]. W szczególności, w wiązce Hilberta ciągłości odwzorowania $E^{(2)} \ni (x, y) \mapsto \langle x|y\rangle$ nie trzeba zakładać, gdyż wynika z formuły polaryzacyjnej $\langle x|y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2$.

Przykład 2.49. Niech (E, π, M) będzie lokalnie trywialną wiązką wektorową nad M, taką jak w Przykładzie 2.26. Z lokalnej trywialności wynika od razu, że E jest przestrzenią Hausdorffa, odwzorowanie $\pi : E \to M$ jest otwarte oraz spełnione są warunki 2), 3), 4) w Definicji 2.47. Jak pokazaliśmy w Przykładzie 2.26 można na włóknach tej wiązki zadać strukturę przestrzeni Hilberta tak, aby był również spełniony warunek 1). Zatem każdą lokalnie trywialną wiązkę można traktować jako wiązkę Banacha, a nawet jako wiązkę Hilberta.

Na ogół wiązkę (E, π, M) będziemy oznaczać przez samo E lub π. Iloczyn skalarny w źdźble $E_t = \pi^{-1}(t)$ oznaczamy przez $\langle\cdot|\cdot\rangle_t$, a odpowiadającą mu normę przez $\|\cdot\|_t$. Na mocy [8, Proposition 13.14] zbiór ciągłych cięć wiązki π:

$$\Gamma(\pi) = \{x : M \to E : x \text{ jest ciągły oraz } \pi \circ x = id_M\}$$

jest przestrzenią liniową, a nawet $C(M)$-modułem, to znaczy dla każdego $a \in C(M)$ oraz $x \in \Gamma(\pi)$ cięcie $M \ni t \mapsto (xa)(t) \to a(t)x(t)$ jest ciągłe. Przypomnijmy też, że na mocy Twierdzenia Douady, dal Soglio-Herault, patrz [8, Appendix C], wiązka E ma *dostatecznie dużo ciągłych cięć*, tzn. dla każdego $e \in E_t$, $t \in M$, istnieje $x \in \Gamma(\pi)$ takie, że $x(t) = e$. Kluczowym dla naszych rozważań jest następujące *Twierdzenie Fella o Rekonstrukcji*:

Twierdzenie 2.50 (Fell)**.** *Niech $\{E_t\}_{t\in M}$ będzie rodziną przestrzeni Banacha i niech Γ będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni wszystkich cięć $\prod_{t\in M} E_t = \{x : M \to E : x(t) \in E_t \text{ dla } t \in M\}$ taką, że*

1) *dla każdego $x \in \Gamma$ funkcja $t \to \|x(t)\|$ jest ciągła;*

2) *dla każdego $t \in M$, zbiór $x(t)$, dla $x \in \Gamma$ jest gęsty w E_t.*

Wtedy na $E := \bigsqcup_{t\in M} E_t$ istnieje dokładnie jedna topologia, przy której E wraz z naturalną surjekcją $\pi : E \to M$ staje się wiązką Banacha taką, że $\Gamma \subseteq \Gamma(\pi)$. Ponadto,

i) *Baza topologii na E jest dana przez zbiory*

$$U_{x,\varepsilon,V} := \{e \in E : \pi(e) \in V,\ \|e - x(\pi(e))\| < \varepsilon\}$$

gdzie $x \in \Gamma$, $\varepsilon > 0$ oraz $V \subseteq M$ jest otwarty;

ii) *$\Gamma(\pi) = \{x \in \prod_{t\in M} E_t :$ dla każdego $t_0 \in M$ oraz $\varepsilon > 0$, istnieje $x' \in \Gamma$ taki, że $\|x(t) - x'(t)\| < \varepsilon$ na pewnym otwartym otoczeniu $t_0\}$.*

DOWÓD. Pierwsza część tezy wynika wprost z [8, Theorem 13.18], gdzie m.in. opisana jest topologia na E w języku sieci jak następuje:

$$\begin{aligned}&\{e_i\} \text{ zbiega do } e \text{ w } E \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \pi(e_i) \to \pi(e)\\ &\text{oraz dla każego } x \in \Gamma \text{ mamy } \|x(\pi(e_i)) - e_i\| \to \|x(\pi(e)) - e\|.\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Baza w i) jest opisana w [8, Proposition 13.12], jej postać też można wywnioskować z (2.5.1). Zatem potrzebujemy jedynie wykazać ii). W tym celu oznaczmy przez $\overline{\Gamma}$ zbiór opisany w ii).

Niech $x \in \prod_{t\in M} E_t$. Załóżmy najpierw, że $x \in \Gamma(\pi)$, tj. x jest ciągłym cięciem. Niech $t_0 \in M$. Na mocy założenia 2), dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $x' \in \Gamma$ taki, że $\|x(t_0) - x'(t_0)\| < \varepsilon$. Skoro $x - x'$ oraz $\|\cdot\|$ są ciągłe, to zbiór $V := \{t \in M : \|x(t) - x'(t)\| < \varepsilon\}$ jest otwartym otoczeniem t_0. Zatem $x \in \overline{\Gamma}$. Na odwrót, załóżmy że $x \in \overline{\Gamma}$. Niech $t_0 \in M$ dowolny i niech $\{t_i\} \subseteq M$ będzie siecią zbieżną do t_0. Weźmy dowolne $y \in \Gamma$ oraz $\varepsilon > 0$. Skoro $x \in \overline{\Gamma}$, to możemy znaleźć $x' \in \Gamma$ takie, że $\|x(t) - x'(t)\| < \varepsilon$ na pewnym otoczeniu t_0. Zatem $\|x(t_i) - x'(t_i)\| < \varepsilon$ dla dostateczenie dużych i. Jako że $y - x' \in \Gamma$ oraz $\|\cdot\|$ są ciągłe, to korzystając z (2.5.1) otrzymujemy, że $\big|\|y(t_i) - x'(t_i)\| - \|y(t_0) - x'(t_0)\|\big| < \varepsilon$ dla dostatecznie dużych i. Zatem dla dostatecznie dużych i dostajemy

$$\big|\|y(t_i) - x(t_i)\| - \|y(t_0) - x(t_0)\|\big| \leq 2\varepsilon + \big|\|y(t_i) - x'(t_i)\| - \|y(t_0) - x'(t_0)\|\big| < 3\varepsilon.$$

W świetle (2.5.1) oznacza to, że $x(t_i) \to x(t_0)$, czyli x jest ciągły w t_0. □

Dla naszych celów lepiej jest pracować z przestrzenią cięć ciągłych znikających w nieskończoności:

$$\Gamma^0(\pi) = \{x \in \Gamma(\pi) : \{t \in M : \|\sigma(t)\| \geq \varepsilon\} \text{ jest zwarty dla każdego } \varepsilon > 0\}.$$

Lemat 2.51. $\Gamma_0(\pi)$ *z działaniami punktowymi i normą* $\|x\| := \sup_{t\in M} \|x(t)\|$ *jest przestrzenią Banacha.*

DOWÓD. Dowód przebiega przez standardowe sprawdzenie. □

Stwierdzenie 2.52. *Niech* $\pi : E \to M$ *będzie wiązką przestrzeni Hilberta. Wtedy* $\Gamma_0(\pi)$ *stanowi* $C_0(M)$*-moduł Hilberta z działaniami danymi przez*

$$(xa)(t) := a(t)x(t), \qquad \langle x, y\rangle_{C_0(M)}(t) := \langle x(t), y(t)\rangle,$$

$x, y \in \Gamma_0(\pi)$, $a \in C_0(M)$, $t \in M$.

DOWÓD. Oczywiście struktura $C(M)$-modułu na $\Gamma(\pi)$ daje się obciąć do struktury $C_0(M)$-modułu na $\Gamma_0(\pi)$. Dla dowolnych $x, y \in \Gamma_0(\pi)$ funkcja $M \ni t \mapsto \langle x, y\rangle_{C_0(M)}(t) \in \mathbb{C}$ jest ciągła jako złożenie funkcji ciągłych: $M \xrightarrow{(x,y)} E^{(2)} \xrightarrow{\langle\cdot,\cdot\rangle} \mathbb{C}$.Stąd $\langle x, y\rangle_{C_0(M)} \in C_0(M)$. Sprawdzenie, że $\langle\cdot,\cdot\rangle_{C_0(M)}$ spełnia aksjomaty iloczynu wewnętrznego przebiega przez standardowe rozumowanie. Teza wynika z Lematu 2.51. □

Teraz jesteśmy gotowi do przeprowadzenia dowodu, że każdy $C_0(M)$-moduł Hilberta X jest izomorficzny z $C_0(M)$-modułem Hilberta $\Gamma_0(\pi)$ związanym z wiązką przestrzeni Hilberta $\pi : E \to M$, opisaną w Stwierdzeniu 2.52.

Twierdzenie 2.53. *Jeżeli* X *jest* $C_0(M)$*-modułem Hilberta to istnieje wiązka przestrzeni Hilberta* $\pi : E \to M$ *oraz bijektywne odwzorowanie* $C_0(M)$*-liniowe* $X \ni x \mapsto \widehat{x} \in \Gamma_0(\pi)$ *które zachowuje iloczyn wewnętrzny.*

DOWÓD. Dla każdego $t \in M$, przyjmiemy oznaczenie $I_t := \{f \in C_0(M) : f(t) = 0\}$. Z Wniosku 2.16, mamy, że $H_t := X/XI_t$ jest modułem Hilberta nad $C_0(M)/I_t \cong \mathbb{C}$. Stąd H_t możemy traktować jako przestrzeń Hilberta. Rozważmy następującą sumę rozłączną

$$E := \bigsqcup_{t\in M} H_t$$

oraz naturalną surjekcję $\pi : E \to M$ daną przez $\pi(x + XI_t) = t$. Z każdym $x \in X$ możemy utożsamić cięcie $\widehat{x} \in \prod_{t\in M} E_t$, gdzie

$$\widehat{x}(t) := x + XI_t, \qquad t \in M.$$

Dla dowolnego $x \in X$ mamy

$$\|\widehat{x}(t)\|^2 = \|\langle x|x\rangle + I_t\| = |\langle x|x\rangle(t)|, \tag{2.5.2}$$

a ponieważ $\langle x|x\rangle \in C_0(M)$, widzimy, że funkcja $M \to \|\widehat{x}(t)\|$ jest ciągła oraz znikająca w nieskończoności. Zauważmy też, że z definicji $H_t = X/XI_t = \{\widehat{x}(t) : x \in X\}$. Z Twierdzenia 2.50 wynika, że istnieje jedyna topologia na E taka, że $\pi : E \to M$ jest modułem Hilberta oraz $\{\widehat{x} : x \in X\} \subseteq \Gamma_0(\pi)$.

Z konstrukcji wynika, że odwzorowanie $X \ni x \mapsto \widehat{x} \in \Gamma_0(\pi)$ jest $C_0(M)$-liniowe. Z (2.5.2) wynika, że jest to również izometria. Ponieważ X jest przestrzenią Banacha, więc jej obraz jest domknięty. Stąd wystarczy pokazać, że $\{\widehat{x} : x \in X\}$ jest gęsty w $\Gamma_0(\pi)$. Weźmy więc dowolne $\sigma \in \Gamma_0(\pi)$ oraz $\varepsilon > 0$. Rozważmy zbiór zwarty

$$K := \{t \in M : |\langle\sigma(t)|\sigma(t)\rangle| \geq \varepsilon\}.$$

Dla dowolnego $t \in M$, niech $x_t \in X$ będzie takie, że $\widehat{x_t}(t) = \sigma(t)$. Wtedy rodzina zbiorów

$$V_t := \{s \in M : \|\sigma(s) - \widehat{x_t}(s)\| < \varepsilon\}, \qquad t \in K,$$

stanowi otwarte pokrycie K. Ponieważ K jest zwarty wiec możemy znaleźć $t_1, t_2, ..., t_n \in K$ takie, że $K \subseteq V_{t_1} \cup V_{t_2} \cup ...V_{t_n}$. Niech $\{f_i\}_{i=1}^n$ będzie rozkładem jedynki odpowiadającym $\{V_{t_i}\}_{i=1}^n$ (jego istnienie zapewnia [27, Theorem 2.13]). Oznacza to, że istnieją funkcje $f_1, ..., f_n \in C_0(M)$ takie, że $0 \leq f_i \leq 1$, $\mathrm{supp} f_i \subset V_{t_i}$, dla $i = 1, ...n$, oraz $\sum_{i=1}^n f_i = 1$. Połóżmy $x := \sum_{i=1}^n x_{t_i} f_i$. Dla każdego $t \in M$ mamy

$$\begin{aligned}
\|\sigma(t) - \widehat{x}(t)\| &\leq \|\sigma(t) - \sum_{i=1}^n f_i(t)\sigma(t)\| + \|\sum_{i=1}^n f_i(t)\sigma(t) - \widehat{x}(t)\| \\
&< \varepsilon + \|\sum_{i=1}^n f_i(t)\sigma(t) - \sum_{i=1}^n \widehat{x_{t_i}}(t) f_i(t)\| \\
&= \varepsilon + \|\sum_{i=1}^n f_i(t)\big(\sigma(t) - \widehat{x_{t_i}}(t)\big)\| < \varepsilon + \varepsilon \sum_{i=1}^n f_i(t) = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Jako zastosowanie powyższej charakteryzacji pokażemy, że każdy moduł Hilberta nad przemienną algebrą z widmem dyskretnym jest izomorficzny z modułem Hilberta X_s związanym z pewnym odwzorowaniem dyskretnym $s : E \to V$, patrz Przykład 2.27. W ten sposób otrzymamy jeszcze jedną charakteryzację modułu Hilberta, w przypadku gdy C^*-algebra modelująca jest algebrą funkcji na przestrzeni dyskretnej.

