Wykład 5
Własności wyznaczników. Macierz odwrotna

1 Operacje elementarne na macierzach

Bardzo ważne znaczenie w algebrze liniowej odgrywają tzw. **operacje elementarne** na wierszach lub kolumnach macierzy. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie $m \times n$-macierzą nad ciałem K.

Operacje elementarne na wierszach macierzy A:

(i) Pomnożenie i-tego wiersza macierzy A przez niezerowy skalar a. Przy tej operacji nie zmieniamy wierszy o numerach różnych od i, zaś każdy wyraz i-tego wiersza mnożymy przez a. Operację tę oznaczamy symbolem $a \cdot w_i$.

(ii) Zamiana miejscami i-tego wiersza macierzy A z wierszem j-tym $(i \neq j)$ macierzy A. Przy tej operacji nie zmieniamy wierszy o numerach różnych od i oraz j. Operację tę oznaczamy symbolem $w_i \leftrightarrow w_j$.

(iii) Dodanie do j-tego wiersza macierzy A i-tego $(i \neq j)$ wiersza tej macierzy pomnożonego przez dowolny skalar a. Przy tej operacji nie zmieniamy wierszy o numerach różnych od j, natomiast wiersz j-ty przybiera postać następującą:

$$a_{j1} + a \cdot a_{i1},\ \ a_{j2} + a \cdot a_{i2},\ \dots\ , a_{jn} + a \cdot a_{in}.$$

Operację tę oznaczamy symbolem $w_j + a \cdot w_i$.

Operacje elementarne na kolumnach macierzy A:

(i) Pomnożenie i-tej kolumny macierzy A przez niezerową liczbę a. Przy tej operacji nie zmieniamy kolumn o numerach różnych od i, zaś każdy wyraz i-tej kolumny mnożymy przez a. Operację tę oznaczamy symbolem $a \cdot k_i$.

(ii) Zamiana miejscami i-tej kolumny macierzy A z kolumną j-tą $(i \neq j)$ macierzy A. Przy tej operacji nie zmieniamy kolumn o numerach różnych od i oraz j. Operację tę oznaczamy symbolem $k_i \leftrightarrow k_j$.

(iii) Dodanie do j-tej kolumny macierzy A i-tej $(i \neq j)$ kolumny tej macierzy pomnożonej przez dowolną liczbę a. Przy tej operacji nie zmieniamy kolumn o numerach różnych od j. Operację tę oznaczamy symbolem $k_j + a \cdot k_i$.

2 Własności wyznaczników

Twierdzenie 5.1. Jeżeli macierz B powstaje z macierzy kwadratowej A przez zamianę miejscami dwóch wierszy (kolumn), to $\det(B) = -\det(A)$.

Twierdzenie 5.2. Jeżeli macierz B powstaje z macierzy kwadratowej A przez pomnożenie pewnego wiersza (kolumny) przez dowolny skalar a, to $\det(B) = a \cdot \det(A)$.

Twierdzenie 5.3. Jeżeli macierz B powstaje z macierzy kwadratowej A przez dodanie do pewnego wiersza (kolumny) innego wiersza (innej kolumny) pomnożonego (pomnożonej) przez dowolny skalar, to $\det(B) = \det(A)$.

Stosując operacje elementarne na wierszach i kolumnach macierzy kwadratowej A nad ciałem K możemy ją sprowadzić do postaci:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

gdzie c_{ij} dla wszystkich $i \leq j$ są dowolnymi elementami ciała K.

Twierdzenie 5.4. Wyznacznik macierzy C postaci (1) jest równy iloczynowi wszystkich jej elementów na głównej przekątnej, czyli

$$\det(C) = c_{11} \cdot c_{22} \cdot \ldots \cdot c_{nn}.$$

Twierdzenia 5.1-5.4 umożliwiają nam efektywne obliczenie dowolnego wyznacznika przy pomocy operacji elementarnych. Pokażemy to na następującym przykładzie.

Przykład 5.5. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix} \overset{w_2 - w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}$

$\overset{w_3 + w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix} \overset{w_4 + 3 \cdot w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -19 \end{vmatrix} \overset{w_2 + w_4}{=}$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -19 \end{vmatrix} \overset{w_3 + 2 \cdot w_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \\ 0 & -3 & -5 & -19 \end{vmatrix} \overset{w_4 + 3 \cdot w_2}{=}$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \\ 0 & 0 & -26 & -61 \end{vmatrix} = (-9) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -26 & -61 \end{vmatrix} \overset{w_4 + 26 \cdot w_3}{=} (-9) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{vmatrix} =$
$(-9) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 17 = -153.\square$

Z twierdzenia 5.2 mamy natychmiast następujący

Wniosek 5.6. Jeżeli pewien wiersz (kolumna) macierzy kwadratowej A składa się z samych zer, to $\det(A) = 0$.

