



Matematyka Spadania

Maciej Wodzyński | IV Liceum Ogólnokształcące w Łodzi | IIDP

email: maciekfsx@gmail.com

Skąd pomysł?

Temat ten przyszedł mi do głowy, gdy któregoś dnia natrafiłem na transmisję na żywo z deorbitacji i wodowania kapsuły Dragon firmy SpaceX. Zacząłem się zastanawiać, jak to możliwe, że przy użyciu tylko atmosfery i spadochronów (w późniejszej fazie) ta kilkutonowa kapsuła spowolniona jest z kilkudziesięciu tysięcy kilometrów na godzinę do kilku, tuż przed kontaktem z wodą. Szczególnie fascynowała mnie matematyka stojąca za projektowaniem spadochronów tak, aby były jak najbardziej wydajne pod względem deceleracji, jak i masy.




Problem badawczy

Patrząc na świat urządzeń umożliwiających swobodne i bezpieczne spadanie z dużych wysokości, natkniemy się na różne rozmiary, kształty, oraz typy mocowań. Tyle zmiennych doprowadziło mnie do pytania:

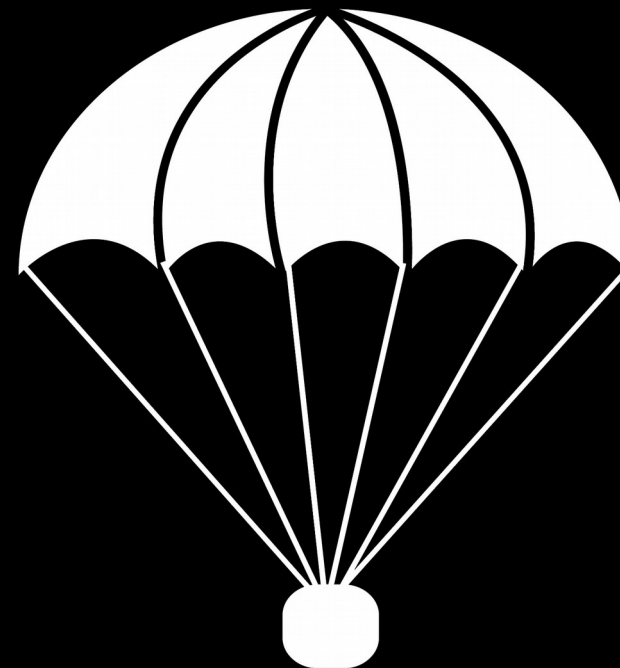
Jaki wpływ na prędkość spadania ma kształt spadochronu, mającego tą samą powierzchnię?





Projektując i wybierając spadochron
w profesjonalnych warunkach
bierze się pod uwagę kilka zmiennych:

- Gęstość powietrza
- Kształt czaszy (zależna od zastosowania)
- Powierzchnia spadochronu
- Masa ładunku/człowieka



Hipoteza

W swoim eksperymencie chcę porównać trzy kształty czaszy domowego spadochronu stworzonego z materiału podobnego do prześcieradła i testuję je z wysokości 5m z zaczepionym obciążeniem. Przypuszczam, iż *Kształt spadochronu nie będzie wpływał na czas spadania obiektu, tak długo, jak jego powierzchnia będzie taka sama.*

United States Patent [19]