Wniosek 2.54. *Jeśli X jest $C_0(V)$-modułem Hilberta, gdzie V jest przestrzenią dyskretną, to istnieje odwzorowanie $s : E \to V$ oraz izomorfizm $\Phi : X \to X_s$ modułów Hilberta.*

DOWÓD. Na mocy Twierdzenia 2.53 możemy utożsamić X z $C_0(V)$-modułem $\Gamma_0(\bigsqcup_{v\in V} H_v)$ ciągłych cięć wiązki Hilberta $\bigsqcup_{v\in V} H_v$. Jako że V jest przestrzenią dyskretną, mamy

$$\Gamma_0(\bigsqcup_{v\in V} H_v) = \{x \in \prod_{v\in V} H_v : V \ni v \mapsto \|x(v)\| \in \mathbb{C} \text{ jest elementem } C_0(V)\}.$$

Szukany izomorfizm skonstruujemy przyporządkowując cięciu $x \in \Gamma_0(\bigsqcup_{v\in V} H_v)$ funkcję zadaną przez współczynnyki Fouriera $x(v)$ we wszystkich źdźbłach H_v, $v \in V$. Mianowicie, dla każdego $v \in V$ ustalmy bazę ortogonalną $\{e_i(v)\}_{i\in I(v)}$ w H_v. Wtedy dla każdego $x \in \Gamma_0(\bigsqcup_{v\in V} H_v)$ mamy

$$x(v) = \sum_{i\in I(v)} x_i(v)e_i(v)$$

gdzie $x_i(v) \in \mathbb{C}$, $i \in I(v)$, $v \in V$, są współczynnikami jednoznacznie wyznaczonymi przez x. Połóżmy $E := \bigsqcup_{v\in V}\{e_i(v)\}_{i\in I(v)}$ i zdefiniujmy $s : E \to V$ wzorem $s(e_i(v)) = v$, tak aby $s^{-1}(v) = \{e_i(v)\}_{i\in I(v)}$. Niech $X_s = \{f \in C(E) : v \mapsto \sum_{i\in I(v)} |f(e_i(v))|^2 \in C_0(V)\}$ będzie $C_0(V)$-modułem odpowiadającym odwzorowaniu $s : E \to V$. Dla $x \in \Gamma_0(\bigsqcup_{v\in V} H_v)$ definiujemy $\Phi(x) : E \to \mathbb{C}$ wzorem

$$\Phi(x)(e_i(v)) := x_i(v).$$

Skoro funkcja $V \ni v \mapsto \|x(v)\|^2 = \sum_{i\in I(v)} |x_i(v)|^2 \in \mathbb{C}$ znika w nieskończoności, widzimy, że $\Phi(x) \in X_s$. Liniowość i injektywność odwzorowania $\Phi : X \mapsto X_s$ są jasne. Jest ono surjektywne, gdyż dla każdego $f \in X_s$ funkcja $x : V \to \bigsqcup_{v\in V} H_v$ dana wzorem $x(v) := \sum_{i\in I(v)} f(e_i(v))e_i(v)$ należy do $\Gamma_0(\bigsqcup_{v\in V} H_v)$ oraz $f = \tilde{x}$. Co więcej, dla każdego $x, y \in X$, mamy

$$\langle\Phi(x), \Phi(y)\rangle_{C_0(V)}(v) = \sum_{i\in I(v)} \overline{x_i(v)}y_i(v) = \langle x(v), y(v)\rangle = \langle x, y\rangle_{C_0(V)}(v).$$

Czyli Φ zachowuje iloczyny wewnętrzne. Zatem jest to izomorfizm modułów Hilberta. □

Rozdział 3

C^*-korespondencje

3.1 C^*-korespondencje

Definicja 3.1. Niech A, B bedą C^*-algebrami. *C^*-korespondencją z A do B* nazywamy prawy B-moduł Hilberta X wyposażony dodatkowo w homomorfizm $\phi_X : A \to \mathcal{L}(X)$. Piszemy wtedy $a \cdot x := \phi_X(a)x$.

Uwaga 3.2. Przypomnijmy, iż operatory z $\mathcal{L}(X)$ są B-liniowe, patrz Lemat 2.30. Zatem jeśli X jest C^*-korespondencją z A do B to X jest lewym A-modułem oraz

$$(ax)b = a(xb) \qquad \text{dla wszystkich } a \in A, b \in B, x \in X.$$

Czyli X jest A-B-bimodułem w sensie algebraicznym.

O C^*-korespondencjach można myśleć jako o uogólnionych reprezentacjach (gdzie A jest reprezentowana na module zamiast na przestrzeni Hilberta), lub jako o uogólnionych morfizmach między C^*-algebrami A i B. Mając na uwadze ten drugi punkt widzenia, będziemy pisać

$$A \xrightarrow{X} B$$

chcąc powiedzieć, że X jest C^*-korespondencją z A do B.

Definicja 3.3. Powiemy, że C^*-korespondencja $A \xrightarrow{X} B$ jest

- *niezdegenerowana*, jeżeli homomorfizm $\phi_X : A \to \mathcal{L}(X)$ jest niezdegenerowany, tzn. $\phi_X(A)X = X$.
- *injektywna*, jeżeli homomorfizm $\phi_X : A \to \mathcal{L}(X)$ jest injektywny;
- *właściwa*, jeżeli $\phi_X(A) \subseteq \mathcal{K}(X)$, tzn. A działa na X przez operatory zwarte.

Uwaga 3.4. Warunek niezdegenerowaności jest ważny i niektórzy autorzy włączają go do definicji C^*-korespondencji. Zauważmy, że każdą C^*-korespondencję można w naturalny sposób sprowadzić do C^*-korespondencji niezdegenerowanej. Mianowicie, dla każdej C^*-korespondencji $A \xrightarrow{X} B$,

$$C^*\text{-korespondencja } A \xrightarrow{\phi_X(A)X} B \text{ jest niezdegenerowana.}$$

Dokładniej, zbiór $\phi_X(A)X$ jest domkniętą przestrzenią liniową X na mocy Twierdzenia Hewitta-Cohena. Jasne jest, że przestrzeń $\phi(A)X$ jest niezmiennicza ze względu na mnożenie przez elementy z A i B. Zatem $\phi(A)X$ jest B-podmodułem Hilberta modułu X oraz $\phi_X : A \to \mathcal{L}(X)$ możemy traktować jako homomorfizm $\phi_{\phi(A)X} : A \to \mathcal{L}(\phi(A)X)$.

Uwaga 3.5. Obcinając dziedzinę C^*-korespondencji $A \xrightarrow{X} B$ możemy otrzymać odpowiednio injektywną oraz właściwą C^*-korespondencję. Przez *obcięcie dziedziny C^*-korespondencji* rozumiemy tu obcięcie homomorfizmu $\phi_X : A \to \mathcal{L}(X)$ zadającego lewe działanie. W szczególności,

$$J(X) := \phi_X^{-1}(\mathcal{K}(X))$$

jest największym ideałem w A takim, że C^*-korespondencja $J(X) \xrightarrow{X} B$ jest właściwa. Analogicznie,

$$(\ker \phi_X)^\perp = \{a \in A : a \ker \phi_X = \{0\}\}$$

jest największym ideałem w A takim, że C^*-korespondencja $(\ker \phi_X)^\perp \xrightarrow{X} B$ jest injektywna. Ideał

$$J_X := \phi_X^{-1}(\mathcal{K}(X)) \cap (\ker \phi_X)^\perp$$

jest nazywany *ideałem Katsury*. Jest to największy ideał w A, dla którego $J_X \xrightarrow{X} B$ jest właściwa i injektywna. Zauważmy, że Lematy 2.19, 2.18 pozwalają na odpowiednie obcięcie lub rozszerzenie przeciwdziedziny C^*-korespondencji $A \xrightarrow{X} B$.

Przykład 3.6 (Reprezentacje)**.** C^*-korespondencje z A do $\mathbb{C}$ są niczym innym jak reprezentacjami C^*-algebry A. Rzeczywiście, jeśli $A \xrightarrow{X} \mathbb{C}$, to $X = H$ jest przestrzenią Hilberta oraz $\mathcal{L}(X) = B(H)$. Zatem C^*-korespondencja X jest wyznaczona przez lewe działanie, które jest po prostu reprezentacją $\pi : A \to B(H)$. Niezdegenerowane C^*-korespondencje odpowiadają reprezentacjom niezdegenerowanym, a injektywne reprezentacjom wiernym.

Przykład 3.7 (Homomorfizmy C^*-algebr)**.** Niech $X = B_B$ będzie trywialnym B-modułem Hilberta. Wtedy możemy przyjąć utożsamienia: $\mathcal{K}(X) = A$ i $\mathcal{L}(X) = \mathcal{M}(A)$, patrz Przykład 2.44. Zatem C^*-korespondencje $A \xrightarrow{B_B} B$ są niczym innym, niż homomorfizmami $\alpha : A \to \mathcal{M}(B)$, natomiast właściwe C^*-korespondencje $A \xrightarrow{B_B} B$ są po prostu homomorfizmami $\alpha : A \to B$ z A do B. Należy tu podkreślić, że korespondencja $A \xrightarrow{B_B} B$ jest niezdegenerowana wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający jej homomorfizm $\alpha : A \to \mathcal{M}(B)$ jest niezdegenerowany, tzn. $\alpha(A)B = B$ (takie homomorfizmy nazywa się czasem *morfizmami* z A do B). Niemniej jednak, zgodnie z Uwagą 3.4, z każdym homomorfizmem $\alpha : A \to \mathcal{M}(B)$ możemy związać niezdegenerowaną C^*-korespondencję X_α gdzie $X_\alpha := \alpha(A)B$ jako przestrzeń liniowa oraz

$$\langle x, y\rangle_B := x^* y, \quad a \cdot x := \alpha(a)x, \quad x \cdot b = xb, \qquad x, y \in X_\alpha,\ a \in A,\ b \in B.$$

Przykład 3.8 (Homomorfizmy w stabilizację C^*-algebr)**.** Niech $X = \mathbb{H}_B$ będzie standardowym B-modułem Hilberta. Wtedy $\mathcal{K}(X)$ możemy utożsamić ze stabilizacją $B \otimes \mathbb{K}$ algebry B, a $\mathcal{L}(X)$ z $\mathcal{M}(B \otimes \mathbb{K})$, patrz Przykład 2.45. Zatem homomorfizmy $\alpha : A \to \mathcal{M}(B \otimes \mathbb{K})$ możemy utożsamić z C^*-korespondencjami $A \xrightarrow{\mathbb{H}_B} B$, a $\alpha : A \to B \otimes \mathbb{K}$ z właściwymi C^*-korespondencjami $A \xrightarrow{\mathbb{H}_B} B$.

Przykład 3.9 (Grafy skierowane)**.** $G = (E, s, r)$ będzie *grafem skierowanym z V do W*. To znaczy W, V są zbiorami wierchołków, E jest zbiorem krawędzi, a $s : E \to V$ i $r : E \to W$ są odwzorowaniami wyznaczającymi odpowiednio początek (source) i koniec (range) krawędzi. Z grafem G zwiążemy tzw. C^*-*korespondencję grafową* $C_0(W) \xrightarrow{X_G} C_0(V)$, gdzie zbiory V i W traktujemy tu jako przestrzenie dyskretne. Jako $C_0(V)$-moduł Hilberta X_G można utożsamić z modułem związanym z odwzorowaniem $s : E \to V$, patrz Przykład 2.27. To znaczy, kładziemy

$$X_G := \{x \in C(E) : V \ni v \longmapsto \sum_{e \in s^{-1}(v)} |x(e)|^2 \in C_0(V)\}$$

$$(x \cdot b)(e) := x(e) b(s(e)), \qquad \langle x, y\rangle_{C_0(V)}(v) := \sum_{e \in s^{-1}(v)} \overline{x(e)} y(e),$$

gdzie $x, y \in X_G$ oraz $b \in C_0(V)$. Odwzorowanie $r : E \to W$ pozwala nam zdefiniować homomorfizm $\phi_{X_G} : C_0(W) \to \mathcal{L}(X_G)$, czyli lewe mnożenie, wzorem

$$(a \cdot x)(e) := a(r(e)) x(e), \qquad x \in X_G, a \in C_0(W).$$

Otrzymana w ten sposób C^*-korespondencja $C_0(W) \xrightarrow{X_G} C_0(V)$ jest niezdegenerowana (co wiąże się z faktem, iż odwzorowanie $r : E \to V$ jest wszędzie określone). Ideały z poprzedniej uwagi mają tu naturalne interpretacje kombinatoryczne. Mianowice, zauważmy, że C^*-algebra $C_0(W)$ jest domkniętą otoczką liniową funkcji δ_w, $w \in W$, gdzie $\delta_w(v) = \delta_{w,v}$ delta Kroneckera. Nietrudno wykazać, że

$$J(X_G) = \overline{\operatorname{span}}\{\delta_w : r^{-1}(w) \text{ zbiór skończony}\},$$

$$(\ker \phi_{X_G})^\perp = \overline{\operatorname{span}}\{\delta_w : r^{-1}(w) \neq \varnothing\}.$$

W szczególności, C^*-korespondencja $C_0(W) \xrightarrow{X_G} C_0(V)$ jest właściwa wtedy i tylko wtedy, gdy do każdego wierzchołka prowadzi conajwyżej skończona ilość krawędzi. Natomiast jest ona injektywna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wierzchołek jest końcem jakiejś krawędzi.

We Wniosku 2.54 wykazaliśmy, że każdy $C_0(V)$-moduł Hilberta, gdzie V jest przestrzenią dyskretną, jest izomorficzny z modułem z powyższego przykładu. Modyfikując jego dowód, pokażemy, że dla W i V dyskretnych każda niezdegenerowana C^*-korespondencja z $C_0(W)$ do $C_0(V)$ jest C^*-korespondencją grafową. Twierdzenie to wykazano w [12], bez wykorzystania Twierdzenia 2.53.

