Wykład 11
Wektory i wartości własne

1 Wektory i wartości własne

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Każde przekształcenie liniowe $f\colon V \to V$ nazywamy **endomorfizmem liniowym** przestrzeni V. Powiemy, że $a \in K$ jest **wartością własną** endomorfizmu f przestrzeni V, jeżeli istnieje niezerowy wektor $\alpha \in V$ taki, że

$$f(\alpha) = a \circ \alpha.$$

Mówimy wówczas, że α jest **wektorem własnym** endomorfizmu f odpowiadającym wartości własnej a.

Twierdzenie 11.1. Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ będą różnymi wartościami własnymi endomorfizmu f przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Wówczas odpowiadające im wektory własne $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ są liniowo niezależne.

Dowód. Zastosujemy indukcję względem n. Dla $n = 1$ teza wynika stąd, że $\alpha_1 \neq \Theta$. Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, dla której teza zachodzi. Niech $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ będą parami różnymi wartościami własnymi endomorfizmu f i niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ będą odpowiadającymi im wektorami własnymi. Wówczas $f(\alpha_i) = a_i \circ \alpha_i$ dla $i = 1, \dots, n+1$. Weźmy dowolne $c_1, \dots, c_{n+1} \in K$ takie, że $c_1 \circ \alpha_1 + \ldots + c_n \circ \alpha_n + c_{n+1} \circ \alpha_{n+1} = \Theta$. Wtedy $\theta = f(c_1 \circ \alpha_1 + \ldots + c_{n+1} \circ \alpha_{n+1}) = c_1 \circ f(\alpha_1) + \ldots + c_{n+1} \circ f(\alpha_{n+1}) = (c_1 a_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (c_n a_n) \circ \alpha_n + (c_{n+1} a_{n+1}) \circ \alpha_{n+1}$ oraz $(a_{n+1} c_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (a_{n+1} c_n) \circ \alpha_n + (a_{n+1} c_{n+1}) \circ \alpha_{n+1} = \Theta$. Stąd po odjęciu stronami tych równości uzyskamy, że $c_1(a_{n+1} - a_1) \circ \alpha_1 + \ldots + c_n(a_{n+1} - a_n) \circ \alpha_n = \Theta$. Zatem z założenia indukcyjnego $c_i(a_{n+1} - a_i) = 0$, skąd $c_i = 0$ dla $i = 1, \dots, n$, gdyż $a_{n+1} \neq a_i$ dla $i = 1, \dots, n$. Zatem $c_{n+1} \circ \alpha_{n+1} = \Theta$, a stąd $c_{n+1} = 0$, bo $\alpha_{n+1} \neq \Theta$. Zatem $c_i = 0$ dla $i = 1, \dots, n, n+1$ i wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ są liniowo niezależne. $\square$

Niech dalej V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ będzie uporządkowaną bazą V oraz niech f będzie endomorfizmem przestrzeni V oraz niech $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ będzie macierzą f w tej bazie. **Wielomianem charakterystycznym** endomorfizmu f nazywamy wyznacznik

$$W_f(x) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - x & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Można udowodnić, że istnieją $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in K$ takie, że

$$W_f(x) = (-1)^n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0. \tag{2}$$

Ponadto $c_0 = \det(A)$ oraz $c_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})$. Można też wykazać, że współczynniki $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ wielomianu charakterystycznego nie zależą od wyboru bazy przestrzeni V.

Przykład 11.2. Znajdziemy wielomian charakterystyczny endomorfizmu f przestrzeni $\mathbb{R}^3$ danego wzorem analitycznym:

$$f([x_1, x_2, x_3]) = [5x_1 - 3x_2 + 2x_3, 6x_1 - 4x_2 + 4x_3, 4x_1 - 4x_2 + 5x_3].$$

Macierzą tego endomorfizmu w bazie kanonicznej jest

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Zatem wielomian charakterystyczny endomorfizmu f ma postać:

$$W_f(x) = \begin{vmatrix} 5-x & -3 & 2 \\ 6 & -4-x & 4 \\ 4 & -4 & 5-x \end{vmatrix} \overset{w_2 - w_1}{=} \begin{vmatrix} 5-x & -3 & 2 \\ 1+x & -1-x & 2 \\ 4 & -4 & 5-x \end{vmatrix}$$

$$\overset{k_1 + k_2}{=} \begin{vmatrix} 2-x & -3 & 2 \\ 0 & -1-x & 2 \\ 0 & -4 & 5-x \end{vmatrix} \overset{k_2 + k_3}{=} \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 2 \\ 0 & 1-x & 2 \\ 0 & 1-x & 5-x \end{vmatrix} \overset{w_3 - w_2}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 2-x & -1 & 2 \\ 0 & 1-x & 2 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (2-x) \cdot (1-x) \cdot (3-x).\square$$

Twierdzenie 11.3. Skalar a jest wartością własną endomorfizmu f skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nad ciałem K wtedy i tylko wtedy, gdy a jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego tego endomorfizmu.