[11] 4,337,913

Booth

[45] Jul. 6, 1982

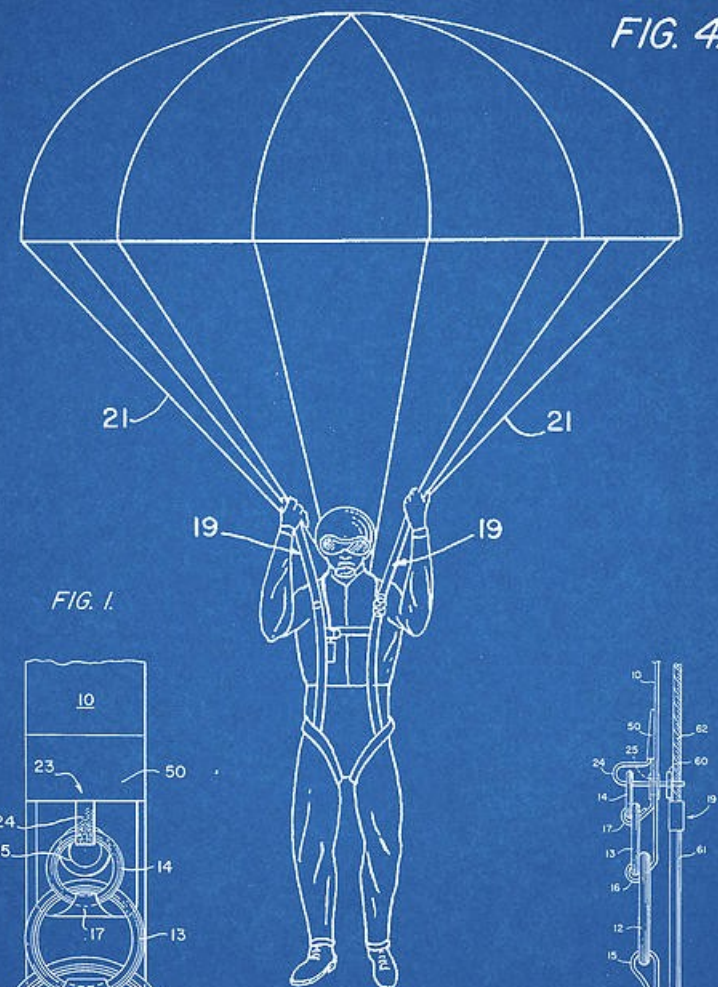
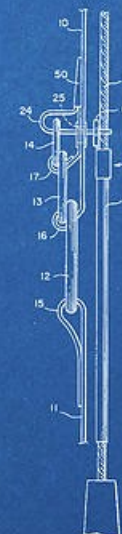
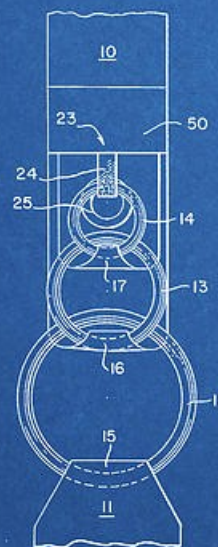


FIG. 1.



fineartamerica.com



Przewidywane
wyniki



Czas spadania ciała w spadku swobodnym z 5m

Wzór

$$s = \frac{at^2}{2}$$

$$t^2 = \frac{2s}{a}$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

a – przyspieszenie

s – droga

t – czas

Dane

$$a = 9.81 \frac{m}{s^2} \text{ (przyspieszenie ziemskie)}$$

$$s = 5m \text{ (wysokość z której zrzucony będzie obiekt)}$$

$$t = ?$$

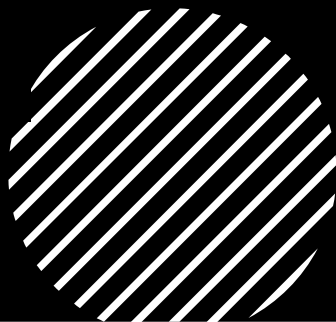
Obliczenia

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 * 5m}{9.81 \frac{m}{s^2}}}$$

$$t = \sqrt{1.02} s$$

$$t = \underline{1.00s}$$





Opór powietrza

Wzór

$$D = Cd * \frac{d * v^2}{2} * P$$

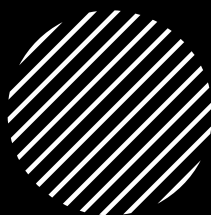
D – opór powietrza

Cd – współczynnik oporu powietrza

d – gęstość powietrza

v – prędkość

P – powierzchnia



Dane

$$D = ?$$

$$Cd \approx 0.56^*$$

$$d = 1.229 \frac{kg}{m^3}$$

$$v = ?$$

$$P = 0.36m^2 \text{ (ten sam w każdym z trzech spadochronów)}$$

*Współczynnik oporu powietrza obliczyłem na początku mierząc prędkość spadochronu w trakcie swobodnego spadania z ustalonej wcześniej wysokości. Nie jest to jednak pewna liczba, lecz przybliżenie

Ograniczenia



Niestety, nie jesteśmy w stanie obliczyć oporu powietrza spadochronu, gdyż nie da się stwierdzić w którym momencie się otworzy bez sprawdzenia tego (na tym poziomie kontroli), co sprawia, że nie wiemy z jaką prędkością szybuje w dół. Wiemy jednak, że po jego rozłożeniu siła wypadkowa spadającego ciała staje się równa zero, co oznacza że zaczyna spadać ze stałą prędkością. Oznacza to, że spadochron działa z siłą 3.1N , ponieważ masa ciała umieszczonego pod nim ma taki ciężar (0.31kg).

