Wykład 4

Działania na macierzach. Określenie wyznacznika

1 Określenie macierzy

Niech K będzie dowolnym ciałem oraz niech n i m będą dowolnymi liczbami naturalnymi. Prostokątną tablicę

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

utworzoną z elementów a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) ciała K nazywamy $m \times n$-**macierzą** nad ciałem K. Elementy a_{ij} nazywamy **wyrazami** macierzy. Rzędy pionowe nazywamy **kolumnami**, a poziome- **wierszami** tej macierzy. Kolumny numerujemy od lewej strony do prawej, zaś wiersze - od góry do dołu. Zatem element a_{ij} stoi w i-tym wierszu i j-tej kolumnie rozpatrywanej macierzy.

Przykład 4.1. Jeżeli $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, to $a_{11} = 5$, $a_{12} = 4$, $a_{13} = 7$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 3$, $a_{23} = 4$. $\square$

We wszystkich oznaczeniach dotyczących macierzy takich jak np.

$$a_{ij},\ A_{ij},\ m \times n,\ M_{m\times n}(\mathbb{R}),$$

przyjmujemy umowę, że pierwszy indeks z lewej strony dotyczy wiersza, zaś drugi-kolumny.
$n \times n$-macierze, nazywamy **macierzami kwadratowymi stopnia** n.
Dwie macierze nazywamy równymi, jeżeli jako tablice są identyczne.
Oznaczenia macierzy: A, B, C, itd.
Dla macierzy (1) piszemy też:

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}. \tag{2}$$

Zbiór wszystkich $m \times n$ - macierzy nad ciałem K oznaczamy przez $M_{m\times n}(K)$.

Macierzą transponowaną A^T $m \times n$-macierzy A postaci (1) nazywamy taką $n \times m$-macierz, która jako swą i-tą kolumnę, dla $i = 1, 2, \dots, m$, ma i-ty wiersz macierzy A. Zatem

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

$$\underbrace{A}_{m\times n} \mapsto \underbrace{A^T}_{n\times m}$$

Dla dowolnej macierzy A zachodzi wzór:

$$(A^T)^T = A.$$

Przykład 4.2. Macierzą transponowaną macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ jest macierz $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, a macierzą transponowaną macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ jest macierz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.□

2 Działania na macierzach

a) Mnożenie macierzy przez skalar. Elementy ciała K nazywamy *skalarami.* Aby pomnożyć macierz A (nad ciałem K) przez skalar a należy wszystkie jej wyrazy pomnożyć przez a. Zatem

$$a \cdot [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = [a \cdot a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}. \tag{4}$$

Przykład 4.3. $2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$. □

b) Dodawanie macierzy. Macierze A i B nad ciałem K o tych samych wymiarach możemy dodawać. Mianowicie, jeżeli $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ oraz $B = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, to

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}. \tag{5}$$

Przykład 4.4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$.□

Dodawanie macierzy jest przemienne, łączne i posiada element neutralny tzw. **macierz zerową** $0_{m\times n}$, która jest $m \times n$-macierzą o samych zerach, tzn. dla dowolnych $m \times n$-macierzy A, B, C zachodzą wzory:

$$A + B = B + A,$$

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

$$A + 0_{m\times n} = 0_{m\times n} + A = A.$$

Macierzą przeciwną do macierzy

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

nazywamy macierz

$$-A = [-a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}.$$

Zachodzą dla niej wzory:

$$A + (-A) = (-A) + A = 0_{m\times n},$$

$$-A = (-1) \cdot A.$$

Można wykazać, że dla dowolnych $m \times n$-macierzy A, B i dla dowolnych $a, b \in K$ zachodzą wzory:

$$(A + B)^T = A^T + B^T,$$

$$a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B,$$

$$(a \cdot A)^T = a \cdot A^T,$$

$$(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A,$$

$$(ab) \cdot A = a \cdot (b \cdot A).$$

c) Odejmowanie macierzy. Różnicą $m \times n$-macierzy A i B nazywamy macierz

$$A - B = A + (-B).$$

Jeżeli zatem $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$ oraz $B = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$, to