Twierdzenie 3.10. *Każda niezdegenerowana C^*-korespondencja z $C_0(W)$ do $C_0(V)$, gdzie W, V są przestrzeniami dyskretnymi, jest izomorficzna z C^*-korespondencją grafową X_G dla pewnego grafu G z V do W.*

DOWÓD. W dowodzie Wniosku 2.54 zauważyliśmy, że $C_0(V)$-moduł Hilberta X można utożsamić z przestrzenią funkcji

$$X = \{x \in \prod_{v\in V} H_v : V \ni v \mapsto \|x(v)\| \in \mathbb{C} \text{ jest elementem } C_0(V)\}$$

o wartościach w przestrzeniach Hilberta $\{H_v\}_{v\in V}$. Izomorfizm z X na X_s skonstruowaliśmy tam wybierając bazy w przestrzeniach H_v w arbitralny sposób. Aby skonstruować odpowiedni graf skierowany, przy wyborze tej bazy uwzględnimy również lewe działanie. Przypomnijmy, iż $C_0(W) = \overline{\operatorname{span}}\{\delta_w : w \in W\}$, gdzie δ_w jest funkcją charakterystyczną $\{w\}$. Zatem $\{\delta_w\}_{w\in W}$ działają na każdej przestrzeni H_v jako wzajemnie prostopadłe rzuty ortogonalne. Połóżmy

$${}_wH_v := \phi_X(\delta_w)H_v \qquad \text{dla każdego } w \in W \text{ oraz } v \in V.$$

Skoro rozważana C^*-korespondencja jest niezdegenerowana, to $H_v = \oplus_{w\in W}\, {}_wH_v$ dla każdego $v \in V$. Dla każdej pary $(w, v) \in W \times V$ ustalmy bazę ortogonalną $\{e_i(w,v)\}_{i\in I(w,v)}$ w ${}_wH_v$. Zdefiniujmy graf $G = (V, W, E, s, r)$, gdzie

$$E := \bigsqcup_{(w,v)\in W\times V} \{e_i(w,v)\}_{i\in I(w,v)}, \quad s(e_i(w,v)) = v, \quad r(e_i(w,v)) := w.$$

Niech X_G będzie C^*-korespondencją grafu G. W dowodzie Wniosku 2.54 pokazliśmy, że

$$X_G \in x \mapsto \Phi(x) \in X, \qquad \Phi(x)(v) := \sum_{e\in s^{-1}(v)} x(e)e$$

jest izomorfizmem modułów Hilberta. Dla każdego $a \in C_0(V)$ oraz $e = e_i(w,v) \in {}_wH_v$ mamy

$$\phi_X(a)e = \phi_X(a)\phi_X(\delta_w)e = \phi_X(a(w)\delta_w)e = a(w)e = a(r(e))e.$$

Skąd $\Phi_{X_G}(a)\Phi(x) = \Phi(\Phi_X(a)x)$ dla $x \in X_G$. Czyli Φ jest izomorfizmem $C*$-korespondencji. □

3.2 Iloczyn tensorowy C^*-korespondencji

W poprzednim podrozdziale widzieliśmy na wielu przykładach, że C^*-korespondencje modelują różne bardzo ogólnie rozumiane "morfizmy" między C^*-algebrami. Często niejasne jest jak takie "morfizmy" składać. W tym podrozdziale pokażemy, że składanie "morfizmów" jest w efektywny i naturalny sposób opisane przez iloczyn tensorowy C^*-korespondencji.

Sama definicja iloczynu tensorowego jest dość naturalna, jednakże sprawdzenie, że jest ona poprawna wymaga nieco pracy, którą wykonamy poniżej.

Definicja 3.11. *Iloczynem tensorowym* lub też *złożeniem C^*-korespondencji* $A \xrightarrow{X} B$ i $B \xrightarrow{Y} C$ nazywamy C^*-korespondencję $A \xrightarrow{X\otimes_B Y} C$ zdefiniowaną w następujący sposób. Niech $X \otimes_B^{alg} Y$ będzie algebraicznym iloczynem tensorowym bimodułów zbalansowanym względem algebry B. To znaczy $X \otimes_B^{alg} Y$ składa się z sum formalnych elementów $x \otimes y$ $x \in X$, $y \in Y$, gdzie oprócz standardowych relacji rozłączności mnożenia względem dodawania:

$$x \otimes (y_1 + y_2) = (x \otimes y_1) + (x \otimes y_2), \quad (x_1 + x_2) \otimes y = (x_1 \otimes y) + (x_2 \otimes y), \tag{3.2.1}$$

przyjmujemy również relacje *zbalansowania względem B*:

$$xb \otimes y = x \otimes by \tag{3.2.2}$$

gdzie $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$ oraz $b \in B$. Elementy $x \otimes y$ nazywamy tensorami prostymi. Przestrzeń $X \otimes_B^{alg} Y$ jest w naturalny sposób A-C-bimodułem, z lewym A-mnożeniem i prawym C-mnożeniem danymi wzorami

$$a(x \otimes y) = ax \otimes y, \qquad (x \otimes y)c = x \otimes yc$$

dla $x \in X$, $y \in Y$, $a \in A$ oraz $c \in C$. Na $X \otimes_B^{alg} Y$ określamy C-iloczyn wewnętrzny, który na tensorach prostych jest dany wzorem

$$\langle x_1 \otimes y_1 | x_2 \otimes y_2 \rangle_C := \langle y_1 | \langle x_1 | x_2 \rangle_B y_2 \rangle_C, \qquad x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y, \tag{3.2.3}$$

patrz Wniosek 3.16. Uzupełniając $X \otimes_B^{alg} Y$ w metryce pochodzącej od powyżej zdefiniowanego C-iloczynu wewnętrznego, por. Stwierdzenie 2.13, otrzymujemy prawy C^*-moduł Hilberta:

$$X \otimes_B Y := \overline{X \otimes_B^{alg} Y}.$$

Lewe A-działanie na $X \otimes_B^{alg} Y$ przedłuża się do lewego A-działania przez operatory sprzęgalne na $X \otimes_B Y$, patrz Wniosek 3.18. Zatem $X \otimes_B Y$ jest C^*-korespondencją z A do C.

Uwaga 3.12. Przy składaniu C^*-korespondencji $A \xrightarrow{X} B$ i $B \xrightarrow{Y} C$ możemy zawsze założyć, że C^*-korespondencja $B \xrightarrow{Y} C$ jest niezdegenerowana. Rzeczywiście, moduł Hilberta X jest zawsze niezdegenerowany z prawej strony, patrz Wniosek 2.12. Zatem relacja zbalansowania (3.2.2) implikuje, że

$$X \otimes_B Y = XB \otimes_B Y = X \otimes_B BY, \tag{3.2.4}$$

gdzie $B \xrightarrow{BY} C$ jest C^*-korespondencją niezdegenerowaną.

Uwaga 3.13. Przypomnijmy, iż $X \otimes_B Y$ jest przestrzenią liniową z mnożeniem przez skalar spełniającym (2.1.5). Z tych relacji oraz z (3.2.4) wynika, że dla $x \in X$, $y \in Y$ oraz $\lambda \in \mathbb{C}$ mamy

$$\lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y). \tag{3.2.5}$$

Zatem, struktura $X \otimes_B Y$ jest zgodna ze strukturą iloczynu tensorowego przestrzeni liniowych. W rzeczywistości, $X \otimes_B Y$ można skonstruować zaczynając od iloczynu tensorowego przestrzeni liniowych X i Y. Iloczyn taki, oznaczmy go przez $X \odot Y$, jest przestrzenią liniową składającą się z sum formalnych elementów $x \odot y$, $x \in X$, $y \in Y$ spełniających relacje typu (3.2.1), (3.2.5). Przestrzeń $X \odot Y$ jest w naturalny sposób A-C-bimodułem i na $X \odot Y$ mamy C-formę hermitowską zadaną wzorem

$$\langle x_1 \odot y_1 | x_2 \odot y_2 \rangle_C := \langle y_1 | \langle x_1 | x_2 \rangle_B y_2 \rangle_C, \qquad x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y, \tag{3.2.6}$$

Zatem eliminując w $X \odot Y$ wektory izotropowe, tzn. przechodząc do przestrzeni ilorazowej $(X \odot Y)/N$ gdzie $N = \{z \in X \odot Y : \langle z, z \rangle_C = 0\}$, C-forma $\langle \cdot | \cdot \rangle_C$ faktoryzuje się do C-iloczynu wewnętrznego, por. Wniosek 2.15. Jednakże, na mocy Twierdzenia 3.15

$$N = \operatorname{span}\{xb \odot y - x \odot by : x \in X, y \in Y, b \in B\}.$$

Zatem mamy naturalny izomorfizm zachowujący C-iloczyny wewnętrzne

$$(X \odot Y)/N \cong X \otimes_B^{alg} Y \qquad \text{gdzie } x \odot y + N \longmapsto x \otimes_B y.$$

W konsekwencji izomorfizm ten przedłuża się do izomorfizmu C^*-korespondencji

$$X \otimes_B Y \cong \overline{(X \odot Y)/N},$$

gdzie $\overline{(X \odot Y)/N}$ jest uzupełnieniem $(X \odot Y)/N$ do C-modułu Hilberta.

Uwaga 3.14. Oczywiście, aby zdefiniować C-moduł Hilberta $X \otimes_B Y$ wystarczy, aby X był B-modułem Hilberta. Jednakże, moduł Hilberta X możemy traktować jako C^*-korespondencję $\mathbb{C} \xrightarrow{X} B$. Wtedy złożenie z C^*-korespondencją $B \xrightarrow{Y} C$ daje nam moduł C-Hilberta $\mathbb{C} \xrightarrow{X \otimes_B Y} C$.

Ustalmy C^*-korespondencje $A \xrightarrow{X} B$ i $B \xrightarrow{Y} C$.

Twierdzenie 3.15. *Wzór* (3.2.6) *zadaje na iloczynie tensorowym przestrzeni liniowych $X \odot Y$ nieujemną C-formę hermitowską. Przestrzeń wektorów izotropowych tej formy jest rozpięta przez elementy postaci $xb \odot y - x \odot by$, gdzie $x \in X$, $y \in Y$, $b \in B$.*

DOWÓD. Jasne jest, że odwzorowanie dane na tensorach prostych wzorem (3.2.6) przedłuża się do antysymetrycznej formy półtoraliniowej na $X \odot Y$. Aby wykazać, dodatniość formy ustalmy $z = \sum_{i=1}^n x_i \odot y_i \in X \odot Y$. Niech $y = (y_1, ..., y_n)$ będzie elementem modułu Hilberta Y^n będącego sumą prostą n-kopii modułu Y. Zauważmy, że lewe mnożenie $\phi_Y : B \to \mathcal{L}(Y)$ na Y indukuje homomorfizm $\phi_Y^n : M_n(B) \to \mathcal{L}(Y^n)$, gdzie $\phi_Y^n(\{b_{i,j}\}_{i,j=1}^n)y = (\sum_{j=1}^n b_{1,j}y_j, ..., \sum_{j=1}^n b_{n,j}y_j)$. W szczególności kładąc $M = \{\langle x_i, x_j\rangle_B\}_{i,j=1}^n$ otrzymujemy

$$\langle z|z\rangle_C = \sum_{i,j=1}^n \langle y_i|\langle x_i, x_j\rangle_B y_j\rangle_C = \langle y|\phi_Y^n(M)y\rangle_C.$$

Jednakże macierz $M = \{\langle x_i, x_j\rangle_B\}_{i,j=1}^n$ jest elementem dodatnim w $M_n(B)$, gdyż dla dowolnych $b_1, .., b_n$ w B mamy

$$\sum_{i,j=1}^n b_i^* \langle x_i, x_j\rangle_B b_j = \langle \sum_{i=1}^n x_i b_i, \sum_{j=1}^n x_j b_j\rangle_B \geq 0,$$

patrz [30, Lemma 3.2]. Stąd

$$\langle z|z\rangle_C = \langle y|\phi_Y^n(M)y\rangle_C = \langle \phi_Y^n(M^{\frac{1}{2}})y|\phi_Y^n(M^{\frac{1}{2}})y\rangle_C \geq 0. \tag{3.2.7}$$

Rozważmy teraz przestrzeń $N = \{z \in X \odot Y : \langle z, z\rangle_C = 0\}$. Jeśli $z = xb \odot y - x \odot by$, gdzie $x \in X$, $y \in Y$, to

$$\langle z|z\rangle_C = \langle y|\langle xb, xb\rangle_B y\rangle_C - \langle y|\langle xb, x\rangle_B by\rangle_C - \langle by|\langle x, xb\rangle_B y\rangle_C + \langle by|\langle x, x\rangle_B by\rangle_C = 0.$$

Na odwrót, niech $z = \sum_{i=1}^n x_i \odot y_i \in X \odot Y$ będzie dowolnym elementem N. Przy powyższych oznaczeniach, na mocy (3.2.7), mamy $\phi_Y^n(M^{\frac{1}{2}})y = 0$. Implikuje to również, że $\phi_Y^n(M^{\frac{1}{4}})y = 0$, gdyż

$$\langle \phi_Y^n(M^{\frac{1}{4}})y, \phi_Y^n(M^{\frac{1}{4}})y\rangle_C = \langle y, \phi_Y^n(M^{\frac{1}{2}})y\rangle_C = 0.$$

