Wykład 10
Przekształcenia liniowe

1 Przekształcenia liniowe i ich własności

Definicja 10.1. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Przekształcenie $f\colon V \to W$ spełniające warunki:
(I) $\forall_{\alpha,\beta\in V}\ f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ oraz (II) $\forall_{\alpha\in V}\forall_{a\in K}\ f(a\circ\alpha) = a\circ f(\alpha)$
nazywamy **przekształceniem liniowym** przestrzeni V w przestrzeń W.

Stwierdzenie 10.2. Złożenie przekształceń liniowych jest przekształceniem liniowym.
Dowód. Niech $f\colon V \to W$ i $g\colon W \to U$ będą przekształceniami liniowymi. Wówczas dla dowolnych $\alpha, \beta \in V$ jest $(g\circ f)(\alpha+\beta) = g(f(\alpha+\beta)) = g(f(\alpha)+f(\beta)) = g(f(\alpha)) + g(f(\beta)) = (g\circ f)(\alpha) + (g\circ f)(\beta)$ oraz dla dowolnych $\alpha \in V$, $a \in K$ jest: $(g\circ f)(a\circ\alpha) = g(f(a\circ\alpha)) = g(a\circ f(\alpha)) = a\circ g(f(\alpha)) = a\circ(g\circ f)(\alpha)$. Zatem $g\circ f$ jest przekształceniem liniowym. □

Stwierdzenie 10.3. Niech $f\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowej V nad ciałem K w przestrzeń liniową W nad ciałem K. Wówczas:
(i) $f(\Theta) = \Theta$,
(ii) $f(-\alpha) = -f(\alpha)$ dla każdego $\alpha \in V$,
(iii) $f(\alpha-\beta) = f(\alpha) - f(\beta)$ dla dowolnych $\alpha, \beta \in V$,
(iv) $f(a_1\circ\alpha_1 + \ldots + a_n\circ\alpha_n) = a_1\circ f(\alpha_1) + \ldots + a_n\circ f(\alpha_n)$ dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in K$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ i dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.
Dowód. (i). Na mocy (II) jest $f(\Theta) = f(0\circ\Theta) = 0\circ f(\Theta) = \Theta$.
(ii). Na mocy (I) i (i) mamy, że $f(\alpha)+f(-\alpha) = f(\alpha+(-\alpha)) = f(\Theta) = \Theta$, więc $f(-\alpha) = -f(\alpha)$.
(iii). Na mocy (I) i (ii) jest $f(\alpha-\beta) = f(\alpha+(-\beta)) = f(\alpha) + f(-\beta) = f(\alpha) + (-f(\beta)) = f(\alpha) - f(\beta)$.
(iv). Stosujemy indukcję względem n. Dla $n = 1$ teza wynika z (II). Załóżmy, że teza zachodzi dla pewnego naturalnego n i niech $a_1, \ldots, a_{n+1} \in K$ oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in V$. Wtedy na mocy (I), (II) i założenia indukcyjnego mamy, że $f(a_1\circ\alpha_1 + \ldots + a_{n+1}\circ\alpha_{n+1}) = f((a_1\circ\alpha_1 + \ldots + a_n\circ\alpha_n) + a_{n+1}\circ\alpha_{n+1}) = f(a_1\circ\alpha_1 + \ldots + a_n\circ\alpha_n) + f(a_{n+1}\circ\alpha_{n+1}) = a_1\circ f(\alpha_1) + \ldots + a_n\circ f(\alpha_n) + a_{n+1}\circ f(\alpha_{n+1})$. Zatem teza zachodzi dla liczby $n+1$. □

Stwierdzenie 10.4. Niech $f\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowej V nad ciałem K w przestrzeń liniową W nad ciałem K. Wówczas zbiór $Ker(f) = \{\alpha \in V : f(\alpha) = \Theta\}$ zwany **jądrem** f jest podprzestrzenią przestrzeni V. Ponadto f jest różnowartościowe (tzn. f jest **monomorfizmem liniowym**) wtedy i tylko wtedy, gdy $Ker(f) = \{\Theta\}$.
Dowód. Na mocy stwierdzenia 10.3(i) mamy, że $\Theta \in Ker(f)$. Niech $a \in K$, $\alpha, \beta \in Ker(f)$. Wtedy na mocy (I) $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta) = \Theta + \Theta = \Theta$, więc $\alpha + \beta \in Ker(f)$ oraz na mocy

(II) $f(a \circ \alpha) = a \circ f(\alpha) = a \circ \Theta = \Theta$, skąd $a \circ \alpha \in Ker(f)$. Zatem $Ker(f)$ jest podprzestrzenią przestrzeni V.