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}.$$

Przykład 4.5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.\square$

c) Mnożenie macierzy. Jeżeli A jest $m \times n$-macierzą nad ciałem K oraz B jest $n \times k$-macierzą nad ciałem K (tzn. **liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B**), to możemy określić iloczyn $A \cdot B$, który jest $m \times k$-macierzą, przy czym wyraz x_{ij} macierzy $A \cdot B$ jest **iloczynem (skalarnym) i-tego wiersza macierzy A:** $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} \ldots & a_{in} \end{bmatrix}$ **przez j-tą kolumnę macierzy B:** $\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$, czyli

$$x_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}. \tag{6}$$

Zatem aby pomnożyć macierz $A \in M_{m\times n}(K)$ przez macierz $B \in M_{n\times k}(K)$ należy pierwszy wiersz macierzy A pomnożyć (skalarnie) przez pierwszą kolumnę macierzy B, następnie należy pomnożyć pierwszy wiersz macierzy A przez drugą kolumnę macierzy B, itd. W ten sposób uzyskamy kolejne wyrazy pierwszego wiersza macierzy $A \cdot B$. Aby otrzymać drugi wiersz macierzy $A \cdot B$ należy pomnożyć drugi wiersz macierzy A przez kolejne kolumny macierzy B. W końcu należy pomnożyć ostatni wiersz macierzy A kolejno przez wszystkie kolumny macierzy B.

$$(\underbrace{A}_{m\times n}, \underbrace{B}_{n\times k}) \mapsto \underbrace{A \cdot B}_{m\times k}$$

Przykład 4.6. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Wówczas $B \cdot A$ nie ma sensu (gdyż liczba kolumn macierzy B nie jest równa liczbie wierszy macierzy A) oraz $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 9 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, bo $\begin{matrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 2 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 9 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 4 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 9 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 3 \end{matrix}$.
Wynika stąd, że mnożenie macierzy nie jest na ogół przemienne.□

Mnożenie macierzy jest łączne i rozdzielne względem dodawania macierzy. Iloczyn macierzy kwadratowych stopnia n jest też macierzą kwadratową stopnia n.

Jeżeli $A \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{n\times k}(K)$, $C \in M_{k\times p}(K)$, to $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Jeżeli $A \in M_{m\times n}(K)$ oraz $B, C \in M_{n\times k}(K)$, to $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Jeżeli $A, B \in M_{m\times n}(K)$ i $C \in M_{n\times k}(K)$, to $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

Odnotujmy jeszcze inne własności działań na macierzach:

Jeżeli $A \in M_{m\times n}(K)$ i $B \in M_{n\times k}(K)$, to

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

Jeżeli $A \in M_{m\times n}(K)$ i $B \in M_{n\times k}(K)$, to dla dowolnego $a \in K$:

$$a \cdot (A \cdot B) = (a \cdot A) \cdot B = A \cdot (a \cdot B).$$

Przykład 4.7. Korzystając z podanych własności działań na macierzach obliczymy

$$D = [B \cdot A^T + (A \cdot C)^T]^T,$$

dla $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Otóż, $D = (B \cdot A^T)^T + [(A \cdot C)^T]^T =$
$= (A^T)^T \cdot B^T + (A \cdot C) = A \cdot B^T + A \cdot C = A \cdot (B^T + C)$, czyli

$$D = A \cdot (B^T + C).$$

Ponadto $B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, więc $B^T + C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$, czyli $D = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$. □

3 Określenie wyznacznika

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia $n > 1$ nad ciałem K i niech i, j będą liczbami naturalnymi $\leq n$. Symbolem A_{ij} oznaczać będziemy macierz kwadratową stopnia $n-1$ powstałą z macierzy A przez skreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny macierzy A.

Przykład 4.8. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$. Wówczas $A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ oraz $A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$. □

Wyznacznikiem nazywamy taką funkcję przyporządkowującą każdej macierzy kwadratowej A nad ciałem K pewien element tego ciała (oznaczony przez $\det(A)$), która spełnia następujące warunki:
(i) jeśli $A = [a]$, to $\det(A) = a$,
(ii) jeśli

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

gdzie $n > 1$, to

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} \cdot a_{in} \cdot \det(A_{in}). \tag{8}$$

Wyznacznikiem macierzy A nazywa się wartość $\det(A)$ tej funkcji dla macierzy A.