Traktując X^n jako $M_n(B)$-moduł Hilberta dla elementu $x := (x_1, ..., x_n)$ mamy $\langle x|x\rangle_{M_n(B)} = M$. Na mocy [18, Lemma 4.4], dla każdego $0 < \alpha < 1/2$ istnieje $w \in X^n$ takie, że $x = wM^\alpha$. Niech $w = (w_1, ..., w_n)$ będzie takim elementem dla $\alpha = 1/4$. Wtedy jeśli $\{c_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ są współczynnikami macierzy $M^{1/4}$, to

$$x_j = \sum_{i=1}^n w_i c_{i,j} \quad \text{oraz} \quad \sum_{j=1}^n c_{i,j} y_j = 0.$$

Stąd otrzymujemy, że

$$z = \sum_{i=1}^n x_i \odot y_i = \sum_{i,j=1}^n (w_i c_{i,j} \odot y_i - x_i \odot c_{i,j} y_j).$$

czyli z jest elementem przestrzeni $\operatorname{span}\{xb \odot y - x \odot by : x \in X, y \in Y, b \in B\}$. □

Wniosek 3.16. *Wzór* (3.2.3) *zadaje na prawym C-module $X \otimes_B^{alg} Y$ C-iloczyn wewnętrzny.*

DOWÓD. Jedynym nietrywialnym elementem dowodu jest, że rozważana C-forma jest nieujemnie określona. To zaś wynika z Twierdzenia 3.15. □

Stwierdzenie 3.17. *Niech $A \xrightarrow{X_1} B$ i $A \xrightarrow{X_2} B$ będą C^*-korespondencjami i Niech $X_1 \otimes_B Y := \overline{X_1 \otimes_B^{alg} Y}$ oraz $X_2 \otimes_B Y := \overline{X_2 \otimes_B^{alg} Y}$ odpowiednimi C-modułami Hilberta, patrz Wniosek 3.16. Mamy liniową kontrakcję*

$$\mathcal{L}(X_1, X_2) \ni T \overset{\otimes 1}{\longmapsto} T \otimes 1 \in \mathcal{L}(X_1 \otimes_B Y, X_1 \otimes_B Y)$$

zdeterminowaną wzorem $(T \otimes 1)(x \otimes y) := Tx \otimes y$. Jeśli $X = X_1 = X_2$ to

$$\mathcal{L}(X) \ni T \overset{\otimes 1}{\longmapsto} T \otimes 1 \in \mathcal{L}(X \otimes_B Y)$$

jest zachowującym jedynkę homomorfizmem C^*-algebr.

DOWÓD. Odwzorowanie $x \otimes y \mapsto Tx \otimes y$ przez liniowość przedłuża się do odwzorowania $T \otimes 1 : X_1 \otimes_B^{alg} Y \to X_2 \otimes_B^{alg} Y$. Aby wykazać, że operator $T \otimes 1$ jest ograniczony ustalmy element $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X_1 \otimes_B^{alg} Y$ Połóżmy,

$$M = \{\langle x_i, x_j\rangle_B\}_{i,j=1}^n \qquad \text{oraz} \qquad W = \{\langle Tx_i, Tx_j\rangle_B\}_{i,j=1}^n.$$

Korzystając ze Stwierdzenia 2.36, dla dowolnych $b_1, .., b_n$ w B mamy

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n b_i^* \langle Tx_i, Tx_j\rangle_B b_j &= \langle \sum_{i=1}^n Tx_i b_i, \sum_{i=1}^n Tx_i b_i\rangle_B \\ &\le \|T\|^2 \langle \sum_{i=1}^n x_i b_i, \sum_{i=1}^n x_i b_i\rangle_B = \|T\|^2 \sum_{i,j=1}^n b_i^* \langle x_i, x_j\rangle_B b_j.\end{aligned}$$

Zatem $W \le \|T\|^2 M$ na mocy [30, Lemma 3.2]. Niech $\phi_Y^n : M_n(B) \to \mathcal{L}(Y^n)$ i $y = (y_1, ..., y_n)$ będą jak w dowodzie Twierdzenia 3.15. Wtedy

$$\begin{aligned}0 &\le \langle \phi_Y^n\Big((\|T\|^2 M - W)^{1/2}\Big) y | \phi_Y^n\Big((\|T\|^2 M - W)^{1/2}\Big) y\rangle_C \\ &= \langle y | \phi_Y^n(\|T\|^2 M - W) y\rangle_C = \langle y | \phi_Y^n(\|T\|^2 M) y\rangle_C - \langle y | \phi_Y^n(W) y\rangle_C.\end{aligned}$$

Korzystając z powyższej nierówności dostajemy

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^n Tx_i \otimes y_i\right\|^2 &= \left\|\sum_{i,j=1}^n \langle y_i | \langle Tx_i | Tx_j\rangle_B y_j\rangle_C\right\| = \|\langle y | \phi_Y^n(W) y\rangle_C\| \\ &\le \|T\|^2 \|\langle y | \phi_Y^n(M) y\rangle_C\| = \|T\|^2 \left\|\sum_{i,j=1}^n \langle y_i | \langle x_i | x_j\rangle_B y_j\rangle_C\right\| \\ &= \|T\|^2 \left\|\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right\|^2.\end{aligned}$$

Zatem $T \otimes 1$ przedłuża się jednoznacznie do operatora ograniczonego $T \otimes 1 \in B(X_1 \otimes_B Y, X_1 \otimes_B Y)$ i $\|T \otimes 1\| \le \|T\|$. Prosty rachunek pokazuje, że $T \otimes 1$ jest sprzęgalny, gdzie $T^* \otimes 1$ jest operatorem do niego sprzężonym. Kończy to dowód pierwszej części tezy. Pozostała część tezy jest teraz oczywista. □

Wniosek 3.18. *C-moduł Hilberta $X \otimes_B Y := \overline{X \otimes_B^{alg} Y}$ jest w naturalny sposób C^*-korespondencją z A do C. To znaczy, określony jest homomorfizm $\varphi_{X\otimes_B Y} : A \to \mathcal{L}(X \otimes_B Y)$, gdzie*

$$\phi_{X\otimes_B Y}(a)(x \otimes y) := (ax) \otimes y, \qquad x \in X, y \in Y, a \in A.$$

DOWÓD. Odwzorowanie $\phi_{X\otimes_B Y}$ jest złożeniem homomorfizmów $\phi_X : A \to \mathcal{L}(X)$ oraz $\otimes 1 : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X \otimes_B Y)$. □

Rozważmy teraz właściwości złożenia korespondencji. W tym celu, przydatne będzie następujące stwierdzenie.

Lemat 3.19. *Dla każdego $x \in X$ mamy operator $\Theta_x \in \mathcal{L}(Y, X \otimes_B Y)$, gdzie*

$$\Theta_x y = x \otimes y, \qquad \Theta_x^* x' \otimes y = \langle x, x' \rangle_B y$$

Odwzorowanie $X \ni x \mapsto \Theta_x \in \mathcal{L}(Y, X \otimes_B Y)$ jest liniową kontrakcją, a dokładniej $\|\Theta_x\|^2 = \|\phi_Y(\langle x|x\rangle_B)\| \le \|x\|^2$.

DOWÓD. Łatwy dowód zostawiamy czytelnikowi. W szczególności zauważmy, że $\Theta_x^*\Theta_x = \phi_Y(\langle x|x\rangle_B)$. □

Stwierdzenie 3.20. *Rozważmy homomorfizm $\otimes 1 : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X \otimes_B Y)$.*

1) jeśli $B \xrightarrow{Y} C$ jest injektywna, to homomorfizm $\otimes 1 : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X \otimes_B Y)$ jest injektywny oraz $\otimes 1^{-1}(\mathcal{K}(X \otimes_B Y)) \subseteq \mathcal{K}(X)$, tzn. jeśli $T \otimes 1 \in \mathcal{K}(X \otimes_B Y)$ to $T \in \mathcal{K}(X)$;

2) jeśli $B \xrightarrow{Y} C$ jest właściwa, to $\mathcal{K}(X) \otimes 1 \subseteq \mathcal{K}(X \otimes_B Y)$;

3) jeśli $\mathcal{K}(Y) \subseteq \phi_Y(B)$, to $\mathcal{K}(X \otimes_B Y) \subseteq \mathcal{K}(X) \otimes 1$.

DOWÓD. 1) Załóżmy, że odwzorowanie $\phi_Y : B \to \mathcal{L}(Y)$ jest injektywne. Jeśli $T \otimes 1 = 0$, to dla dowolnych $x \in X$ i $y_1, y_2 \in Y$ mamy $\langle y_1|\phi_Y(\langle Tx|Tx\rangle_B)y_2\rangle_C = 0$. Stąd i z injektywności ϕ_Y, $\langle Tx|Tx\rangle_B = 0$ dla każdego $x \in X$. Czyli $T = 0$. Zatem $\otimes 1 : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X \otimes_B Y)$ jest izometrią. Niech $\{\mu_\lambda\}$ będzie jedynką aproksymatywną w $\mathcal{K}(X)$. Niech $x_1, x_2 \in X$ i $y_1, y_2 \in Y$. Na mocy Lematu 2.40 istnieje $K \in \mathcal{K}(X)$ i $x \in X$ takie, że $x_1 = Kx$. Stąd

$$(\mu_\lambda \otimes 1)\Theta_{x_1\otimes y_1, x_2\otimes y_2} = \mu_\lambda K\Theta_{x\otimes y_1, x_2\otimes y_2} \to K\Theta_{x\otimes y_1, x_2\otimes y_2} = \Theta_{x_1\otimes y_1, x_2\otimes y_2}.$$

Stąd wynika, że $\mu_\lambda \otimes 1 S \to S$ dla każdego $S \in \mathcal{K}(X \otimes_B Y)$. Zatem jeśli $T \in \mathcal{L}(X)$ jest taki, że $T \otimes 1 \in \mathcal{K}(X \otimes_B Y)$, to

$$0 = \lim_\lambda \|T \otimes 1 - (\mu_\lambda \otimes 1)(T \otimes 1)\| = \lim_\lambda \|T - \mu_\lambda T\|.$$

Czyli $T \in \mathcal{K}(X)$.

2) Załóżmy, że $\phi_Y(B) \subseteq \mathcal{K}(Y)$. Żeby wykazać, że $\mathcal{K}(X) \otimes 1 \subseteq \mathcal{K}(X \otimes_B Y)$ wystarczy pokazać, że $\Theta_{x_1,x_2} \otimes 1 \in \mathcal{K}(X \otimes_B Y)$ dla każdych x_1, $x_2 \in X$. Na mocy Wniosku $x_1 = xb$ dla pewnego $x \in X$ i b. Zauważmy, że przywołując oznaczenia Lematu 3.19 mamy

$$\Theta_{x_1,x_2} \otimes 1 = \Theta_x \phi_Y(b) \Theta_{x_2}^*,$$

gdyż, dla $x' \in X$ i $y \in Y$ zachodzi

$$\left(\Theta_x \phi_Y(b) \Theta_{x_2}^*\right) x' \otimes y = x \otimes \phi_Y(b\langle x_2 | x' \rangle_B) y = xb\langle x_2 | x' \rangle_B \otimes y = (\Theta_{xb,x_2} \otimes 1)\, x' \otimes y.$$

Stąd $\Theta_{x_1,x_2} \otimes 1 \in \mathcal{K}(X \otimes_B Y)$, bo $\phi_Y(b) \in \mathcal{K}(Y)$, patrz Lemat 2.39.

3) Niech $x, x' \in X$ i $y, y' \in Y$. Skoro $\phi_Y(B) \supseteq \mathcal{K}(Y)$, to istnieje $b \in B$ takie, że $\phi_Y(b) = \Theta_{y,y'}$. Wtedy

$$\Theta_{x\otimes y, x'\otimes y'} = \Theta_{xb,x'} \otimes 1.$$

Rzeczywiście dla dowolnych $x'' \in X$ i $y'' \in Y$, mamy

$$\begin{aligned}\Theta_{x\otimes y, x'\otimes y'} x'' \otimes y'' &= x \otimes y\langle y', \langle x', x'' \rangle_B y'' \rangle_C = x \otimes \Theta_{y,y'} \langle x', x'' \rangle_B y'' \\ &= x \otimes b\langle x', x'' \rangle_B y'' = xb\langle x', x'' \rangle_B \otimes y'' = (\Theta_{xb,x'} \otimes 1)\, x'' \otimes y''.\end{aligned}$$

Zatem $\Theta_{x\otimes y, x'\otimes y'} \in \mathcal{K}(X) \otimes 1$, co implikuje tezę, gdyż przestrzeń $\mathcal{K}(X \otimes_B Y)$ jest rozpięta przez operatory $\Theta_{x\otimes y, x'\otimes y'}$, a $\mathcal{K}(X) \otimes 1$ jest domkniętą podprzestrzenią $\mathcal{L}(X \otimes_B Y)$. □

Wniosek 3.21. *Złożenie C^*-korespondencji injektywnych jest C^*-korespondencją injektywną. Złożenie C^*-korespondencji właściwych jest C^*-korespondencją właściwą.*

Przykład 3.22. (Złożenie homomorfizmów) Niech $\alpha : A \to B$ i $\beta : B \to C$ będą homomorfizmami C^*-algebr. Złożenie $\beta \circ \alpha : A \to C$ oczywiście jest również homomorfizmem. Rozważmy niezdegenerowane C^*-korespondencje $A \xrightarrow{X_\alpha} B$, $B \xrightarrow{X_\beta} C$ oraz $A \xrightarrow{X_{\beta\circ\alpha}} C$ odpowiadające tym homomorfizmom, patrz Przykład 3.7. Wtedy mamy naturalny izomorfizm C^*-korespondencji

$$X_\alpha \otimes_B X_\beta \cong X_{\beta\circ\alpha}.$$

Rzeczywiście, rozważmy addytywne odwzorowanie $T : X_\alpha \otimes_B^{\mathrm{alg}} X_\beta \to X_{\beta\circ\alpha}$ gdzie

$$T(x \otimes y) := \beta(x) y, \qquad x \in X_\alpha = \alpha(A)B,\ y \in X_\beta = \beta(B)C.$$

Zauważmy, że T jest poprawnie określone i surjektywne, gdyż dla dowolnego $c \in X_{\beta\circ\alpha} = \beta(\alpha(A))C$ istnieją $a \in A$, $c' \in C$ takie, że $c = \beta(\alpha(a))c' = T(\alpha(a) \otimes c')$. Ponadto, T zachowuje C-iloczyny wewnętrzne, gdyż dla dowolnych $x_1, x_2 \in X_\alpha = \alpha(A)B$ i $y_1, y_2 \in X_\beta = \beta(B)C$ mamy

$$\begin{aligned}\langle T(x_1 \otimes y_1) | T(x_2 \otimes y_2) \rangle_C &= (\beta(x_1)y_1)^* \beta(x_2) y_2 = y_1^* \beta(x_1^* x_2) y_2 \\ &= \langle y_1 | \beta(\langle x_1 | x_2 \rangle_B) y_2 \rangle_C = \langle x_1 \otimes y_1 | x_2 \otimes y_2 \rangle.\end{aligned}$$

Zatem $T : X_\alpha \otimes_B^{alg} X_\beta \to X_{\beta\circ\alpha}$ jest odwracalną izometrią. Stąd $X_\alpha \otimes_B^{alg} X_\beta = X_\alpha \otimes_B X_\beta$ jest przestrzenią zupełną i w szczególności $T : X_\alpha \otimes_B X_\beta \to X_{\beta\circ\alpha}$ jest izomorfizmem C-modułów Hilberta. Prosty rachunek, dla $a \in A$, $x \in X_\alpha$ i $y \in X_\beta$,

$$T(a(x\otimes y)) = T(\alpha(a)x\otimes y) = \beta(\alpha(a)x)y = \beta(\alpha(a))\beta(x)y = (\beta\circ\alpha)(a)T(x\otimes Y),$$

pokazuje, że T jest też A-liniowy. Czyli T izomorfizmem C^*-korespondencji.

