Wykład 6
Rząd macierzy. Układy równań liniowych

1 Minor macierzy

Niech A będzie dowolną $m \times n$-macierzą nad ciałem K oraz niech $1 \leq k \leq \min(m, n)$. **Minorem** stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia k, która powstała po skreśleniu $m - k$ wierszy oraz $n - k$ kolumn w macierzy A.

Przykład 6.1. Minorem stopnia 2 macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ jest wyznacznik $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$, który powstaje przez skreślenie w wyznaczniku macierzy A drugiego wiersza oraz pierwszej i trzeciej kolumny. W sumie macierz A posiada dokładnie 18 minorów stopnia 2 i tylko 4 minory stopnia 3. □

2 Rząd macierzy

Rzędem macierzy niezerowej nazywamy największy stopień jej niezerowego minora. Przyjmujemy, że rząd macierzy zerowej jest równy 0. Rząd macierzy A oznaczamy przez $r(A)$.

Przykład 6.2. Korzystając z definicji znajdziemy rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Mamy, że $\det(A) \overset{w_2+2\cdot w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$, bo wiersze drugi i trzeci są identyczne. Stąd $r(A) < 3$. Ale po skreśleniu trzeciego wiersza i trzeciej kolumny macierzy A uzyskamy minor stopnia 2 równy $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-3) \cdot (-2) = -2 \neq 0$, więc ostatecznie $r(A) = 2$.□

Wprost z definicji rzędu macierzy uzyskujemy następujące stwierdzenia.

Stwierdzenie 6.1. Rząd $m \times n$-macierzy A spełnia nierówności:

$$0 \leq r(A) \leq \min(m, n).$$

Stwierdzenie 6.2. Rząd macierzy kwadratowej A takiej, że $\det(A) \neq 0$ jest równy jej stopniowi.

Stwierdzenie 6.3. Rząd niezerowej $1 \times n$ $(m \times 1)$ macierzy jest równy 1.

Jednak obliczanie rzędu macierzy wprost z definicji jest na ogół uciążliwe. W praktyce przy obliczaniu rzędu macierzy korzystamy z następujących własności.

Twierdzenie 6.4. Rząd macierzy transponowanej jest równy rzędowi macierzy wyjściowej: $r(A^T) = r(A)$.

Twierdzenie 6.5. Przekształcenia elementarne nie zmieniają rzędu macierzy.

Twierdzenie 6.6. Jeżeli w i-tym wierszu (kolumnie) macierzy A pewien wyraz a_{ij} jest niezerowy, zaś pozostałe wyrazy tego wiersza (kolumny) są równe 0 oraz macierz A_{ij} powstaje przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny w macierzy A, to zachodzi wzór:

$$r(A) = 1 + r(A_{ij}). \tag{1}$$

Twierdzenie 6.7. Wykreślenie zerowych wierszy (kolumn) niezerowej macierzy nie zmienia jej rzędu.

Twierdzenie 6.8. Jeżeli $a_{ii} \neq 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$, to dla dowolnych skalarów a_{ij}, gdzie $i < j$ zachodzi wzór:

$$r\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1\,k} & a_{1\,k+1} & \ldots & a_{1\,n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2\,k} & a_{2\,k+1} & \ldots & a_{2\,n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3\,k} & a_{3\,k+1} & \ldots & a_{3\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{k\,k} & a_{k\,k+1} & \ldots & a_{k\,n} \end{bmatrix}\right) = k. \tag{2}$$

Przykład 6.9. Obliczymy rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Po zastosowaniu operacji $w_1 - w_3$ oraz $w_2 - 2 \cdot w_3$ uzyskamy macierz

$$B = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

o tym samym rzędzie co macierz A. Zatem z twierdzenia 6.6 mamy, że $r(B) = 1 + r(B_{34})$. Ale $r(B_{34}) = r\left(\begin{bmatrix} 10 & -2 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \overset{w_1 - 2\cdot w_2}{=} r\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = r(\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}) = 1$, więc $r(A) = 2.\square$

3 Układy równań liniowych

Układem m **równań liniowych** o niewiadomych x_1, x_2, …, x_n o współczynnikach z ciała K nazywamy układ równań postaci:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots\dots & . & \dots\dots & . & \dots & . & \dots\dots & . & .. \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. , \tag{3}$$

gdzie współczynniki a_{ij} (dla $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$) oraz elementy b_i (dla $i = 1, \dots, m$) należą do ciała K. Układ ten nazywamy **jednorodnym**, gdy $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$.

Macierzą współczynników układu (3) nazywamy macierz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

zaś **macierzą uzupełnioną** układu (3) nazywamy macierz:

$$A_u = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]. \tag{5}$$

Rozwiązaniem układu (3) nazywamy taką $n \times 1$-macierz $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ o wyrazach z ciała K, że po zastąpieniu w równaniach tego układu niewiadomych x_i elementami c_i dla $i = 1, 2, \dots, n$ otrzymujemy równości prawdziwe w ciele K, tj. gdy $A \cdot C = B$, gdzie B jest **kolumną wyrazów wolnych** tzn.