Z twierdzenia 5.3 i z wniosku 5.6 otrzymujemy od razu następujący

Wniosek 5.7. Jeżeli macierz kwadratowa A ma identyczne dwa wiersze (kolumny), to $\det(A) = 0$.

Twierdzenie 5.8. Wyznacznik macierzy transponowanej macierzy kwadratowej A jest równy wyznacznikowi macierzy A, czyli $\det(A^T) = \det(A)$.

Twierdzenie 5.9 (Cauchy'ego). Jeżeli A i B są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia nad tym samym ciałem, to $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Twierdzenie 5.10 (Rozwinięcie Laplace'a względem i-tego wiersza).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \det(A_{i1}) + \ldots + (-1)^{i+n} \cdot a_{in} \det(A_{in}).$$

Twierdzenie 5.11 (Rozwinięcie Laplace'a względem j-tej kolumny).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \det(A_{1j}) + \ldots + (-1)^{n+j} \cdot a_{nj} \det(A_{nj}).$$

W praktyce najszybszym sposobem obliczania wyznacznika jest stosowanie operacji elementarnych i rozwinięcia Laplace'a względem takiego wiersza (kolumny), w którym występuje co najwyżej jeden niezerowy wyraz. Pokażemy to w następnym przykładzie.

Przykład 5.12. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{w_4 - 4 \cdot w_1}{=} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -11 \end{vmatrix} \end{array} = (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \downarrow & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -11 \end{vmatrix} \end{array} =$$

$(-1) \cdot (-1)^{3+2} \cdot (-5) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-5) \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 8) = 100$. Strzałkami $\downarrow$ oznaczyliśmy kolumnę, względem której zastosowano rozwinięcie Laplace'a.□

3 Odwracanie macierzy

Oznaczmy przez $M_n(K)$ zbiór wszystkich macierzy kwadratowych stopnia $n > 1$ nad ciałem K. **Macierzą jednostkową** nazywamy taką macierz $I_n \in M_n(K)$, która na głównej przekątnej ma same jedynki, zaś na pozostałych miejscach same zera. Zatem

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

I_n jest elementem neutralnym mnożenia macierzy w zbiorze $M_n(K)$ tzn. $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ dla dowolnej macierzy $A \in M_n(K)$. Ponadto z twierdzenia 5.4 mamy, że $\det(I_n) = 1$.

Powiemy, że macierz $A \in M_n(K)$ jest **odwracalna**, jeżeli istnieje macierz $B \in M_n(K)$ taka, że

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n. \tag{3}$$

W tej sytuacji mówimy, że B jest **macierzą odwrotną** do macierzy A i piszemy $B = A^{-1}$.

Jeżeli macierz $A \in M_n(K)$ jest odwracalna, to z twierdzenia Cauchy'ego wynika od razu, że $\det(A) \neq 0$. Można udowodnić, że zachodzi następujące

Twierdzenie 5.13. Macierz $A \in M_n(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(A) \neq 0$.

Z twierdzenia 5.13 łatwo można wyprowadzić następujące

Twierdzenie 5.14. Macierz $B \in M_n(K)$ jest macierzą odwrotną do macierzy $A \in M_n(K)$ wtedy, i tylko wtedy, gdy $A \cdot B = I_n$.

4 Algorytm wyznacznikowy odwracania macierzy

Krok 1: Obliczamy $\det(A)$. Jeżeli $\det(A) = 0$, to A^{-1} nie istnieje. Jeżeli $\det(A) \neq 0$, to przechodzimy do następnego kroku.

Krok 2: Dla $i, j = 1, 2, \dots, n$ obliczamy $\det(A_{ij})$, czyli wyznaczniki macierzy powstających z macierzy A przez wykreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny. Obliczamy też **dopełnienia algebraiczne** d_{ij} elementu a_{ij} macierzy A: $d_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$.

Krok 3: Tworzymy **macierz dopełnień** $D(A)$

$$D(A) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Krok 4: Wypisujemy macierz odwrotną do macierzy A

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot D(A)^T. \tag{5}$$

Przykład 5.15. Wyznaczymy macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ nad ciałem liczb rzeczywistych. Z twierdzenia 4.4, $\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Ponadto

$d_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $d_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -a$, $d_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ 1 & b \end{vmatrix} = ab - c$,

$d_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $d_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $d_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & c \\ 0 & b \end{vmatrix} = -b$,

$d_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $d_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $d_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Zatem $D(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ab - c & -b & 1 \end{bmatrix}$ oraz $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot D(A)^T$, czyli

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & ab - c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, bo $\det(A) = 1$.$\square$

Przykład 5.16. Wyznaczymy macierz odwrotną do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy najpierw wyznacznik macierzy A:

$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 5 & 7 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & -2 & -3 & 5 & -2 \end{array}\right. = -18 + 100 - 84 - 105 + 16 + 90 = -1$, czyli $\det(A) = -1 \neq 0$, więc A^{-1} istnieje.