Przykład 3.23. (Złożenie grafów) Niech $G = (E, s, r)$ będzie grafem z V do W i niech $H = (F, s, r)$ będzie grafem z U do V, patrz Przykład 3.9. Złożenie grafów G i H definiujemy jako graf $G \circ H := (E \circ F, s, r)$ z U do W, gdzie:

$$E \circ F := \{(e, f) \in E \times F : s(e) = r(f)\}, \quad s(e, f) := s(f), \ r(e, f) = r(e).$$

Niech $C_0(W) \xrightarrow{X_G} C_0(V)$, $C_0(V) \xrightarrow{X_H} C_0(U)$ i $C_0(W) \xrightarrow{X_{G\circ H}} C_0(U)$ będą C^*-korespondencjami odpowiadającymi odpowiednim grafom, jak w Przykładzie 3.9. Wtedy mamy naturalny izomorfizm

$$X_G \otimes_{C_0(V)} X_H \cong X_{G\circ H}.$$

Aby to wykazać, zauważmy, że przestrzeń Banacha X_G jest domkniętą otoczką liniową funkcji δ_e, $e \in E$, gdzie $\delta_e(e') = \delta_{e,e'}$. Niech $e \in E$ i $f \in F$. Jeśli $(e, f) \notin E \circ F$, to $\delta_e \otimes \delta_f = 0$ w $X_G \otimes_{C_0(V)} X_H$, gdyż $\delta_{s(e)}\delta_{r(f)} = 0$ i stąd

$$\delta_e \otimes \delta_f = \delta_e\delta_{s(e)} \otimes \delta_{r(f)}\delta_f = \delta_e \otimes \delta_{s(e)}\delta_{r(e)}\delta_f = \delta_e \otimes 0 = 0.$$

Zatem wzór

$$T(\delta_e \otimes \delta_f) = \delta_{(e,f)} \qquad \text{dla } (e, f) \in E \circ F,$$

przedłuża się przez liniowość do odwzorowania zdefiniowanego na gęstym podbiorze iloczynu tensorowego $X_G \otimes_{C_0(V)} X_H$, którego obraz jest gęsty w $X_{G\circ H}$. Dla dowolnych $(e_i, f_i) \in E \circ F$, $i = 1, 2$, mamy

$$\begin{aligned}
\langle \delta_{e_1} \otimes \delta_{f_1} | \delta_{e_2} \otimes \delta_{f_2} \rangle_{C_0(U)} &= \langle \delta_{f_1} | \langle \delta_{e_1} | \delta_{e_2} \rangle_{C_0(V)} \delta_{f_2} \rangle_{C_0(U)} \\
&= \begin{cases} \langle \delta_{f_1} | \delta_{s(e_2)} \delta_{f_2} \rangle_{C_0(U)} & e_1 = e_2 \\ 0 & e_1 \neq e_2 \end{cases} = \begin{cases} \delta_{s(f_2)} & e_1 = e_2, f_1 = f_2 \\ 0 & \text{w p.w.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \delta_{s(e_2,f_2)} & (e_1, f_1) = (e_2, f_2) \\ 0 & (e_1, f_1) \neq (e_2, f_2) \end{cases} = \langle \delta_{(e_1,f_1)} | \delta_{(e_2,f_2)} \rangle_{C_0(U)} \\
&= \langle T(\delta_{e_1} \otimes \delta_{f_1}) | T(\delta_{e_2} \otimes \delta_{f_2}) \rangle_{C_0(U)}.
\end{aligned}$$

Stąd wynika, że T zachowuje $C_0(U)$-iloczyn wewnętrzny. Zatem przedłuża się do operatora unitarnego $T : X_G \otimes_{C_0(V)} X_H \cong X_{G\circ H}$. Aby wykazać, że jest to izomorfizm C^*-korespondencji wystaczy zauważyć, że T komutuje z lewym mnożeniem przez elementy z $C_0(W)$. Ale dla $a \in C_0(W)$ i $(e, f) \in E \circ F$ mamy $a\delta_e = a(r(e))\delta_e$ oraz $a\delta_{(e,f)} = a(r(e))\delta_{(e,f)}$ i stąd $aT(\delta_e\otimes\delta_f) = Ta(\delta_e\otimes\delta_f)$. Jako że elementy $\delta_e \otimes \delta_f$ generują $X_G \otimes_{C_0(V)} X_H$ widzimy, że T jest $C_0(W)$-liniowy.

Przykład 3.24 (Iloczyny tensorowe konkretnych C^*-korespondencji)**.** Niech $A, B, C \subseteq B(H)$ będą C^*-algberami i niech $X, Y \subseteq B(H)$ będą konkretnymi C^*-korepospondencjami $A \xrightarrow{X} B$ oraz $B \xrightarrow{Y} C$, tzn.

$$XB \subseteq X, \quad X^*X \subseteq B, \quad AX \subseteq X \quad \text{and} \quad YC \subseteq Y, \quad Y^*Y \subseteq C, \quad BY \subseteq Y.$$

Wtedy $\overline{XY} = \overline{\mathrm{span}}\{xy : x \in X, y \in Y\} \subseteq B(H)$ jest konkretną C^*-korespondencją $A \xrightarrow{\overline{XY}} C$. Rzeczywiście, korzystając z powyższych relacji otrzymujemy

$$\overline{XY}C \subseteq \overline{XY}, \quad (\overline{XY})^*\overline{XY} \subseteq C, \quad A\overline{XY} \subseteq \overline{XY}.$$

Co więcej odwzorowanie $x \otimes y \longmapsto xy$ przedłuża się do izomorfizmu

$$X \otimes_B Y \cong \overline{XY}.$$

W szczególności, $\langle x_1 \otimes y_1 | x_2 \otimes y_2 \rangle_C = y_1^*(x_1^* x_2) y_2 = (x_1 y_1)^*(x_2 y_2)$.

3.3 C^*-korespondencje jako morfizmy kategorii C^*-algebr

C^*-algebry wraz z homomorfizmami tworzą w naturalny sposób kategorię. Czasem rozważa się kategorię C^*-algebr gdzie morfizmem między A i B jest niezdegenerowany homomorfizm $A \to \mathcal{M}(B)$. Z tak zdefiniowanymi morfizmami, podkategoria algebr przemiennych jest kategorią dualną do standardowej kategorii przestrzeni topologicznych z odwzorowaniami ciągłymi jako morfizmami. W teorii C^*-algebr pojawia się jednak często potrzeba rozpatrywania jeszcze bardziej ogólnych "morfizmów" między C^*-algebrami. W wielu przypadkach, nie jest nawet do końca jasne jak zdefiniować składanie - działanie takich "morfizmów" na C^*-algebrach. Jak pokazaliśmy w poprzednich podrozdziałach, C^*-korespondencje stanowią naturalne uogólenie wielu bardzo ogólnych relacji między C^*-algebrami. Co więcej iloczyn tensorowy jest naturalną konstrukcją uogólniającą składanie homomorfizmów.

Celem tego podrozdziału jest opis "kategorii" C^*-algebr, w której morfizmami są niezdegenerowane C^*-korespondencje. Piszemy tu kategoria w cudzysłowie, gdyż formalnie struktura taka nie tworzy kategorii, lecz bikategorię. Mówiąc obrazowo bikategoria różni się od kategorii tym, że własności algebraicznie składania morfizmów takie jak łączność zachodzą z dokładnością do naturalnego izomorfizmu. W szczególności, utożsamiając "izomorficzne" morfizmy można z bikategorii zawsze zrobić kategorię. Takie podejście do C^*-korespondencji proponował już Schweizer [28]. Podejście bikategoryjne było eksplorowane w [4]. Jako że formalna definicja bikategorii jset skomplikowana przedstawimy tu konstrukcję kategorii utożsamiając C^*-korespendcje z dokładnością do izomorfizmu.

Trywialne C^*-korespondencje są naturalnymi kandydatami na "morfizmy identycznościowe". Przy czym, istotne tu okazuje się założenie o niezdegenerowaniu.

Stwierdzenie 3.25. *Niech $A \xrightarrow{X} B$ będzie niezdegenerowaną C^*-korespondencją z A do B. Traktując A i B jako trywialne C^*-korespondencje mamy naturalne izomorfizmy zadane przez odpowiednio prawe i lewe mnożenie:*

$$X \otimes_B B \cong X, \qquad A \otimes_A X \cong X.$$

Jeśli $A \xrightarrow{Y} A$ jest C^*-korespondencją taką, że dla każdej niezdegenerowanej C^*-korespondencji $A \xrightarrow{Z} B$ zachodzi $Y \otimes_A Z \cong Z$, to $Y \cong A$.

DOWÓD. Jasne jest, że przyporządkowanie $X \otimes_B^{alg} B \ni x \otimes b \mapsto xb \in X$ przedłuża się do odwzorowanie A-B-liniowego. Jako że każady moduł Hilberta jest niezdegenerowany jako prawy moduł, patrz Wniosek 2.12, to odwzorowanie to jest surjekcją. Prosty rachunek

$$\langle x_1 \otimes b_1 | x_2 \otimes b_2 \rangle_B = b_1^* \langle x_1 | x_2 \rangle_B b_2 = \langle x_1 b_1 | x_2 b_2 \rangle_B,$$

pokazuje, że odwzorowanie to jest izometrią zachowującą iloczyny wewnętrzne. Stąd $X \otimes_B B = X \otimes_B^{alg} B \cong X$.

Analogicznie, mamy A-B-liniowe odwzorowanie z $A \otimes_A^{alg} X$ w X, gdzie $a \otimes x \mapsto ax$. Odwzorowanie to jest surjektywne, gdyż założyliśmy, że X jest C^*-korespondencją niezdegenerowaną. Odwzorowanie to zachowuje iloczyny wewnętrzne

$$\langle a_1 \otimes x_1 | a_2 \otimes x_2 \rangle_B = \langle x_1 | a_1^* a_2 x_2 \rangle_B = \langle a_1 x_1 | a_2 x_2 \rangle_B.$$

Zatem $A \otimes_A X = A \otimes_A^{alg} X \cong X$.

Niech teraz $A \xrightarrow{Y} A$ będzie jak w ostatniej części tezy. Wtedy biorąc za $Z = A$ dostajemy $Y \otimes A \cong A$. Z drugiej strony, na mocy pierwszej części tezy $Y \otimes_A A \cong Y$. Stąd $Y \cong A$. □

Uwaga 3.26. Jak widać z powyższego dowodu dla dowolnej (niekoniecznie niezdegenerowanej) C^*-korespondencji $A \xrightarrow{X} B$ zachodzi $X \otimes_B B \cong X$. Natomiast drugi izomorfizm na ogół przyjmuje postać $A \otimes_A X \cong AX$, gdzie $AX = X$ tylko wtedy, gdy X jest C^*-korespondencją niezdegenerowaną.

Łączność nie nastręcza trudności.

Stwierdzenie 3.27. *Niech $A \xrightarrow{X} B$, $B \xrightarrow{Y} C$ i $C \xrightarrow{Z} D$ będą C^*-korespondencjami. Przyporządkowanie $(x \otimes y) \otimes z \longmapsto x \otimes (y \otimes z)$ determinuje izomorfizm*

$$(X \otimes_B Y) \otimes_C Z \cong X \otimes_B (Y \otimes_C Z).$$

DOWÓD. Teza wynika z następującego rachunku

$$
\begin{aligned}
\langle (x_1 \otimes y_1) \otimes z_1 | (x_2 \otimes y_2) z_2 \rangle_D &= \langle z_1 | \langle x_1 \otimes y_1 | x_2 \otimes y_2 \rangle_C z_2 \rangle_D \\
&= \langle z_1 | \langle y_1 | \langle x_1 | x_2 \rangle_B y_2 \rangle_C z_2 \rangle_D \\
&= \langle y_1 \otimes z_1 | \langle x_1 | x_2 \rangle_B y_2 \otimes z_2 \rangle_D \\
&= \langle x_1 \otimes (y_1 \otimes z_1) | x_2 \otimes (y_2 \otimes z_2) \rangle_D .
\end{aligned}
$$

□

Powyższe stwierdzenie uzasadnia standardowy zwyczaj w literaturze, że przy pisaniu iloczynów tensorowych więcej, niż dwóch czynników pomija się nawiasy. Zauważmy, że ogólnie iloczyn tensorowy faktoryzuje się do operacji na klasach abstrakcji C^*-korespondencji izomorficznych.