Funkcja-wyznacznik jest jednoznacznie wyznaczona przez warunki (i) i (ii).

Wyznacznik macierzy A postaci (7) oznaczamy też następująco:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Powyższa definicja daje również efektywną metodę obliczania wyznacznika dowolnej macierzy kwadratowej A.

Przykład 4.9. Z własności (ii) i (i) otrzymujemy wzór:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \tag{10}$$

Rzeczywiście, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot b \cdot \det[c] + (-1)^{2+2} \cdot d \cdot \det[a] = ad - bc$. □

Przykład 4.10. Z własności (ii) i przykładu 4.9: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$

$= (-1)^{1+3} \cdot a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot c_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$
$= a_3(b_1c_2 - b_2c_1) - b_3(a_1c_2 - a_2c_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) = a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 + a_1b_2c_3 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$. Aby zatem obliczyć wyznacznik macierzy stopnia 3 wystarczy dopisać do niej z prawej strony dwie pierwsze kolumny i następnie wymnożyć prawoskośnie wyrazy ze znakiem + oraz lewoskośnie ze znakiem - i dodać otrzymane wyniki. Taka metoda obliczania wyznacznika stopnia 3 nazywa się **regułą Sarrusa**. Istotnie:

$$\left|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3.$$

Przykład 4.11. Stosując regułę Sarrusa obliczymy wyznaczniki:

$$\left|\begin{matrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{matrix} = -27 - 8 - 8 - (-3 - 24 - 24) = -43 + 51 = 8,$$

$$\left|\begin{matrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{matrix} = 18 + 24 + 16 - (9 + 16 + 48) = 58 - 73 = -15,$$

$$\left|\begin{matrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & -3 \\ 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{matrix} = -12 - 18 - 4 - (-6 - 4 - 36) = -34 + 46 = 12,$$

$$\left|\begin{matrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & -3 \\ 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{matrix} = -16 - 27 - 16 - (-24 - 6 - 48) = -59 + 78 = 19.\square$$

4 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 4.12. Znajdź iloczyny $A \cdot B$ i $B \cdot A$, jeśli

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Odp. a) $A \cdot B = [-1]$, $B \cdot A = \begin{bmatrix} 8 & -12 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. b) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B \cdot A = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$.

Zadanie 4.13. Oblicz iloczyn $A \cdot B \cdot C$, jeśli

$$A = \begin{bmatrix} 991 & 992 & 993 \\ 994 & 995 & 996 \\ 997 & 998 & 999 \\ 1000 & 1001 & 1002 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 24 & -12 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odp. $A \cdot B \cdot C = 0_{4\times 2}$.

Zadanie 4.14. Oblicz iloczyn $A \cdot B \cdot C \cdot D$, jeśli $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 213 & 510 & 128 \end{bmatrix}$,

$$C = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odp. $A \cdot B \cdot C \cdot D = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 5 & -10 & 5 \\ 7 & -14 & 7 \end{bmatrix}$.

Zadanie 4.15. Wykonaj podane działania macierzowe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -3 \\ -7 & -6 \end{bmatrix}.$$

Odp. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 4.16. Rozwiąż równania macierzowe:

a) $X^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$, b) $X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}$.

Odp. a) $X = \begin{bmatrix} 16 \\ -5 \end{bmatrix}$. b) $X = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 4a & 2-3a \\ 4c & 9-3c \end{bmatrix}$, gdzie $a, c \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4.17. Oblicz podane iloczyny:

a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Odp. a) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 10 & 17 & 19 & 23 \\ 17 & 23 & 27 & 35 \\ 16 & 12 & 9 & 20 \\ 7 & 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$.

Zadanie 4.18. Oblicz podane wyznaczniki stopnia 2:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$, e) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} 4+2i & 2-3i \\ 3-i & 4+2i \end{vmatrix}$,

g) $\begin{vmatrix} 5+4i & 2-3i \\ 2+6i & 4+2i \end{vmatrix}$.

Odp. a) 1. b) -2. c) -1. d) 0. e) 1. f) $9+27i$. g) $-10+20i$.

Zadanie 4.19. Oblicz podane wyznaczniki stopnia 3 przy pomocy reguły Sarrusa:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$,

e) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$.

Odp. a) 40. b) -3. c) 100. d) -5. e) 0. f) -2.