Co więcej, możemy również zauważyć, że we wzorze na opór powietrza nie ma żadnej zmiennej reprezentującej kształt czaszy, co wstępnie i teoretycznie potwierdza moją hipotezę.

Co możemy obliczyć?

Wiedząc, że ciało po otwarciu spadochronu przestanie przyspieszać (oznacza to, że $D = 3.1N$), możemy obliczyć prędkość z jaką finalnie będzie spadać poprzez przekształcenie wzoru na opór powietrza. Tą prędkość możemy potem wykorzystać do oszacowania prędkości spadania tego ciała z tym spadochronem i finalnie porównać do faktycznych wyników.

Prędkość graniczna (osiągnięta po otwarciu spadochronu)

Wzór

$$D = Cd * \frac{d * v^2}{2} * P$$

$$\frac{D}{Cd * P} = \frac{d * v^2}{2}$$

$$\frac{2D}{Cd * P * d} = v^2$$

$$\sqrt{\frac{2D}{Cd * P * d}} = v$$

Obliczenia

$$\sqrt{\frac{2 * 3.1N}{0.56 * 0.36m^2 * 1.229 \frac{kg}{m^3}}} = v$$

$$\sqrt{\frac{2 * 3.1N}{0.56 * 0.36m^2 * 1.229 \frac{kg}{m^3}}} = \underline{5.00 \frac{m}{s}}$$



Obliczenia odcinka przed otwarciem spadochronu

Na początku obliczyłem czas, który był potrzebny, aby ciało z przyspieszeniem ziemskim osiągnęło 5m/s. Następnie używając tego czasu i korzystając z poprzedniego wzoru znalazłem dystans, który został w tym okresie pokonany.

$$t = \frac{v}{a}$$

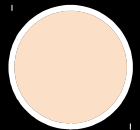
$$t = \frac{5 \frac{m}{s}}{9.81 \frac{m}{s^2}}$$