Załóżmy, że f jest różnowartościowe i niech $\alpha \in Ker(f)$. Wtedy $f(\alpha) = \Theta$. Ale na mocy stwierdzenia 10.3(i) jest $\Theta = f(\Theta)$, więc $f(\alpha) = f(\Theta)$, skąd $\alpha = \Theta$. Zatem $Ker(f) = \{\Theta\}$. Na odwrót, załóżmy, że $Ker(f) = \{\Theta\}$ i weźmy dowolne $\alpha, \beta \in V$ takie, że $f(\alpha) = f(\beta)$. Wtedy na mocy stwierdzenia 10.3(iii) jest $\Theta = f(\alpha) - f(\beta) = f(\alpha - \beta)$, czyli $\alpha - \beta \in Ker(f)$. Zatem $\alpha - \beta = \Theta$, skąd $\alpha = \beta$ i f jest monomorfizmem. □

Uwaga 10.5. Każda podprzestrzeń W przestrzeni liniowej V nad ciałem K jest jądrem pewnego przekształcenia liniowego określonego na V. Rzeczywiście, z twierdzenia 9.6 istnieje baza X podprzestrzeni W i wówczas $W = L(X)$. Ponadto z twierdzenia 9.6 istnieje zbiór $Y \subseteq V$ rozłączny z X i taki, że $X \cup Y$ jest bazą przestrzeni V. Niech $U = L(Y)$. Łatwo zauważyć, że $V = W + U$. Ponadto z liniowej niezależności zbioru $X \cup Y$ i tego, że $X \cap Y = \emptyset$ można wyprowadzić, że $W \cap U = \{\Theta\}$. Stąd już wynika, że każdy wektor $\alpha \in V$ może być jednoznacznie zapisany w postaci $\alpha = \beta + \gamma$ dla pewnych $\beta \in W$ oraz $\gamma \in U$. Wobec tego przekształcenie $f\colon V \to U$ dane wzorem $f(\alpha) = \gamma$ jest dobrze określone. Niech $\alpha_1, \alpha_2 \in V$, $a \in K$. Wtedy istnieją $\beta_1, \beta_2 \in W$, $\gamma_1, \gamma_2 \in U$ takie, że $\alpha_1 = \beta_1 + \gamma_1$ i $\alpha_2 = \beta_2 + \gamma_2$, skąd $\alpha_1 + \alpha_2 = (\beta_1 + \beta_2) + (\gamma_1 + \gamma_2)$ oraz $\beta_1 + \beta_2 \in W$ i $\gamma_1 + \gamma_2 \in U$. Zatem $f(\alpha_1 + \alpha_2) = \gamma_1 + \gamma_2 = f(\alpha_1) + f(\alpha_2)$. Ponadto $a \circ \alpha_1 = a \circ \beta_1 + a \circ \gamma_1$ oraz $a \circ \beta_1 \in W$ i $a \circ \gamma_1 \in U$, więc $f(a \circ \alpha_1) = a \circ \gamma_1 = a \circ f(\alpha_1)$. Stąd f jest przekształceniem liniowym. Nazywamy je **rzutem przestrzeni V na podprzestrzeń U wzdłuż podprzestrzeni W**. Ponieważ dla $\gamma \in U$ jest $\gamma = \Theta + \gamma$ i $\Theta \in W$, więc $f(\gamma) = \gamma$. Zatem f jest "na". Dla $\beta \in W$ mamy, że $\beta = \beta + \Theta$ i $\Theta \in U$, więc $f(\beta) = \Theta$, skąd $W \subseteq Ker(f)$. Jeśli zaś $\alpha \in Ker(f)$, to istnieją $\beta \in W$ i $\gamma \in U$ takie, że $\alpha = \beta + \gamma$ i $\Theta = f(\alpha) = \gamma$, skąd $\alpha = \beta \in W$. Zatem ostatecznie $W = Ker(f)$. □

Stwierdzenie 10.6. Niech $f : V \longrightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowej V nad ciałem K w przestrzeń liniową W nad ciałem K. Wówczas zbiór $Im(f) = f(V) = \{f(\alpha) : \alpha \in V\}$ zwany **obrazem** f jest podprzestrzenią przestrzeni W.

Dowód. Ze stwierdzenia 10.3(i) mamy, że $\Theta = f(\Theta) \in f(V)$. Niech $\alpha, \beta \in f(V)$. Wtedy istnieją $\alpha_1, \beta_1 \in V$ takie, że $\alpha = f(\alpha_1)$ i $\beta = f(\beta_1)$. Zatem $\alpha + \beta = f(\alpha_1) + f(\beta_1) = f(\alpha_1 + \beta_1) \in f(V)$ oraz dla $a \in K$: $a \circ \alpha = a \circ f(\alpha_1) = f(a \circ \alpha_1) \in f(V)$. Zatem $f(V)$ jest podprzestrzenią przestrzeni W. □

Stwierdzenie 10.7. Niech $f\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowej V nad ciałem K w przestrzeń liniową W nad ciałem K. Wówczas dla dowolnych wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$: jeżeli wektory $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ są liniowo niezależne, to wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ też są liniowo niezależne. Jeżeli dodatkowo f jest monomorfizmem, to wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ są liniowo niezależne.