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Wynika stąd, że przy tych oznaczeniach układ (3) można zapisać w postaci macierzowej

$$A \cdot X = B. \tag{7}$$

Jeżeli układ (3) nie posiada rozwiązania, to mówimy, że jest on **sprzeczny**.

Twierdzenie 6.10 (Kroneckera-Capellego). Układ (3) ma rozwiązanie wtedy, i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_u)$, tj. gdy rząd macierzy współczynników układu jest równy rzędowi macierzy uzupełnionej. Ponadto układ (3) posiada dokładnie jedno rozwiązanie wtedy, i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_u) = n$.

Uwaga. Niech K będzie ciałem nieskończonym. Można pokazać, że jeżeli w układzie (3) jest $r(A) = r(A_u) = r < n$, to ma on nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów.

Przykład 6.11. Rozważmy nad ciałem liczb rzeczywistych układ równań:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}.$$

Mamy tutaj:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ oraz } A_u = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right].$$

Stąd $r(A) \overset{\substack{w_3-w_1 \\ w_2-w_1}}{=} r\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 1 + r\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 1 + r\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 + 1 = 2$

oraz $r(A_u) \overset{k_4-k_5}{=} r\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right] = r(A)$ (po skreśleniu czwartej kolumny). Zatem z twierdzenia Kroneckera-Capellego nasz układ posiada rozwiązanie, zaś na mocy **Uwagi** układ ten posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów. □

Problem *rozwiązania układu* równań liniowych polega na znalezieniu **wszystkich** rozwiązań tego układu. Bardzo użyteczne przy rozwiązywaniu tego problemu są operacje elementarne.

4 Operacje elementarne na układzie równań liniowych

(i). Zamiana miejscami równania i-tego z równaniem j-tym ($i \neq j$) oznaczana przez $r_i \leftrightarrow r_j$.

(ii). Pomnożenie i-tego równania przez niezerowy skalar a oznaczana przez $a \cdot r_i$.

(iii). Dodanie do i-tego równania równania j-tego ($i \neq j$) pomnożonego przez dowolny skalar a oznaczana przez $r_i + a \cdot r_j$. Przy tej operacji zmieniamy tylko równanie i-te!

(iv). Wykreślenie powtarzających się kopii pewnego równania.

(v). Zamiana kolejności niewiadomych x_i oraz x_j ($i \neq j$) w każdym równaniu oznaczana przez $x_i \leftrightarrow x_j$. W wyniku zastosowania tej operacji równanie

$$a_1x_1 + \ldots + a_ix_i + \ldots + a_jx_j + \ldots + a_nx_n = b$$

przechodzi na równanie

$$a_1x_1 + \ldots + a_jx_j + \ldots + a_ix_i + \ldots + a_nx_n = b.$$

(vi). Wykreślenie równań postaci $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$.

Można udowodnić, że jeżeli układ (3') równań liniowych z n-niewiadomymi powstaje z układu (3) równań liniowych z n-niewiado-mymi nad tym samym ciałem przez kolejne wykonanie skończonej liczby operacji elementarnych, to układy (3) i (3') mają takie same zbiory rozwiązań. Piszemy wtedy $(3) \equiv (3')$.

5 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 6.12. Nad ciałem $\mathbb{R}$ oblicz rząd macierzy

a) $A = \begin{bmatrix} 377 & 259 & 481 & 407 \\ 19 & 133 & 247 & 209 \\ 25 & 175 & 325 & 275 \end{bmatrix}$, b) $B = \begin{bmatrix} 1241 & 381 & 273 & -165 \\ 134 & -987 & 562 & 213 \\ 702 & 225 & -1111 & 49 \end{bmatrix}$.

Odp. a) $r(A) = 2$. b) $r(B) = 3$.

Zadanie 6.13. Nad ciałem $\mathbb{R}$ oblicz rząd macierzy

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 4 & -9 \end{bmatrix}$.

Odp. a) $r(A) = 3$. b) $r(B) = 4$.

Zadanie 6.14. Nad ciałem $\mathbb{R}$ oblicz rząd macierzy

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$.

Odp. a) $r(A) = 2$. b) $r(B) = 2$.

Zadanie 6.15. W zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ oblicz nad ciałem $\mathbb{R}$ rząd macierzy

a) $A = \begin{bmatrix} 3+2a & 1+3a & a & a-1 \\ 3a & 3+2a & a & a-1 \\ 3a & 3a & 3 & a-1 \\ 3a & 3a & a & a-1 \end{bmatrix}$, b) $B = \begin{bmatrix} a+1 & a^2+1 & a^2 \\ 3a-1 & 3a^2-1 & a^2+2a \\ a-1 & a^2-1 & a \end{bmatrix}$.

Odp. a) Dla $a = 3$, $r(A) = 2$; dla $a = 1$, $r(A) = 3$; zaś dla $a \neq 1$ i $a \neq 3$, $r(A) = 4$. b) Dla $a = 1$, $r(B) = 1$, zaś dla pozostałych a, $r(B) = 2$.

Zadanie 6.16. Zastosuj twierdzenie Kroneckera-Capellego do zbadania dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ układ równań

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ ax_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12 \end{cases}$$

ma rozwiązanie w ciele $\mathbb{R}$. **Odp.** $a \neq 8$.