$$t = 0.51s$$

$$s = \frac{a * t^2}{2}$$

$$s = \frac{9.81 \frac{m}{s^2} * 0.51s}{2}$$

$$s = 1.28m$$



$$5m - 1.28m = 3.72m$$

$$t = \frac{s}{v}$$

$$t = \frac{3.72m}{5 \frac{m}{s}}$$

$$t = 0.74s$$

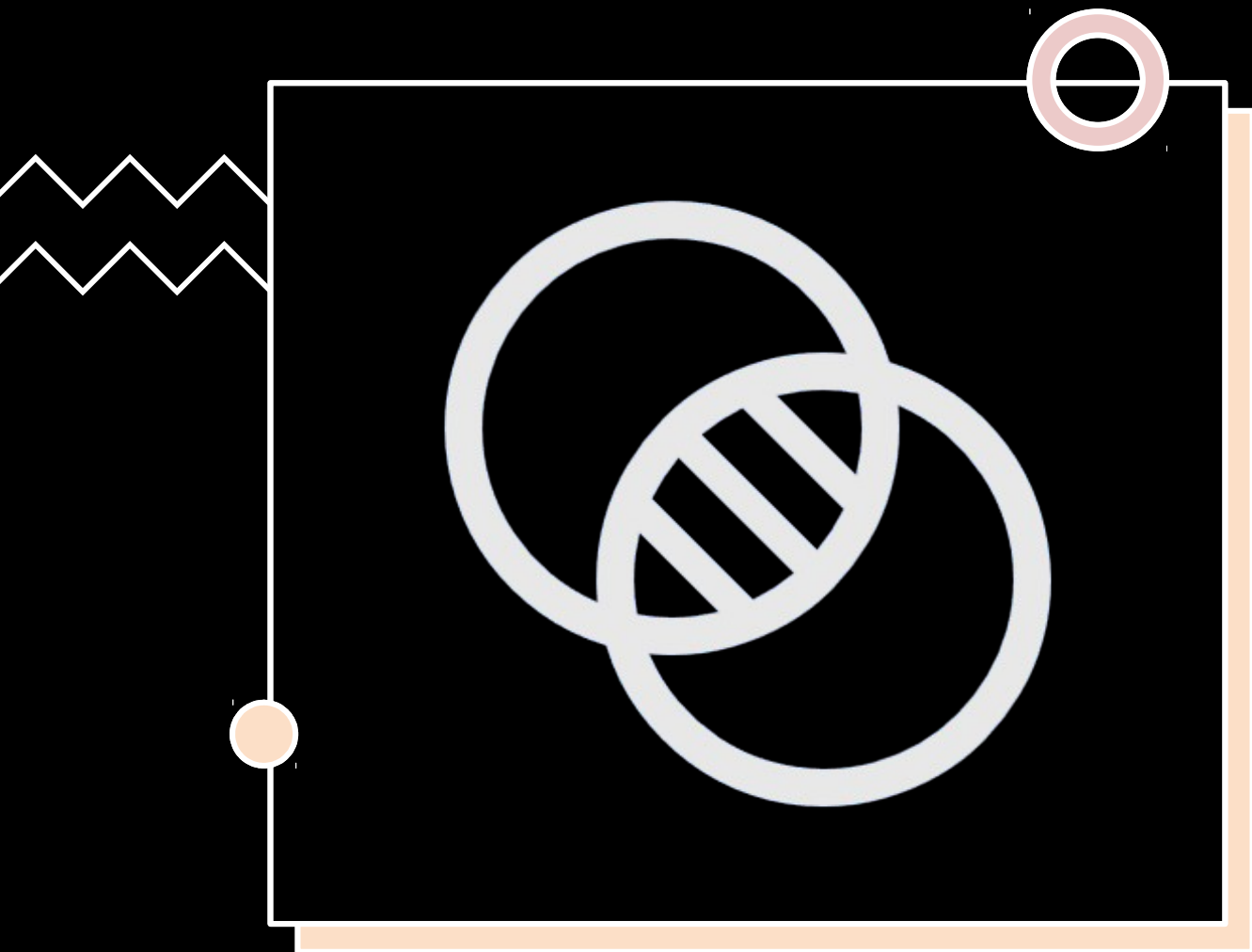
Odjąłem ten dystans od całej wysokości 5m i uzyskałem jej resztę. Potem użyłem jej, aby obliczyć ile zajęła reszta podróży ciała



Czas spadania

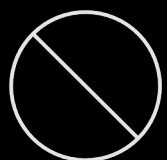
$$t_{spadania} = 0.51s + 0.74s$$

$$\underline{t_{spadania} = 1.25s}$$

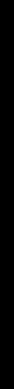
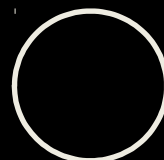
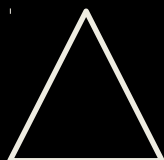


Porównanie z
rzeczywistością





P.c. = 1s



Przewidywany czas = 1.25s

Wniosek i refleksja

Po zebraniu i porównaniu danych mogę potwierdzić, że teoretycznie kształt czaszy spadochronu nie wpływa na czas spadania obiektu. Widać, że obliczenia były poprawne na przykładzie bez spadochronu. Jednak, co jasno widać przy porównaniu, istnieje różnica pomiędzy przewidzianym czasem, a tym rzeczywistym. Nie jest to bezpośrednia zasługa spadochronu. Różnica ta wynika z różnych czasów otwarcia się go. Spadochron trójkątny otwierał się najdłużej, co spowodowało, że spadł najszybciej, natomiast spadochron kwadratowy otworzył się niemal od razu i spadał nawet dłużej, niż przewidziane. Podsumowując, oznacza to, że w świecie małych, amatorskich spadochronów, te w kształcie kwadratu spełniają się najlepiej i są najbezpieczniejsze. Mają również najwyższą możliwość szybowania, co również spowalnia przyziemienie.

Po konkluzji eksperymentu, zauważyłem kilka rzeczy, które mógłbym poprawić przy następnej okazji, aby uzyskać jeszcze dokładniejsze rezultaty. Uwzględnienie wiatru jak i niewielkiej masy spadochronu mogło by poprawić precyzję obliczeń, a rozpoznanie siły Coriolisa mogłoby je wzbogacić.