Dowód. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$. Załóżmy, że wektory $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ są liniowo niezależne. Weźmy dowolne $a_1, \ldots, a_n \in K$ takie, że $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \Theta$. Wtedy na mocy stwierdzenia 10.3 mamy, że $a_1 \circ f(\alpha_1) + \ldots + a_n \circ f(\alpha_n) = \Theta$, skąd z lnz wektorów $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ jest $a_1 = \ldots = a_n = 0$, czyli wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ też są liniowo niezależne.

Niech teraz dodatkowo f będzie monomorfizmem. Załóżmy, że wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są lnz i weźmy dowolne $a_1, \ldots, a_n \in K$ takie, że $a_1 \circ f(\alpha_1) + \ldots + a_n \circ f(\alpha_n) = \Theta$. Wtedy ze stwierdzenia 10.3 mamy, że $f(a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n) = f(\Theta)$, skąd $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \Theta$. Zatem z lnz wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ wynika, że $a_1 = \ldots = a_n = 0$, czyli wektory $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ są liniowo niezależne. $\Box$

Definicja 10.8. Przekształcenie liniowe $f \colon V \to W$ nazywamy *epimorfizmem*, jeżeli $f(V) = W$ (tzn. f jest "na"). Przekształcenie liniowe $f : V \longrightarrow V$ przestrzeni V w siebie nazywamy *endomorfizmem* przestrzeni V.

Stwierdzenie 10.9. Niech $f \colon V \to W$ będzie izomorfizmem przestrzeni liniowych V i W nad tym samym ciałem K. Jeżeli wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni V, to wektory $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ tworzą bazę przestrzeni W.

Dowód. Ze stwierdzenia 10.7 wynika od razu, że wektory $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ są liniowo niezależne. Weźmy dowolne $\beta \in W$. Wtedy istnieje $\alpha \in V$ takie, że $\beta = f(\alpha)$. Zatem istnieją $a_1, \ldots, a_n \in K$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$, skąd na mocy stwierdzenia 10.3 jest, że $\beta = a_1 \circ f(\alpha_1) + \ldots + a_n \circ f(\alpha_n)$. Zatem wektory $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ generują przestrzeń W i są liniowo niezależne, czyli tworzą bazę przestrzeni W. $\Box$

Twierdzenie 10.10. Niech $f \colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Jeżeli przestrzeń V jest skończenie wymiarowa, to przestrzeń $Im(f)$ też jest skończenie wymiarowa i zachodzi wzór:

$$\dim V = \dim Ker(f) + \dim Im(f).$$

Dowód. Z uwagi 10.5 istnieje podprzestrzeń U przestrzeni V taka, że $Ker(f) + U = V$ i $Ker(f) \cap U = \{\Theta\}$ oraz każdy wektor $\alpha \in V$ można jednoznacznie zapisać w postaci $\alpha = \beta + \gamma$ dla pewnych $\beta \in Ker(f)$ i $\gamma \in U$. Stąd $f(\alpha) = f(\beta) + f(\gamma) = \theta + f(\gamma) = f(\gamma)$. Zatem $Im(f) = f(U)$, czyli przekształcenie liniowe $f|U$ jest "na". Weźmy dowolne $\gamma \in Ker(f|U)$. Wtedy $\gamma \in U$ i $\gamma \in Ker(f)$, więc $\gamma \in Ker(f) \cap U = \{\theta\}$, skąd $\gamma = \theta$. Zatem ze stwierdzenia 10.4, $f|U$ jest monomorfizmem i ostatecznie $f|U \colon U \to Im(f)$ jest izomorfizmem. Zatem z twierdzenia 10.9, $\dim(Im(f)) = \dim(U)$. Stąd przestrzeń $Im(f)$ też jest skończenie wymiarowa. Ale z twierdzenia 9.30, $\dim(V) = \dim Ker(f) + \dim(U)$, gdyż $\dim(Ker(f) \cap U) = 0$, więc $\dim V = \dim Ker(f) + \dim Im(f)$.$\Box$

Twierdzenie 10.11. Niech wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni liniowej V nad ciałem K i niech $\beta_1, \ldots, \beta_n$ będą dowolnymi wektorami przestrzeni liniowej W nad ciałem K. Wówczas istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $f \colon V \to W$ takie, że $f(\alpha_i) = \beta_i$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$. Ponadto takie f jest dane wzorem:

$$f(a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n) = a_1 \circ \beta_1 + \ldots + a_n \circ \beta_n \tag{1}$$

dla $a_1, \ldots, a_n \in K$. Przekształcenie f jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\beta_1, \ldots, \beta_n$ są liniowo niezależne. Ponadto f jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\beta_1, \ldots, \beta_n$ generują przestrzeń W oraz f jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tworzą bazę przestrzeni W.