Rzeczywiście, jeśli $A \xrightarrow{X_1} B$ i $A \xrightarrow{X_2} B$ są izomorficznymi C^*-korespondencjami z izomorfizmem $T : X_1 \to X_2$, to dla dowolnej C^*-korespondencji $B \xrightarrow{Y} C$ odwzorowanie $T \otimes 1 : X_1 \otimes_B Y \to X_2 \otimes_B Y$, patrz Stwierdzenie 3.17, jest izomorfizmem C^*-korespondencji: $X_1 \otimes_B Y \cong X_2 \otimes_B Y$. Analogicznie, niezależność iloczynu tensorowego od wyboru reprezentanta na drugim czynniku iloczynu tensorowego otrzymamy stosując następujący odpowiednik Stwierdzenia 3.17:

Stwierdzenie 3.28. *Niech $A \xrightarrow{X} B$ oraz $B \xrightarrow{Y_1} C$ i $B \xrightarrow{Y_2} C$ będą C^*-korespondencjami. Mamy liniową kontrakcję*

$$
\mathcal{L}(Y_1, Y_2) \ni T \xmapsto{1\otimes} 1 \otimes T \in \mathcal{L}(X \otimes_B Y_1, X \otimes_B Y_2)
$$

zdeterminowaną wzorem $(1 \otimes T)(x \otimes y) := x \otimes Ty$. Jeśli $Y = Y_1 = Y_2$ to

$$
\mathcal{L}(Y) \ni T \xmapsto{1\otimes} 1 \otimes T \in \mathcal{L}(X \otimes_B Y)
$$

jest zachowującym jedynkę homomorfizmem C^*-algebr.

DOWÓD. Tak jak w dowodzie Stwierdzenia 3.17 jedynym nietrywialnym krokiem jest dowód faktu, że wzór $(1 \otimes T)(x \otimes y) := x \otimes Ty$ determinuje odwzorowanie o normie nie większej niż $\|T\|$. W tym celu ustalmy element $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes_B^{alg} Y_1$. Jak zauważyliśmy w dowodzie Twierdzenia 3.15 macierz $M := \{\langle x_i, x_j \rangle_B\}_{i,j=1}^n$ jest elementem dodatnim w $M_n(B)$. Niech $\phi_Y^n : M_n(B) \to \mathcal{L}(Y^n)$ i $y = (y_1, ..., y_n) \in Y^n)$ będą jak w dowodach Twierdzenia 3.15 i Stwierdzenia 3.17. Zdefiniujmy $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(Y^n)$ wzorem $\widetilde{T} z = (Tz_1, ..., Tz_n)$ dla każdego

$z = (z_1, ..., z_n) \in Y^n$. Korzystając z ograniczoności dla operatora $\widetilde{T}$ dostajemy

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes T y_i \right\|^2 &= \left\| \sum_{i,j=1}^{n} \langle Ty_i | \langle x_i | x_j \rangle_B T y_j \rangle_C \right\| = \left\| \langle \widetilde{T} y | \widetilde{T} \phi_Y^n(M) y \rangle_C \right\| \\
&= \left\| \langle \widetilde{T} \phi_Y^n(M^{1/2}) y | \widetilde{T} \phi_Y^n(M^{1/2}) y \rangle_C \right\| \\
&\leq \|\widetilde{T}\|^2 \left\| \langle \phi_Y^n(M^{1/2}) y | \phi_Y^n(M^{1/2}) y \rangle_C \right\| = \|T\|^2 \left\| \sum_{i,j=1}^{n} \langle y_i | \langle x_i | x_j \rangle_B y_j \rangle_C \right\| \\
&= \|T\|^2 \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\|^2 .
\end{aligned}$$

Zatem $\|1 \otimes T\| \leq \|T\|$. □

Wniosek 3.29. *Niech $A \xrightarrow{X_1} B$ i $A \xrightarrow{X_2} B$ oraz $B \xrightarrow{Y_1} C$ i $B \xrightarrow{Y_2} C$ będą C^*-korespondencjami. Dla dowolnych $S \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ i $T \in \mathcal{L}(Y_1, Y_2)$ wzór*

$$(S \otimes T) x \otimes y = Sx \otimes Ty$$

determinuje operator $S \otimes T \in \mathcal{L}(X_1 \otimes_B Y_1, X_2 \otimes_B Y_2)$ oraz $\|S \otimes T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$. Ponadto, jeśli S i T są izomorfizmami C^*-korespondencji to $S \otimes T$ również

DOWÓD. W świetle Stwierdzeń 3.17 i 3.28 wystarczy zauważyć, że $S \otimes T = (S \otimes 1)(1 \otimes T)$ oraz jeśli S i T są izomorfizmami C^*-korespondencji, to $S \otimes 1$ oraz $1 \otimes T$ również. □

Niech $[X]$ oznacza klasę równoważności wszystkich C^*-korespondencji izomorficznych z C^*-korespondencją $A \xrightarrow{X} B$.

Twierdzenie 3.30. *C^*-algebry można rozpatrywać jako obiekty kategorii $\mathfrak{Corr}$ gdzie morfizmy z C^*-algebry A do C^*-algebry B definiujemy jako*

$$Mor(A, B) := \{[X] : A \xrightarrow{X} B \text{ niezdegenerowana } C^*\text{-korespondencja}\},$$

natomiast składanie morfizmów $[X] \in Mor(A, B)$ i $[Y] \in Mor(B, C)$ określamy wzorem

$$[X] \circ [Y] = [X \otimes_B Y].$$

DOWÓD. Złożenie $\circ$ jest poprawnie określone na mocy Wniosku 3.29. Łączność składania morfizmów i istnienie morfizmów identycznościowych wynika ze Stwierdzeń 3.27 oraz 3.25 odpowiednio. □

Ważnym zagadnieniem jest opis morfizmów $[X]$ odwracalnych w kategorii $\mathfrak{Corr}$. Jak wykażemy w kolejnym podrozdziale, C^*-korespondencja jest odwracalana wtedy i tylko wtedy gdy jest bimodułem równoważności w sensie Rieffela.

3.4 Bimoduły Hilberta

Niech A, B będą C^*-algebrami. W tym podrodziale pokażemy, że bimoduły Hilberta są szczególnymi przypadkami C^*-korespondencji prezentującymi pewien rodzaj odwracalności.

Definicja 3.31. Przez *A-B-bimoduł Hilberta* rozumiemy zbiór X, który jest wyposażony zarówno w strukturę prawego B-modułu Hilberta jak i lewego A-modułu Hilberta, gdzie odpowiednie iloczyny wewnętrzne spełniają warunek

$$x\langle y|z\rangle_B = {}_A\langle x|y\rangle z \qquad \text{dla } x, y, z \in X. \tag{3.4.1}$$

Dokładniej X jest prawym B-modułem Hilberta X, w którym dodatkowo określone jest lewe mnożenie przez elementy A oraz lewy A-iloczyn wewnętrzny tzn. funkcja ${}_A\langle\cdot|\cdot\rangle : X \times X \to A$ spełniającą warunki:

1) $\forall_{a\in A}\forall_{x,y\in X} \quad {}_A\langle ax|y\rangle = a\,{}_A\langle x|y\rangle$,

2) $\forall_{x,y\in X} \quad {}_A\langle y|x\rangle = {}_A\langle x|y\rangle^*$,

3) $\forall_{x,y\in X} \quad {}_A\langle x|y\rangle = 0 \iff x = 0$.

Ponadto zakładamy warunek (3.4.1). Jeżeli dodatkowo A-B-bimoduł X jest pełny jako lewy i prawy moduł Hilberta, tzn.

$$\langle X|X\rangle_B = \overline{\operatorname{span}}\{\langle x|y\rangle_B : x, y \in X\} = B,$$
$${}_A\langle X|X\rangle = \overline{\operatorname{span}}\{{}_A\langle x|y\rangle : x, y \in X\} = A,$$

to X nazywamy *bimodułem równoważności* i mówimy, że C^*-algebry A i B są *równoważne w sensie Mority-Rieffela*.

Uwaga 3.32. Jak wykażemy poniżej, patrz Wniosek 3.35, jeżeli X jest A-B-bimodułem Hilberta, to A działa na X przez operatory sprzęgalne w B-iloczynie wewnętrznym. Jako że operatory takie są B-liniowe, patrz Lemat 2.30, to

$$\forall_{a\in A, b\in B}\forall_{x\in X} \quad (ax)b = a(xb),$$

tzn. A-B-bimoduł Hilberta jest A-B-bimodułem w sensie algebraicznym.

Uwaga 3.33. Jak wykażemy poniżej, patrz Wniosek 3.36, jeżeli X jest A-B-bimodułem Hilberta, to normy pochodzące od ${}_A\langle\cdot|\cdot\rangle$ oraz od $\langle\cdot|\cdot\rangle_B$ pokrywają się. Czyli zupełność prawego B-modułu Hilberta pociąga za sobą zupełność lewego A-modułu.

Lemat 3.34. *Jeśli X jest A-B-bimodułem Hilberta, to lewe mnożenie zadaje izomorfizm C^*-algebr*

$${}_A\langle X|X\rangle \cong \mathcal{K}(X),$$

gdzie $\mathcal{K}(X)$ to operatory zwarte na prawym B-module Hilberta X.

DOWÓD. Wprowadźmy, oznaczenie $\lambda(a)(x) := ax$, dla $a \in A$, $x \in X$. Potrzebujemy pokazać, że $\lambda : {}_A\langle X|X\rangle \to \mathcal{K}(X)$ jest izomorfizmem. Zauważmy, że dla $x, y, z \in X$ mamy $\Theta_{x,y}z = x\langle y|z\rangle_B = {}_A\langle x|y\rangle z$ (na mocy (3.4.1)). Zatem $\lambda({}_A\langle x|y\rangle) = \Theta_{x,y}$. Stąd

$$\begin{aligned}\|\lambda(\sum_{i=1}^n {}_A\langle x_i|y_i\rangle)\| &= \|\sum_{i=1}^n \Theta_{x_i,y_i}\| = \sup_{\|z\|=1} \|\sum_{i=1}^n x_i\langle y_i|z\rangle_B\| = \sup_{\|z\|=1} \|\sum_{i=1}^n {}_A\langle x_i|y_i\rangle z\| \\ &\le \|\sum_{i=1}^n {}_A\langle x_i|y_i\rangle\|.\end{aligned}$$

Czyli $\lambda : {}_A\langle X|X\rangle \to \mathcal{K}(X)$ jest operatorem ograniczonym o gęstym obrazie. Co więcej nietrudno zauważyć, że λ jest homomorfizmem C^*-algebr. Zatem λ jest epimorfizmem i wystarczy pokazać, że jądro λ jest trywialne.

Załóżmy, że $a \in {}_A\langle X|X\rangle$ jest takie, że $\lambda(a) = 0$. Wtedy dla dowolnych $x, y \in X$ mamy

$$a_A\langle x, y\rangle = {}_A\langle ax, y\rangle = {}_A\langle \lambda(a)x, y\rangle = 0.$$

Stąd $a \cdot {}_A\langle X|X\rangle = \{0\}$, czyli $a = 0$. □

Wniosek 3.35. *Każdy A-B-bimoduł Hilberta X jest C^*-korespondencją z A do B, tzn. lewe działanie A na X zadaje homomorfizm $\phi_X : A \to \mathcal{L}(X)$ z A w C^*-algebrę operatorów sprzęgalnych na B-module Hilberta X.*

DOWÓD. Niech $a \in A$ oraz $x, y \in X$. Z Lematu 2.40 zastosowanego do lewego ${}_A\langle X|X\rangle$-modułu Hilberta wynika, że $x = bx'$ gdzie $b \in {}_A\langle X|X\rangle$ oraz $x' \in X$. Z Lematu 3.34, mnożenie przez ab oraz przez b zadaje operatory sprzęgalne (a nawet zwarte). Zatem

$$\langle ax, y\rangle_B = \langle abx', y\rangle_B = \langle x', (ab)^*y\rangle_B = \langle x', b^*a^*y\rangle_B = \langle bx', a^*y\rangle_B = \langle x, a^*y\rangle_B.$$

Czyli mnożenie przez a jest operatorem sprzęgalnym i operator sprzężony jest mnożeniem przez a^*. Stąd lewe mnożenie zadaje homomorfizm C^*-algebr $\phi_X : A \to \mathcal{L}(X)$. □

Wniosek 3.36. *Jeśli X jest A-B-bimodułem Hilberta, to $\|{}_A\langle x, x\rangle\| = \|\langle x, x\rangle_B\|$ dla każdego $x \in X$, tzn. normy zadane przez iloczyny wewnętrzne się pokrywają.*

DOWÓD. Na mocy Lematu $\|{}_A\langle x, x\rangle\| = \|\Theta_{x,x}\|$. Natomiast z Lematu 2.41, mamy $\|\Theta_{x,x}\| = \|\langle x, x\rangle_B\|$. □

Przedstawimy teraz charakteryzację bimodułów Hilberta jako C^*-korespondencji, dla których lewe działanie obcina się do izomorfizmu na operatory zwarte.