Teraz obliczamy dopełnienia algebraiczne wszystkich wyrazów macierzy A:

$d_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 8 = -1$, $d_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -(-18 - 20) = 38$,

$d_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 15 = -27$.

$d_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -(-15 + 14) = 1$, $d_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 35 = -41$,

$d_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 25) = 29$.

$d_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 21 = -1$, $d_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 42) = 34$,

$d_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 30 = -24$.

Tworzymy macierz dopełnień $D(A) = \begin{bmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{bmatrix}$. Zatem $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot D(A)^T =$ $(-1) \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{bmatrix}$, czyli ostatecznie $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$.□

5 Odwracanie macierzy przy pomocy operacji elementarnych

Z definicji mnożenia macierzy wynika, że dla dowolnej macierzy $A \in M_n(K)$: operacji elementarnej na wierszach macierzy A odpowiada pomnożenie macierzy A z lewej strony przez macierz, która powstaje z macierzy jednostkowej I_n przez wykonanie na niej tej samej operacji.
Stosując operacje elementarne na wierszach **nieosobliwej macierzy** A (tzn. takiej, że $\det(A) \neq 0$) możemy ją przekształcić do macierzy jednostkowej I_n. Wynika stąd, że istnieją macierze $B_1, B_2, \ldots, B_s$ takie, że

$$B_s \cdot \ldots \cdot B_2 \cdot B_1 \cdot A = I_n. \tag{6}$$

Zatem $A^{-1} = B_s \cdot \ldots \cdot B_2 \cdot B_1$, czyli $A^{-1} = B_s \cdot \ldots \cdot B_2 \cdot B_1 \cdot I_n$. Stąd **macierz A^{-1} powstaje z macierzy I_n przez wykonanie na niej tych samych operacji elementarnych, co na macierzy A.**

W praktyce przy obliczaniu macierzy odwrotnej do macierzy nieosobliwej A przy pomocy operacji elementarnych na wierszach postępu-jemy w sposób następujący. Z prawej strony macierzy A dopisujemy macierz jednostkową I_n tego samego stopnia. Na wierszach otrzymanej w ten sposób macierzy blokowej $[A|I_n]$ wykonujemy operacje elementarne aż do uzyskania macierzy blokowej postaci $[I_n|B]$. Macierz B jest wtedy macierzą odwrotną do macierzy A, tj. $B = A^{-1}$.

$$\Big[A\Big|I_n\Big] \xrightarrow[------]{\text{operacje elementarne na wierszach}} \Big[I_n\Big|A^{-1}\Big]$$

Przykład 5.17. Stosując operacje elementarne wyznaczymy macierz odwrotną do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Mamy: $\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{w_1 - w_4,\ w_2 - 2w_4,\ w_3 - w_4}{\equiv}$

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 0 & 2 & 5 & 10 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 14 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{w_1 \leftrightarrow w_4}{\equiv} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 14 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 10 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\overset{w_2-3w_3,\ w_4-2w_3}{\equiv} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \overset{w_2 \leftrightarrow w_3}{\equiv}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \overset{w_3-4w_4}{\equiv} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \overset{w_3 \leftrightarrow w_4}{\equiv}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right] \overset{(-1)w_3,\ (-1)w_4}{\equiv} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right]$$

$$\overset{w_1+6w_4,\ w_2-5w_4}{\equiv} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & 0 & 24 & -6 & -30 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -20 & 5 & 26 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right] \overset{w_1+2w_3,\ w_2-3w_3}{\equiv}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 22 & -6 & -26 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -17 & 5 & 20 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right]. \text{ Zatem: } A^{-1} = \left[\begin{array}{rrrr} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right]. \square$$

6 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 5.18. Stosując rozwinięcie Laplace'a względem drugiej kolumny oblicz wyznacznik:

$$\left|\begin{array}{rrrr} 3 & a & 5 & 2 \\ 2 & b & 7 & 0 \\ -3 & c & 2 & 0 \\ 5 & d & 1 & 2 \end{array}\right|.$$

Odp. $-50a + 16b + 44c + 50d$.

Zadanie 5.19. Oblicz następujące wyznaczniki:

a) $\left|\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{array}\right|$, b) $\left|\begin{array}{rrrr} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & -3 \end{array}\right|$, c) $\left|\begin{array}{rrrr} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right|$, d) $\left|\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right|$,

e) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Odp. a) 301. b) −21. c) −3. d) −8. e) 60.

Zadanie 5.20. Oblicz następujące wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

Odp. a) 5. b) 1932.

Zadanie 5.21. Wyznacz macierz odwrotną do macierzy

a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$, b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{bmatrix}$.

Odp. a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. b) $B^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $C^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 48 & 6 & -8 & -16 \\ -23 & -2 & 4 & 7 \\ 20 & 2 & -4 & -6 \\ -10 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Zadanie 5.22. Rozwiąż równania macierzowe stosując macierz odwrotną:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$, b) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X =$
$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Odp. a) $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. b) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. c) $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.