Dowód. Dla przekształcenia f danego wzorem (1) mamy, że $f(\alpha_i) = \beta_i$ przy $i = 1, \ldots, n$. Weźmy dowolne $\alpha, \beta \in V$ i dowolne $a \in K$. Wtedy istnieją $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in K$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$ oraz $\beta = b_1 \circ \alpha_1 + \ldots + b_n \circ \alpha_n$. Zatem $f(\alpha+\beta) = f((a_1+b_1)\circ\alpha_1 + \ldots + (a_n+b_n)\circ\alpha_n) = (a_1+b_1)\circ\beta_1 + \ldots + (a_n+b_n)\circ\beta_n = (a_1\circ\beta_1 + \ldots + a_n\circ\beta_n) + (b_1\circ\beta_1 + \ldots + b_n\circ\beta_n) = f(\alpha) + f(\beta)$ oraz $f(a\circ\alpha) = f((aa_1)\circ\alpha_1 + \ldots + (aa_n)\circ\alpha_n) = (aa_1)\circ\beta_1 + \ldots + (aa_n)\circ\beta_n = a\circ(a_1\circ\beta_1 + \ldots + a_n\circ\beta_n) = a\circ f(\alpha)$. Zatem f jest szukanym przekształceniem liniowym. Jeżeli $g\colon V \to W$ jest przekształceniem liniowym takim, że $g(\alpha_i) = \beta_i$ dla $i = 1, \ldots, n$, to ze stwierdzenia 10.3 mamy, że $g(a_1\circ\alpha_1 + \ldots + a_n\circ\alpha_n) = a_1\circ g(\alpha_1) + \ldots + a_n\circ g(\alpha_n) = a_1\circ\beta_1 + \ldots + a_n\circ\beta_n = f(a_1\circ\alpha_1 + \ldots + a_n\circ\alpha_n)$ dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in K$. Ponieważ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ jest bazą przestrzeni V, więc stąd $g = f$.

Jeżeli f jest różnowartościowe, to na mocy stwierdzenia 10.7 wektory $\beta_1 = f(\alpha_1), \ldots, \beta_n = f(\alpha_n)$ są liniowo niezależne. Na odwrót, załóżmy, że wektory $\beta_1, \ldots, \beta_n$ są liniowo niezależne. Niech $\alpha \in Ker(f)$. Wtedy istnieją $a_1, \ldots, a_n \in K$ takie, że $\alpha = a_1\circ\alpha_1 + \ldots + a_n\circ\alpha_n$, skąd $\Theta = f(\alpha) = a_1\circ\beta_1 + \ldots + a_n\circ\beta_n$, czyli $a_1 = \ldots = a_n = 0$ i $\alpha = \Theta$. Zatem na mocy stwierdzenia 10.4 f jest monomorfizmem.

Jeżeli f jest epimorfizmem, to dla każdego $\beta \in W$ istnieje $\alpha \in V$ takie, że $\beta = f(\alpha)$. Ale $\alpha = a_1\circ\alpha_1 + \ldots + a_n\circ\alpha_n$ dla pewnych $a_1, \ldots, a_n \in K$, więc ze wzoru (1) $\beta = a_1\circ\beta_1 + \ldots + a_n\circ\beta_n$, czyli wektory $\beta_1, \ldots, \beta_n$ generują przestrzeń W. Na odwrót, załóżmy, że wektory $\beta_1, \ldots, \beta_n$ generują przestrzeń W. Weźmy dowolne $\beta \in W$. Wtedy istnieją $a_1, \ldots, a_n \in K$ takie, że $\beta = a_1\circ\beta_1 + \ldots + a_n\circ\beta_n = f(a_1\circ\alpha_1 + \ldots + a_n\circ\alpha_n)$, czyli f jest epimorfizmem.

Ostatnia część twierdzenia wynika z jego pierwszej części. □

2 Przykłady i zastosowania przekształceń liniowych

Przykład 10.12. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem K. Wówczas przekształcenie $f\colon V \to W$ dane wzorem $f(\alpha) = \Theta$ dla $\alpha \in V$ jest przekształceniem liniowym, bo dla $\alpha, \beta \in V$, $a \in K$: $f(\alpha+\beta) = \Theta = \Theta + \Theta = f(\alpha) + f(\beta)$ oraz $f(a\circ\alpha) = \Theta = a\circ\Theta = a\circ f(\alpha)$. Przekształcenie to nazywamy **zerowym** lub **trywialnym**. □

Przykład 10.13. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Niech $a \in K$ będzie dowolnym ustalonym elementem ciała K. Wtedy przekształcenie $\phi_a\colon V \to V$ dane wzorem $\phi_a(\alpha) = a\circ\alpha$ dla $\alpha \in V$, jest liniowe, gdyż dla $\alpha, \beta \in V$, $b \in K$ mamy, że $\phi_a(\alpha+\beta) = a\circ(\alpha+\beta) = a\circ\alpha + a\circ\beta = \phi_a(\alpha) + \phi_a(\beta)$ oraz $\phi_a(b\circ\alpha) = a\circ(b\circ\alpha) = (ab)\circ\alpha = (ba)\circ\alpha = b\circ(a\circ\alpha) = b\circ\phi_a(\alpha)$. To przekształcenie nazywamy **homotetią** o współczynniku a.□