Stwierdzenie 3.37. *C^*-korespondencja $A \xrightarrow{X} B$ jest bimodułem Hilberta, tzn. istnieje lewy iloczyn wewnętrzny ${}_A\langle\cdot|\cdot\rangle$ taki, że X jest A-B-bimodułem Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy ϕ_X obcina się do izomorfizmu $\phi_X|_{J_X} : J_X \to \mathcal{K}(X)$, gdzie $J_X := \phi_X^{-1}(\mathcal{K}(X)) \cap (\ker\phi_X)^\perp$ jest ideałem Katsury, i wtedy*

$${}_A\langle x|y\rangle = \phi_X|_{J_X}^{-1}(\Theta_{x,y}) \qquad \text{dla } x, y \in X. \tag{3.4.2}$$

DOWÓD. Jeśli X jest A-B-bimodułem Hilberta to na mocy Lematu 3.34, $\phi_X : {}_A\langle X|X\rangle \to \mathcal{K}(X)$ jest izomorfizmem C^*-algebr. W szczególności, ${}_A\langle X|X\rangle \subseteq J_X$. Z definicji ideału J_X homomorfizm $\phi_X : J_X \to \mathcal{K}(X)$ jest injektywny, a skoro ${}_A\langle X|X\rangle \subseteq J_X$, to jest on również surjektywny. Stąd $\phi_X : J_X \to \mathcal{K}(X)$ jest izomorfizmem oraz $J_X = {}_A\langle X|X\rangle$. Wzór (3.4.2) jest jasny, gdyż $\Theta_{x,y}z = x\langle y|z\rangle_B = {}_A\langle x|y\rangle z$ dla $x, y, z \in X$.

W drugą stronę, jeżeli $A \xrightarrow{X} B$ jest C^*-korespondencją taką, że $\phi_X|_{J_X} : J_X \to \mathcal{K}(X)$ jest izomorfizmem, to wykazanie, że wzór (3.4.2) zadaje na lewym A-module X A-iloczyn wewnętrzny spełniający (3.4.1) nie przysparza problemów. □

Wniosek 3.38. *C^*-korespondencja $A \xrightarrow{X} B$ jest bimodułem równoważności, gdy X jako prawy B-moduł Hilberta jest pełny oraz $\phi_X : A \to \mathcal{K}(X)$ jest izomorfizmem.*

Przykład 3.39 (Izomorfizmy)**.** Niech $X = B_B$ będzie trywialnym prawym B-modułem Hilberta. Wówczas, porównaj Przykład 3.7, zadanie na B_B struktury A-B bimodułu równoważności jest tożsame z wybraniem izomorfizmu C^*-algebr $\alpha : A \to B$. Wtedy lewy iloczyn wewnętrzny jest dany wzorem ${}_A\langle x|y\rangle := \alpha^{-1}(xy^*)$. W szczególności, izomorficzne C^*-algebry są równoważne w sensie Mority-Rieffela.

Przykład 3.40 (Częściowe izomorfizmy)**.** Opuszczenie w powyższym przykładzie założenia o pełności bimodułów prowadzi do pojęcia częściowego izomorfizmu. Niech $\alpha : I \to J$ będzie izomorfizmem, gdzie I jest ideałem w C^*-algebrze A, a J ideałem w C^*-algebrze B. Mówimy wtedy, że α jest *częściowym izomorifzmem* z A do B. Z częściowym izomorfizmem wiążemy A-B-bimoduł Hilberta, gdzie $X_\alpha := J_B$ jest podmodułem trywialnego B-modułu Hilberta B_B, natomiast lewa struktura jest dana wzorami

$$a \cdot x = \alpha(a\alpha^{-1}(x)), \qquad {}_A\langle x|y\rangle := \alpha^{-1}(xy^*), \qquad a \in A, x, y \in J.$$

Bimoduł X_α jest bimodułem równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy częściowy izomorfizm α jest izomorfizmem, tzn. $I = A$ oraz $J = B$.

Przykład 3.41 (Moduły Hilberta)**.** Każdy prawy B-moduł Hilberta X można traktować jako $\mathcal{K}(X)$-B-bimoduł Hilberta z lewy $\mathcal{K}(X)$-iloczynem wewnętrznym danym wzorem

$${}_{\mathcal{K}(X)}\langle x|y\rangle = \Theta_{x,y} \qquad \text{dla } x, y \in X.$$

Stwierdzenie 3.37 mówi, że każdy A-B bimoduł powstaje z takiego $\mathcal{K}(X)$-B-bimodułu poprzez zakręcenie lewego działania izomorfizmem $\alpha : I \to \mathcal{K}(X)$, gdzie I jest ideałem w A. Izomorfizm taki przedłuża się jednoznacznie do homomorfizmu $\phi_X : A \to \mathcal{L}(X) = \mathcal{M}(\mathcal{K}(X))$. W szczególności, C^*-algebry A i B są równoważne w sensie Mority-Rieffela wtedy i tylko wtedy, gdy A jest izomorficzna z $\mathcal{K}(X)$ dla pewnego pełnego B-modułu Hilberta X.

Biorąc w powyższym przykładzie za X przestrzeń Hilberta H widzimy, że algebra operatorów zwartych $K(H)$ jest równoważna w sensie Mority-Rieffela z jednowymiarową C^*-algebrą $\mathbb{C}$. Jest to w pewnym sensie protopowy przykład takiej równoważności. W szczególności, obrazuje to następujące twierdzenie, którego dowód (a w zasadzie dwa różne dowody) można znaleźć w [18] oraz w [1].

Twierdzenie 3.42 (Brown, Green, Rieffel)**.** *Niech A i B bedą σ-jedynkowymi C^*-algebrami. Wtedy A i B są równoważne w sensie Mority-Rieffela wtedy i tylko wtedy, gdy A i B są stabilnie izomorficzne, tzn.*

$$A \otimes \mathbb{K} \cong B \otimes \mathbb{K}.$$

Teraz jesteśmy gotowi, aby wykazać zapowiedziane twierdzenie, że C^*-korespondencja odwracalne w kategorii $\mathfrak{Corr}$ są niczym innym jak bimodułami równoważności. W szczególności twierdzenie to implikuje, iż równoważność w sensie Mority-Rieffela jest w istocie relacją równoważności. Pisząc o iloczynie tensorowym bimodułów Hilberta będziemy mieli na myśli iloczyn tensorowy bimodułów traktowanych jako C^*-korespondencje.

Stwierdzenie 3.43. *Niech X będzie A-B-bimodułem Hilberta zaś $X^\star$ niech będzie sprzężonym B-A-bimodułem powstałym z X przez zamiane działań stronami, patrz Uwaga 2.2. Mamy naturalne izomorfizmy C^*-korespondencji*

$$X \otimes_B X^\star \cong {}_A\langle X|X\rangle, \qquad \textit{oraz} \qquad X^\star \otimes_A X \cong \langle X|X\rangle_B.$$

DOWÓD. Wystarczy wykazać jedynie pierwszy izomorfizm, gdyż sytuacja jest symetryczna. Zdefiniujmy odwzorowanie $\Phi : X \otimes_B^{alg} X^\star \to {}_A\langle X|X\rangle$ w następujący sposób

$$\Phi(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i^\star) := \sum_{i=1}^n {}_A\langle x_i|y_i\rangle.$$

Jest to poprawnie określona izometria, gdyż Φ zachowuje A-iloczyny wewnętrzne. Istotnie dla dowolnych $x, y, u, v \in X$ mamy

$$\begin{aligned}\langle \Phi(x \otimes y^\star)|\Phi(u \otimes v^\star)\rangle_A &= {}_A\langle x|y\rangle^* {}_A\langle u|v\rangle = {}_A\langle y|x\rangle_A\langle u|v\rangle = {}_A\langle y|{}_A\langle v|u\rangle x\rangle \\ &= {}_A\langle y^\star|v\langle u|x\rangle_B\rangle = {}_A\langle y^\star|\langle u|x\rangle_B v^\star\rangle_A \\ &= \langle x \otimes y^\star|u \otimes v^\star\rangle.\end{aligned}$$

Zatem Φ przedłuża się do operatora $\Phi : X \otimes_B X^\star \to {}_A\langle X|X\rangle$ unitarnego między dwoma A-modułami Hilberta. Ponadto, Φ zachowuje lewe A-mnożenie, gdyż dla dowolnych $x, y \in X$, i $a \in A$ mamy

$$\Phi(a(x \otimes y^\star)) = \Phi(ax \otimes y^\star) = {}_A\langle ax|y\rangle = a_A\langle x|y\rangle = a\Phi(x \otimes y^\star).$$

Zatem Φ jest izomorfizmem C^*-korespondencji. □

Twierdzenie 3.44. *C^*-korespondencja $A \xrightarrow{X} B$ jest odwracalna w sensie, że istnieje C^*-korespondencja $B \xrightarrow{Y} A$ taka, że*

$$X \otimes_B Y \cong A \quad \text{oraz} \quad Y \otimes_A X \cong B$$

wtedy i tylko wtedy, gdy X jest A-B-bimodułem równoważności i wtedy $Y \cong X^\star$.

DOWÓD. Jeśli $A \xrightarrow{X} B$ jest A-B-bimodułem równoważności to jest to C^*-korespondencja odwracalna na mocy Stwierdzenia 3.43. Załóżmy więc, że C^*-korespondencja $A \xrightarrow{X} B$ jest odwracalna. W świetle Wniosku 3.38 wystarczy pokazać, że X jako B-moduł Hilberta jest pełny oraz, że lewe działanie $\phi_X : A \to \mathcal{L}(X)$ jest w rzeczywistości izomorfizmem z A na $\mathcal{K}(X)$. Pełność X wynika natychmiast z izomorfizmu $Y \otimes_A X \cong B$ i faktu że moduł trywialny B jest pełny. Pokażemy, że homomorfizm ϕ_X jest injektywny i na kompakty. Zauważmy, że skoro $X \otimes_B Y \cong A$ oraz lewe mnożenie na A zadaje izomorfizm $A \cong \mathcal{K}(A)$, to lewe mnożenie na $X \otimes_B Y$ zadaje izomorfizm $\phi_{X\otimes_B Y} : A \to \mathcal{K}(X \otimes_B Y)$. Zauważmy również, że

$$\phi_{X\otimes_B Y}(a) = \phi_X(a) \otimes 1 \qquad \text{dla } a \in A.$$

W szczególności, ϕ_X jest injekcją. Analogicznie, przez symetrię, można pokazać, że ϕ_Y jest injekcją. Wtedy stosując Stwierdzenie 3.20 1) do iloczynu $X \otimes_B Y$ otrzymujemy, że $\phi_X(A) \subseteq \mathcal{K}(X)$, tzn. C^*-korespondencja $A \xrightarrow{X} B$ jest właściwa. Przez symetrię, również $B \xrightarrow{Y} A$ jest właściwa. Stąd, dla dowolnego $T \in \mathcal{K}(X)$, stosując Stwierdzenie 3.20 2) otrzymujemy, że $T \otimes 1 \in \mathcal{K}(X \otimes_B Y)$. Czyli istnieje element $a \in A$ taki, że $\phi_{X\otimes_B Y}(a) = \phi_X(a) \otimes 1 = T \otimes 1$. Na mocy Stwierdzenia 3.20 1) wiemy, że homomorfizm $\otimes 1$ jest injektywny wobec czego $\phi_X(a) = T$. Zatem $\phi_X(A) = \mathcal{K}(X)$ i $A \xrightarrow{X} B$ jest A-B-bimodułem równoważności. Co więcej korzystając ze Stwierdzeń 3.25, 3.27 oraz 3.43 mamy

$$Y \cong Y \otimes_A A \cong Y \otimes_A X \otimes_B X^\star \cong B \otimes_B X^\star \cong X^\star.$$

□

3.5 Systemy produktowe i wiązki Fella

W poprzednich podrozdziałach widzieliśmy, że C^*-korespondencje można traktować jako bardzo ogólne, ale wciąż naturalne morfizmy między C^*-algebrami. W szczególności działanie takich morfizmów na jednej ustalonej C^*-algebrze A można traktować jako bardzo ogólny układ dynamiczny. W tym podrodziale omówimy takie działania. Jak się okazuje półgrupowe działania C^*-korespondencji funkcjonują w literaturze pod nazwą systemu produktowego.

Natomiast działania grupowe C^*-korespondencji można utożsamić z wiązkami Fella, a więc obiektami badanymi już od lat 60-tych ubiegłego wieku.

Niech A będzie C^*-algebrą i niech P będzie półgrupą z jedynką e. Systemy produktowe w kontekście W^*-algebr badane były przez Arvesona, natomiast w ujęciu C^*-algebraicznym pojawiły się po raz pierwszy w pracy Fowlera [9]. Z punktu widzenia niniejszej pracy, systemy produktowe należy traktować jako półgrupowe działania C^*-korespondencji.

Definicja 3.45. *Działaniem półgrupy* P na C^*-algebrze A przez C^*-korespondencje, czy też *systemem produktowym* nad półgrupą P ze współczynnikami w algebrze A, nazywamy półgrupę $X = \bigsqcup_{p\in P} X_p$, gdzie

P1). X_p jest C^*-korespondencją nad A dla każdego $p \in P$.

P2). X_e jest trywialną C^*-korespondencją A.

P3). Mnożenie na X zadaje izomorfizm $X_p \otimes_A X_q \cong X_{pq}$, $x_p \otimes x_q \mapsto x_p x_q$, dla $p, q \in P \setminus \{e\}$ oraz pokrywa się z lewym i prawym mnożeniem elementów algebry $X_e = A$ na każdym X_p.

Dla każdego $p \in P$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ oznacza A-wartościowy iloczyn wewnętrzny na X_p, a ϕ_p homomorfizm z A w $\mathcal{L}(X_p)$, który zadaje lewe działanie A na X_p.