Przykład 10.14. Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Wówczas przekształcenie $f\colon W \to V$ dane wzorem $f(\alpha) = \alpha$ dla $\alpha \in W$ jest oczywiście liniowe. Jest ono ponadto monomorfizmem podprzestrzeni W w przestrzeń V. W szczególności przekształcenie identycznościowe $id_V\colon V \to V$ dane wzorem $id_V(\alpha) = \alpha$ dla $\alpha \in V$, jest przekształceniem liniowym. □

Przykład 10.15. Opiszemy wszystkie przekształcenia liniowe $f\colon K^n \to K^m$ dla ustalonego ciała K i dla dowolnych ustalonych liczb naturalnych m, n. Ponieważ wektory $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$

tworzą bazę przestrzeni K^n oraz dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in K$ jest $[x_1, \ldots, x_n] = x_1 \circ \varepsilon_1 + \ldots + x_n \circ \varepsilon_n$, więc na mocy twierdzenia 10.11 wszystkimi przekształceniami liniowymi $f\colon K^n \to K^m$ są jedynie przekształcenia f postaci:

$$f([x_1, \ldots, x_n]) = x_1 \circ \beta_1 + \ldots + x_n \circ \beta_n,$$

dla dowolnych ustalonych $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K^m$. Ale dla $j = 1, \ldots, n$ istnieją $a_{ij} \in K$ $(i = 1, \ldots, m)$ takie, że $\beta_j = [a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}]$, więc stąd otrzymujemy tzw. *wzór analityczny* na dowolne przekształcenie liniowe $f\colon K^n \to K^m$:

$$f([x_1, \ldots, x_n]) = [a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n]. \tag{2}$$

Zauważmy ponadto, że jeżeli $a'_{ij} \in K$ dla $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ są takie, że przekształcenie f dane wzorem (2) spełnia wzór
$f([x_1, \ldots, x_n]) = [a'_{11}x_1 + \ldots + a'_{1n}x_n, \ldots, a'_{m1}x_1 + \ldots + a'_{mn}x_n]$, to dla $\beta'_j = [a'_{1j}, a'_{2j}, \ldots, a'_{mj}]$, $j = 1, \ldots, n$, będziemy mieli, że $\beta'_j = f(\varepsilon_j) = \beta_j$, czyli $a'_{ij} = a_{ij}$ dla wszystkich i, j. Wynika stąd, że przekształcenie liniowe $f : K^n \longrightarrow K^m$ jest jednoznacznie wyznaczone przez $m \times n$ macierz $A = [a_{ij}]$. Ponadto z definicji mnożenia macierzy mamy, że dla przekształcenia f danego wzorem (2) zachodzi wzór:

$$f([x_1, \ldots, x_n]) = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Przy tych oznaczeniach mamy też, że $f(K^n) = L(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ oraz wektory $\beta_1, \ldots, \beta_n$ możemy traktować jako kolumny macierzy A, więc stąd dla przekształcenia f mamy wzór:

$$\dim Im(f) = r(A). \tag{4}$$

Zatem z twierdzenia 10.10 mamy, że $n = \dim K^n = \dim Ker(f) + \dim Im(f)$, więc na mocy wzoru (4):

$$\dim Ker(f) = n - r(A). \tag{5}$$

Zauważmy też, że $[a_1, \ldots, a_n] \in Ker(f)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[a_1, \ldots, a_n]$ jest rozwiązaniem układu jednorodnego

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots + & a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \ldots + & a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \ldots + & a_{mn}x_n = 0 \end{cases}. \tag{6}$$

Wynika stąd następujące

Twierdzenie 10.16. Zbiór rozwiązań układu jednorodnego (6) o macierzy współczynników A jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej K^n wymiaru $n - r(A)$. $\square$

Podamy teraz sposób wyznaczania jednorodnego układu równań liniowych o zadanej podprzestrzeni rozwiązań. Niech K będzie ustalonym ciałem i niech V będzie dowolną podprzestrzenią przestrzeni liniowej K^n. Wyznaczamy najpierw bazę i wymiar podprzestrzeni V. Niech wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ tworzą bazę podprzestrzeni V. Wtedy $\dim V = s$. W praktyce wyznaczamy bazę V w takiej postaci, aby można było ją uzupełnić w prosty sposób do bazy przestrzeni K^n pewnymi wektorami bazy kanonicznej przestrzeni K^n. Niech wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_{n-s}$ tworzą bazę przestrzeni K^n. Na mocy twierdzenia 10.11 istnieje dokładnie jeden epimorfizm $f : K^n \longrightarrow K^{n-s}$ taki, że $f(\alpha_i) = \Theta$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, s$ oraz $f(\beta_j) = \varepsilon_j$ dla $j = 1, \ldots, n-s$. Z określenia f mamy, że $V \subseteq Ker(f)$. Ponadto $\dim Im(f) = \dim K^{n-s} = n - s$, więc z twierdzenia 10.10 mamy, że $n = \dim K^n = \dim Ker(f) + \dim Im(f)$, skąd $\dim Ker(f) = s$. Ale $\dim V = s$ oraz $V \subseteq Ker(f)$, więc stąd $V = Ker(f)$. Pozostaje zatem wyznaczyć wzór analityczny na przekształcenie f i w ten sposób uzyskamy natychmiast żądany układ jednorodny.

Przykład 10.17. Znajdziemy układ jednorodny równań liniowych nad ciałem $\mathbb{R}$, którego przestrzenią rozwiązań jest $V = lin([1, -1, 1], [1, 1, -1])$. Najpierw znajdujemy bazę przestrzeni V: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{w_2 - w_1}{\equiv} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2} \cdot w_2}{\equiv} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Zatem bazą przestrzeni V jest $\{[1, -1, 1], [0, 1, -1]\}$. Następnie uzupełniamy znalezioną bazę przestrzeni V do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przy pomocy wektora $[0, 0, 1]$. Istnieje przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ takie, że $f([1, -1, 1]) = 0$, $f([0, 1, -1]) = 0$, $f([0, 0, 1]) = 1$. Wtedy $f([0, 1, 0]) = f([0, 1, -1]) + f([0, 0, 1]) = 0 + 1 = 1$ oraz $f([1, 0, 0]) = f([1, -1, 1]) - f([0, 1, -1]) = 0 - 0 = 0$. Zatem dla dowolnych $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ mamy, że $f([x_1, x_2, x_3]) = x_1 \cdot f([1, 0, 0]) + x_2 \cdot f([0, 1, 0]) + x_3 \cdot f([0, 0, 1]) = x_2 + x_3$. Ale $\dim(Im\, f) = 1$, więc $\dim(Ker\, f) = 3 - 1 = 2$. Ponadto $V \subseteq Ker\, f$ oraz $\dim(V) = 2$, więc $V = Ker\, f$. Stąd szukanym układem równań jest:

$$x_2 + x_3 = 0. \ \square$$

Przykład 10.18. Znajdziemy układ jednorodny równań liniowych nad ciałem $\mathbb{R}$, którego przestrzeń rozwiązań jest generowana przez wektory: $[1, -1, 1, -1, 1]$, $[1, 1, 0, 0, 3]$, $[3, 1, 1, -1, 7]$, $[0, 2, -1, 1, 2]$.

Znajdujemy najpierw bazę podprzestrzeni V generowanej przez wektory: $[1, -1, 1, -1, 1]$, $[1, 1, 0, 0, 3]$, $[3, 1, 1, -1, 7]$, $[0, 2, -1, 1, 2]$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{w_2 - w_1,\ w_3 - 3w_1}{\equiv} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{w_2 + w_4,\ w_3 + w_4}{\equiv} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zatem bazą V jest $\{[1, 1, 0, 0, 3], [0, 2, -1, 1, 2]\}$ oraz $\dim V = 2$. Ponieważ nasze wektory mają 5 współrzędnych, więc szukany układ równań będzie się składał z $5 - 2 = 3$ równań.

Ponadto bazą przestrzeni $\mathbb{R}^5$ jest $\{[1,1,0,0,3],[0,2,-1,1,2],$ $[0,0,1,0,0],[0,0,0,1,0],[0,0,0,0,1]\}$, więc istnieje przekształcenie liniowe $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ takie, że

$$f([1,1,0,0,3]) = [0,0,0], \tag{7}$$

$$f([0,2,-1,1,2]) = [0,0,0], \tag{8}$$

$$f([0,0,1,0,0]) = [1,0,0], \tag{9}$$

$$f([0,0,0,1,0]) = [0,1,0], \tag{10}$$

$$f([0,0,0,0,1]) = [0,0,1]. \tag{11}$$

Ponieważ wektory $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz należą do $f(\mathbb{R}^5)$, więc $f(\mathbb{R}^5) = \mathbb{R}^3$, czyli $\dim f(\mathbb{R}^5) = 3$. Ale $5 = \dim \mathbb{R}^5 = \dim Ker(f) + \dim f(\mathbb{R}^5)$, więc $\dim Ker(f) = 5-3 = 2$. Ponadto z (7) i (8) mamy, że $V = lin([1,1,0,0,3],[0,2,-1,1,2]) \subseteq Ker(f)$ oraz $\dim V = 2$, więc $V = Ker(f)$. Pozostaje zatem wyznaczyć wzór analityczny na takie przekształcenie f. Niech $\varepsilon_1 = [1,0,0,0,0]$, $\varepsilon_2 = [0,1,0,0,0]$, $\varepsilon_3 = [0,0,1,0,0]$, $\varepsilon_4 = [0,0,0,1,0]$, $\varepsilon_5 = [0,0,0,0,1]$. Wtedy dla dowolnych $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \in \mathbb{R}$:

$$[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5] = x_1 \circ \varepsilon_1 + x_2 \circ \varepsilon_2 + x_3 \circ \varepsilon_3 + x_4 \circ \varepsilon_4 + x_5 \circ \varepsilon_5.$$

Zatem z liniowości przekształcenia f mamy, że $f([x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]) = x_1 \circ f(\varepsilon_1) + x_2 \circ f(\varepsilon_2) + x_3 \circ f(\varepsilon_3) + x_4 \circ f(\varepsilon_4) + x_5 \circ f(\varepsilon_5)$.