Przykład 3.46 (Działanie $\mathbb{N}$)**.** Niech X będzie C^*-korespondencją z A do A. Niech $X_0 = A$ będzie trywialną C^*-korespondencją. Dla $n = 1, 2, 3, ...$, połóżmy

$$X_n := \underbrace{X \otimes_A X \otimes_A ... \otimes_A X}_{n \text{ razy}}.$$

Wtedy $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n$ jest systemem produktowym nad $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, gdzie mnożenie jest zdefiniowane następująco

$$x_n \cdot x_m := x_n \otimes x_m, \qquad x_n \in X_n,\ x_m \in X_m,\ n,\ m = 1, 2, \dots .$$

Przykład 3.47 (Półgrupa endomorfizmów)**.** Niech $\alpha : P \to \mathrm{End}(A)$ będzie działaniem półgrupy P na C^*-algebrze przez endomorfizmy. To znaczy dla każdego $p \in P$, $\alpha_p : A \to A$ jest endomorfizmem C^*-algebry A, $\alpha_e = id$ oraz

$$\alpha_p \circ \alpha_q = \alpha_{pq} \qquad \text{dla } p, q \in P.$$

Z działaniem α zwiążemy system produktowy nad półgrupą P^{opp} przeciwną do P (P^{opp} jako zbiór pokrywa się z P natomiast działanie półgrupowe jest odwrócone). W tym celu, dla $p \in P$, niech $X_p := \alpha_p(A)A$ będzie niezdegenerowaną C^*-korespondencją związaną z endomorifzmem α_p:

$$\langle x, y \rangle_p := x^* y, \qquad a \cdot x \cdot b := \alpha_p(a) x b, \quad x, y \in X_p,\ a, b \in A.$$

Mnożenie na $X_\alpha = \bigsqcup_{p\in P^{opp}}^{\infty} X_p$ zdefiniujemy w następujący sposób

$$X_p \times X_q \ni (x, y) \longrightarrow \alpha_q(x) y \in X_{qp}. \tag{3.5.1}$$

Jak wykazaliśmy w Przykładzie 3.22, powyższe odwzorowanie indukuje izomorfizm $X_p \otimes X_q \cong X_{qp}$. Zatem X_α jest systemem produktowym.

Przejdźmy teraz do omówienia wiązek Fella na grupą dyskretną G. Następującą definicję można znaleźć w [8, 16.2] albo [7].

Definicja 3.48. Wiązką Fella nad (dyskretną) grupą G nazywamy zbiór

$$\mathcal{B} = \bigsqcup_{g \in G} B_g,$$

gdzie każde źdźbło B_g jest przestrzenią Banacha, wraz z określonymi na $\mathcal{B}$ dwoma działaniami

$$\cdot : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}, \qquad * : \mathcal{B} \to \mathcal{B},$$

spełniającymi następujące warunki, dla wszystkich $g, h \in G$, oraz $b, c \in \mathcal{B}$:

(a) $B_g B_h \subseteq B_{gh}$,

(b) mnożenie jest biliniowym odwzorowaniem z $B_g \times B_h \to B_{gh}$,

(c) mnożenie jest łączne na $\mathcal{B}$,

(d) $\|bc\| \leq \|b\| \|c\|$,

(e) $B_g \subseteq B_{g^{-1}}$,

(f) inwolucja jest odwzorowaniem antyliniowym z B_g do $B_{g^{-1}}$,

(g) $(bc)^* = c^* b^*$,

(h) $(b^*)^* = b$,

(i) $\|b^*\| = \|b\|$,

(j) $\|b^* b\| = \|b\|^2$,

(k) $b^* b \geq 0$ w B_e.

Co więcej, jeśli inkluzję w podpunkcie (a) zastąpimy równością $\overline{B_g B_h} = B_{gh}$, dla $g, h \in G$, to mówimy, że wiązka $\mathcal{B}$ jest *wysycona*.

Zauważamy, że jeżeli $\mathcal{B} = \bigsqcup_{g \in G} B_g$, jest wiązką Fella, to źdźbło $A := B_e$ odpowiadające elementowi neutralnemu jest C^*-algebrą, wraz z operacjami odziedziczonymi z $\mathcal{B}$. Ponadto, każde źdzbło B_g jest w naturalny sposób A-A-bimodułem Hilberta z operacjami

$$\langle x, y \rangle_A := x^* y, \qquad {}_A\langle x, y \rangle := x y^* \qquad a \cdot x \cdot b := axb, \quad x, y \in B_g, \ a, b \in A = B_e.$$

Prowadzi to do następującej charakteryzacji wiązek Fella, jako częściowych działań grupowy na C^*-algebrach przez C^*-korespondencje.

Twierdzenie 3.49. *Niech A będzie C^*-algebrą i niech $\mathcal{B} = \bigsqcup_{g \in G} B_g$ będzie zbiorem, gdzie $A = B_e$. Jeśli $\mathcal{B}$ jest wiązką Fella, to*

1) każde ździebło B_g, $g \in G$, jest A-A-bimodułem;

2) $\mathcal{B}$ jest półgrupą, gdzie działanie półgrupowe indukuje

a) $B_g \otimes_A B_h \hookrightarrow B_{gh}$, tzn. $B_g \otimes_A B_h \ni b_g \otimes b_h \mapsto b_g \cdot b_h \in B_{gh}$ przedłuża się do izometrii zachowującej A-iloczyny wewnętrzne.

b) $B_g \otimes_A B_{q^{-1}} \otimes_A B_g \cong B_g$, tzn. $B_g \otimes_A B_{q^{-1}} \otimes_A B_g \ni b_g \otimes b_{g^{-1}} \otimes b_g \mapsto b_g \cdot b_{g^{-1}} b'_g \in B_g$ przedłuża się do izomorfizmu C^*-korespondencji.

Na odwrót, jeśli na $\mathcal{B}$ jest określona struktura spełniająca 1) i 2) powyżej, to na $\mathcal{B}$ istnieje i jest wyznaczona jednoznacznie inwolucja, wraz z którą $\mathcal{B}$ jest wiązką Fella.

DOWÓD. Niech $\mathcal{B} = \bigsqcup_{g\in G} B_g$ będzie wiązką Fella. Jak już zauważyliśmy, każde ździebło B_g, $g \in G$, jest A-A-bimodułem z operacjami odziedziczonymi z $\mathcal{B}$. Sprawdzenie, że $B_g \otimes_A B_h \ni b_g \otimes b_h \mapsto b_g \cdot b_h \in B_{gh}$ przedłuża się do odwzorowania zachowującego A-iloczyny wewnętrzne nie nastręcza trudności, por. Przykład 3.24. Aby wykazać podpunkt 2b) zauważmy, że B_g jest $\overline{B_g B_{g^{-1}}}$-$\overline{B_{g^{-1}} B_g}$-bimodułem równoważności oraz inwoulcja na $\mathcal{B}$ zadaje izomorfizm $B_{g^{-1}} \cong B_g^{\star}$. Zatem

$$B_g \otimes_A B_{g^{-1}} \otimes_A B_g \cong B_g \cong \overline{B_g B_{g^{-1}}} \otimes_A B_g = \overline{B_g B_{g^{-1}}} \otimes_{\overline{B_g B_{g^{-1}}}} B_g \cong B_g.$$

Na odwrót załóżmy, że $\mathcal{B}$ spełnia 1) i 2). Z warunku 2b), na mocy [3, Proposition 3.9], dla każdego $g \in G$ istnieje dokładnie jeden izomorfizm C^*-korespondencji $J_g : B_g^{\star} \to B_{g^{-1}}$ taki, że złożenie izomorfizmów

$$B_g \cong B_g \otimes_A B_g^{\star} \otimes_A B_g \xrightarrow{1\otimes J_g \otimes 1} B_g \otimes_A B_{g^{-1}} \otimes_A B_g$$

jest identycznością. Definiując $B_g \ni b_g \longmapsto J_g(b_g^{\star}) \in B_{g^{-1}}$ otrzymujemy, żądaną inwolucję. □

Korzystając z powyższego twierdzenia otrzymujemy, że działanie grupy G na C^*-algebrze, jest równoważne wysyconej wiązce Fella.

Twierdzenie 3.50. *Systemy produktowe nad grupą G są równoważne wysyconym wiązkom Fella nad G.*

DOWÓD. Jeśli $\mathcal{B} = \bigsqcup_{g\in G} B_g$ jest wysyconą wiązką Fella oraz $A = B_e$, to działanie półgrupowe na $\mathcal{B}$ indukuje izomorfizm $B_g \otimes_A B_h \cong B_{gh}$. Zatem $\mathcal{B}$ jest systemem produktowym. Na odwrót, niech $X = \bigsqcup_{g\in G} X_g$ będzie systemem produktowym. Dla każdego $g \in G$ mamy $X_g \otimes X_{g^{-1}} \cong X_e = A$ oraz $X_{g^{-1}} \otimes X_g \cong X_e = A$. Zatem na mocy Twierdzenia 3.44, X_g jest bimodułem równoważności nad A. Czyli zachodzi warunek 1) w Twierdzeniu 3.49. Warunek 2) jest oczywisty. W szczególności $X = \bigsqcup_{g\in G} X_g$ jest wiązką Fella. Ponadto $\overline{X_g X_h} = X_{gh}$, dla $g, h \in G$, z definicji systemu produktowego, czyli wiązka ta jest wysycona. □

Bibliografia

[1] L. G. Brown, P. Green, M. A. Rieffel *Stable isomorphism and strong Morita equivalence of C^*-algebras*, Pacific J. Math 71 (1977), 349-363.

[2] L. G. Brown, J. A. Mingo, N.-T. Shen, *Quasi-multipliers and embeddings of Hilbert C^*-bimodules*, Canad. J. Math. **46**(1994), 1150-1174.

[3] A. Buss, R. Meyer, *Inverse semigroup actions on groupoids*, Rocky Mountain J. Math. 47 (2017), no. 1, 53-159.

[4] A. Buss, R. Meyer, C. Zhu *A higher category approach to twisted actions on C^*-algebras*, Proc. Edinb. Math. Soc. 56 (2013), 387-426.

[5] J. Cuntz, *Simple C^*-algebras generated by isometries*, Commun. Math. Phys. **57** (1977), 173–185.

[6] S. Doplicher, C. Pinzari, R. Zuccante, *The C^*-algebra of a Hilbert bimodule.* Boll Unione Mat. Ital. Sez. B Artc. Ric. Mat. **1** (1998), 263-281.

[7] R. Exel, Partial dynamical systems, Fell bundles and applications, book available at: mtm.ufsc.br/ exel/papers/pdynsysfellbun.pdf

[8] J. M. G. Fell, R. S. Doran, Representations of $*$-algebras, locally compact groups, and Banach $*$-algebraic bundles, Vol. I & II, Academic Press, New York, 1988.

[9] N. J. Fowler, *Discrete product systems of Hilbert bimodules*, Pacific J. Math. **204** (2002), 335–375.

[10] N. J. Fowler and I. Raeburn, *The Toeplitz algebra of a Hilbert bimodule*, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), 155–181.

[11] K. K. Jensen, K. Thomsen, Elements of KK-theory, Birkhauser, 1991.

[12] S. Kaliszewski, N. Patani, J. Quigg,, *Characterizing graph C^*-correspondences*, Houston J. Math. **38** (2012), 751-759.

[13] G. G. Kasparov *The operator K-functor and extensions of C^*-algebras* Math. USSR Izv., 16 (1981), 513-572.

[14] T. Katsura, *A construction of C^*-algebras from C^*-correspondences*, Contemp. Math. Amer. Math. Soc. **217** (2003), 173-182.

[15] T. Katsura, *On C^*-algebras associated with C^*-correspondences*, J. Funct. Anal. **217** (2004), 366-401.

[16] T. Katsura, *A class of C^*-algebras generalizing both graph algebras and homeomorphism C^*-algebras. I. Fundamental results*, Trans. Amer. Math. Soc. **35**6 (2004), no. 11, 4287-4322.

[17] J. Kisyński, *On Cohen's proof of the factorization theorem.* Ann. Polon. Math. 75 (2000), no. 2, 177–192.

[18] E. C. Lance : Hilbert C^*-Modules: A Toolkit for Operator Algebraists. Cambridge University Press, Cambridge (1995)

[19] G. J. Murphy, C^*-algebras and Operator theory, Academic Press, London 1990.

[20] G. J. Murphy *Positive definite kernels and Hilbert C^*-modules* Proc. Edinburgh Math. Soc., 40 (1997), 367-374.

[21] W. L. Paschke, *Inner product modules over B^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 182 (1973), 443-468.

[22] G. K. Pedersen, *C*-algebras and their automorphism groups*, London Math. Soc. Monographs, Boston, (1979)

[23] M. V. Pimsner, *A class of C^*-algebras generalizing both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by* $\mathbf{Z}$, in Free probability theory (Waterloo, ON, 1995), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 189-212.

[24] I. Raeburn and D. P. Williams, *Morita equivalence and continuous-trace C^*-algebras*, Math. Surveys and Monographs, vol. 60, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[25] M. A. Rieffel, *Induced representations of C^*-algebras*, Adv. in Math. 13 (1973), 176-257.

[26] M. A. Rieffel, *Morita equivalence for C^*-algebras and W^*-algebras*, J. Pure Appl. Algebra 5 (1974), 51-96.

[27] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1987.

[28] J. Schweizer, *Crossed products by C^*-correspondences and Cuntz-Pimsner algebras*, C^*-Algebras: Proceedings of the SFB-Workshop on C^*-Algebras, Münster, 1999 (Springer-Verlag, Berlin, 2000), pages 203–226.

[29] A. Takahashi, *A duality between Hilbert modules and fields of Hilbert spaces*. Rev. Colombiana Mat., 13 (1979), 93–120.

[30] M. Takesaki, Theory of operator algebras I, Springer-Verlag Berlin 2002.