Ze wzoru (8) mamy, że $2\circ f(\varepsilon_2) - f(\varepsilon_3) + f(\varepsilon_4) + 2\circ f(\varepsilon_5) = [0,0,0]$, więc $2\circ f(\varepsilon_2) - [1,0,0] + [0,1,0] + 2\circ[0,0,1] = [0,0,0]$, skąd $f(\varepsilon_2) = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1]$.

Ze wzoru (7) mamy, że $f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_2) + 3\circ f(\varepsilon_5) = [0,0,0]$, czyli $f(\varepsilon_1) + [\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1] + 3\circ[0,0,1] = [0,0,0]$, skąd $f(\varepsilon_1) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2]$.

Stąd
$f([x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]) = x_1\circ[-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-2] + x_2\circ[\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1] + x_3\circ[1,0,0] + x_4\circ[0,1,0] + x_5\circ[0,0,1] = [-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3, \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_4, -2x_1 - x_2 + x_5]$.

Zatem $V = Ker(f)$ jest zbiorem rozwiązań układu równań:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -\frac{1}{2}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0 \\ \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & & & + & x_4 & & & = & 0 \\ -2x_1 & - & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 0 \end{array}\right. . \ \square$$

3 Macierz przekształcenia liniowego

Niech $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ i $(\beta_1,\ldots,\beta_m)$ będą uporządkowanymi bazami przestrzeni liniowych V i W nad ciałem K odpowiednio. Niech $f\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas dla $k = 1,\ldots,n$ jest $f(\alpha_k) \in W$, więc istnieją $a_{1k},\ldots,a_{mk} \in K$ takie, że

$$f(\alpha_k) = a_{1k}\circ\beta_1 + \ldots + a_{mk}\circ\beta_m. \tag{12}$$

Otrzymaną w ten sposób $m \times n$ macierz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{13}$$

nazywamy **macierzą przekształcenia liniowego f w bazach** $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ przestrzeni V i W odpowiednio. Zatem kolejne kolumny macierzy (13) są wektorami współrzędnych wektora $f(\alpha_k)$ w bazie $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ przestrzeni W dla $k = 1, \dots, n$.

Przykład 10.19. Niech $m, n \in \mathbb{N}$ i niech $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$. Wówczas A jest macierzą przekształcenia liniowego $f \colon K^n \to K^m$ danego wzorem analitycznym

$$f([x_1, \dots, x_n]) = [a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n]$$

w bazach kanonicznych tych przestrzeni. □

Twierdzenie 10.20. Niech A będzie macierzą przekształcenia liniowego $f \colon V \to W$ w bazach $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \dots, \beta_m)$. Jeżeli $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ jest wektorem współrzędnych wektora $\alpha \in V$ w bazie $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, to $A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ jest wektorem współrzędnych wektora $f(\alpha) \in W$ w bazie $(\beta_1, \dots, \beta_m)$.

Dowód. Ponieważ $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \circ \alpha_i$, więc z własności przekształceń liniowych i ze wzoru (12) mamy

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i \circ f(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \circ \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \circ \beta_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i \cdot a_{ji}) \circ \beta_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot a_{ji}) \circ \beta_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot a_{ji}) \right) \circ \beta_j.$$

Zatem $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot a_{ji}$ jest j-tą współrzędną wektora $f(\alpha)$ w bazie $(\beta_1, \dots, \beta_m)$. Ponadto z definicji mnożenia macierzy j-tym wyrazem macierzy $A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in M_{m \times 1}(K)$ jest $\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \cdot a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot a_{ji}$. □

Przykład 10.21. Niech $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ będzie macierzą przekształcenia liniowego $f\colon V \to W$ w bazach (α_1, α_2), (β_1, β_2). Obliczymy $f(\alpha)$ dla $\alpha = \alpha_1 - 3 \circ \alpha_2$. Wektorem współrzędnych wektora α w bazie (α_1, α_2) jest $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, zatem z twierdzenia 10.20, wektorem współrzędnych wektora $f(\alpha)$ w bazie (β_1, β_2) jest $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -14 \end{bmatrix}$. Otrzymaliśmy więc, że $f(\alpha) = -7 \circ \beta_1 - 14 \circ \beta_2$. $\Box$

Twierdzenie 10.22. Niech A będzie macierzą przekształcenia liniowego $f\colon V \to W$ w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Wówczas

$$\dim Im\, f = r(A).$$

Dowód. Zauważmy, że $Im\, f = L(f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)) = L(\sum_{j=1}^{m} a_{j1} \circ \beta_j, \ldots, \sum_{j=1}^{m} a_{jn} \circ \beta_j)$. Z twierdzenia 10.11 wiemy, że istnieje izomorfizm liniowy $\varphi\colon W \to K^m$ taki, że $\varphi(\beta_j) = \varepsilon_j$ dla $j = 1, \ldots, m$. Stąd $Im\, f \cong \varphi(Im\, f)$, więc w szczególności $\dim Im\, f = \dim \varphi(Im\, f)$. Ale $\varphi(Im\, f) = L([a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}], \ldots, [a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}])$, więc $\dim \varphi(Im\, f) = r(A)$, czyli $\dim Im\, f = r(A)$. $\Box$

Lemat 10.23. Niech $A, B \in M_{m\times n}(K)$. Jeżeli dla dowolnych skalarów $a_1, \ldots, a_n$ zachodzi równość

$$A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = B \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

to $A = B$.

Dowód. Niech $A = [a_{ij}]$ oraz niech $B = [b_{ij}]$. Weźmy dowolne ustalone $j = 1, \ldots, n$ i niech $a_j = 1$ oraz $a_k = 0$ dla wszystkich $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$. Wtedy z definicji mnożenia macierzy i-tym elementem macierzy $A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in M_{m\times 1}(K)$ jest a_{ij} dla $i = 1, \ldots, m$. Podobnie i-tym elementem macierzy $B \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in M_{m\times 1}(K)$ jest b_{ij} dla $i = 1, \ldots, m$. Ale $A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = B \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in K$, więc $a_{ij} = b_{ij}$ dla dowolnych $i = 1, \ldots, m$ oraz $j = 1, \ldots, n$. Ponadto $A, B \in M_{m\times n}(K)$, więc $A = B$. $\Box$

Twierdzenie 10.24. Niech V, W, U będą przestrzeniami liniowymi o bazach uporządkowanych $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ odpowiednio. Niech A będzie macierzą przekształcenia

$f \in L(V;W)$ w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ oraz niech B będzie macierzą przekształcenia $g \in L(W;U)$ w bazach $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ i $(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$. Wówczas $B \cdot A$ jest macierzą przekształcenia $g \circ f \in L(V;U)$ w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$.

Dowód. Niech $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ będzie wektorem współrzędnych wektora $\alpha \in V$ w bazie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Wtedy z twierdzenia 10.20 mamy, że $A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ jest wektorem współrzędnych wektora $f(\alpha)$ w bazie $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Ponownie z twierdzenia 10.20 otrzymujemy, że $B \cdot \left(A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right)$ jest wektorem współrzędnych wektora $g(f(\alpha))$ w bazie $(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$. Ale

$$B \cdot \left(A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right) = (B \cdot A) \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

więc jeśli $C \in M_{s \times n}(\mathbb{R})$ jest macierzą przekształcenia $g \circ f \in L(V;U)$ w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$, to na mocy twierdzenia 10.20 $C \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = (B \cdot A) \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Ponieważ $B \in M_{s \times m}(\mathbb{R})$ i $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, więc $B \cdot A \in M_{s \times n}(\mathbb{R})$. Z lematu 10.23 otrzymujemy równość $C = B \cdot A$. $\square$

4 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 10.18. Znajdź przekształcenie liniowe f przestrzeni $\mathbb{R}^3$ na przestrzeń $\mathbb{R}^2$ takie, że $[1, 1, -1] \in Ker(f)$.

Odp. Ogólna postać takich przekształceń f:
$f([x_1, x_2, x_3]) = [(c - a)x_1 + ax_2 + cx_3, (d - b)x_1 + bx_2 + dx_3]$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ oraz $ad \neq bc$.

Zadanie 10.25. Znajdź przekształcenie liniowe $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ takie, że $Ker(f) = L([1, -1, 2])$ oraz $Im(f) = L([1, 2, 1, -1], [3, 1, 2, 0])$.

Odp. Ogólna postać takich przekształceń f:
$f([x_1, x_2, x_3]) = [(a - 2c + 3b - 6d)x_1 + (a + 3b)x_2 + (c + 3d)x_3, (2a - 4c + b - 2d)x_1 + (2a + b)x_2 + (2c + d)x_3, (a - 2c + 2b - 4d)x_1 + (a + 2b)x_2 + (c - 4d)x_3, (2c - a)x_1 - ax_2 - cx_3]$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ oraz $ad \neq bc$.

Zadanie 10.26. Znajdź układ jednorodny równań liniowych, którego zbiorem rozwiązań jest podprzestrzeń V przestrzeni $\mathbb{R}^5$ generowana przez wektory: $[-3, 1, 5, 3, 2]$, $[2, 3, 0, 1, 0]$, $[1, 2, 3, 2, 1]$, $[3, -5, -1, -3, -1]$, $[3, 0, 1, 0, 0]$.

Odp. Szukanym układem jest

$$\begin{cases} \begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & + & 7x_4 & & & = & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 9x_3 & + & & + & 28x_5 & = & 0 \end{array} \end{cases}.$$

Zadanie 10.27. Znajdź bazy obrazu i jądra przekształcenia liniowego $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ określonego wzorem:

$$f([x_1, x_2, x_3]) = [2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3].$$

Odp. Baza $Ker(f)$: $\{[1, 1, 1]\}$. Baza $Im(f)$: $\{[1, 0, 1], [0, 1, -1]\}$.