Dowód. Załóżmy, że a jest wartością własną endomorfizmu f. Wtedy istnieje niezerowy wektor $\alpha \in V$ taki, że $f(\alpha) = a \circ \alpha$. Niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie uporządkowaną bazą przestrzeni V i niech $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ będzie macierzą endomorfizmu f w tej bazie. Istnieją $a_1, \ldots, a_n \in K$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$. Ponadto $f(\alpha) = b_1 \circ \alpha_1 + \ldots + b_n \circ \alpha_n$ dla pewnych $b_1, \ldots, b_n \in K$. Wtedy $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$. Ale $f(\alpha) = a \circ \alpha = (aa_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (aa_n) \circ \alpha_n$, więc $A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{bmatrix}$, czyli $A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a \circ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$. Zatem wektor $[a_1, \ldots, a_n]$ jest rozwiązaniem układu jednorodnego

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} (a_{11} - a)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22} - a)x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & (a_{nn} - a)x_n & = & 0 \end{array} \right. . \tag{3}$$

Ponadto $[a_1, \ldots, a_n] \neq [0, \ldots, 0]$, bo inaczej $\alpha = \theta$. Stąd z twierdzenia Cramera otrzymujemy, że $\det(A - aI_n) = 0$, czyli a jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego endomorfizmu f.

Na odwrót. Załóżmy, że a jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego endomorfizmu f. Wtedy $\det(A - a \cdot I_n) = 0$, skąd $r(A - a \cdot I_n) \neq n$. Istnieją zatem $a_1, \ldots, a_n \in K$ nie wszystkie równe 0 takie, że $a_1 \circ \begin{bmatrix} a_{11} - a \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \ldots + a_n \circ \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} - a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, a więc $[a_1, \ldots, a_n]$ jest niezerowym rozwiązaniem układu (3), skąd $(A - a \cdot I_n) \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, a więc $A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a \circ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$. Wtedy $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n \neq \Theta$ oraz $f(\alpha) = b_1 \circ \alpha_1 + \ldots + b_n \circ \alpha_n$, gdzie $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a \circ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$. Stąd $f(\alpha) = a \circ \alpha$, czyli a jest wartością własną endomorfizmu f i α jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej a. □

Przykład 11.4. Wielomian charakterystyczny endomorfizmu f z przykładu 11.2 jest równy $W_f(x) = (2 - x) \cdot (1 - x) \cdot (3 - x)$. Zatem z twierdzenia 11.3 wszystkimi wartościami własnymi endomorfizmu f są liczby: 1, 2 i 3. Z twierdzenia 11.1 wynika, że wektory własne odpowiadające tym wartościom własnym są liniowo niezależne, a ponieważ $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, więc te wektory tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i w tej bazie macierzą endomorfizmu f jest $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. □

Definicja 11.5. Powiemy, że ciało K jest **algebraicznie domknięte**, jeżeli każdy wielomian $f \in K[x]$ dodatniego stopnia posiada pierwiastek w ciele K.

Podstawowym przykładem ciała algebraicznie domkniętego jest ciao $\mathbb{C}$ liczb zespolonych. Z twierdzenia 11.3 wynika zatem od razu następujący

Wniosek 11.6. Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V wymiaru $n \in \mathbb{N}$ nad ciałem algebraicznie domkniętym K. Wówczas f posiada wartość własną.

Z zasadniczego twierdzenia algebry można wyprowadzić, że każdy wielomian nieparzystego stopnia o współczynnikach rzeczywistych posiada pierwiastek rzeczywisty. Zatem z twierdzenia 11.3 mamy

Wniosek 11.7. Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru nieparzystego nad ciałem liczb rzeczywistych. Wówczas każdy endomorfizm przestrzeni V posiada wartość własną.

Z dowodu twierdzenia 11.3 mamy od razu następujące

Twierdzenie 11.8. Niech $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ będzie macierzą endomorfizmu f przestrzeni liniowej V w bazie $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Niech a będzie wartością własną endomorfizmu f. Wówczas $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \dots + a_n \circ \alpha_n$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej a wtedy, i tylko wtedy, gdy $[a_1, \dots, a_n]$ jest niezerowym rozwiązaniem układu równań:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} (a_{11}-a)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22}-a)x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & (a_{nn}-a)x_n & = & 0 \end{array}\right. .$$

Przykład 11.9. Wyznaczymy wektory własne endomorfizmu f z przykładu 11.2. Z przykładu 11.4 wiemy, że wartościami własnymi tego endomorfizmu są jedynie liczby: 1, 2, 3. Stosując twierdzenie 11.8 wyznaczymy teraz kolejno wektory własne odpowiadające tym wartościom własnym.

1. Dla wartości własnej $a = 1$ mamy układ:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 4x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 6x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Rozwiązujemy ten układ metodą eliminacji Gaussa. Po zastosowaniu operacji: $\frac{1}{4} \cdot r_3$, $r_3 \leftrightarrow r_1$, a następnie $r_2 - 6 \cdot r_1$ i $r_3 - 4 \cdot r_1$, wykreśleniu trzeciego równania oraz wykonaniu operacji $r_1 + r_2$ uzyskamy układ:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & & - \;\; x_3 & = & 0 \\ & x_2 & - \;\; 2x_3 & = & 0 \end{array}\right. ,$$

więc $x_3 = t$, $x_1 = t$, $x_2 = 2t$, gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywistą. Ale nasze rozwiązania muszą być niezerowe, więc dodatkowo $t \neq 0$.
Zatem wektory własne odpowiadające wartości własnej $a = 1$ są postaci: $[t, 2t, t]$ dla $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Dla wartości własnej $a = 2$ mamy układ:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 6x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Rozwiązujemy go metodą eliminacji Gaussa. Po zastosowaniu operacji: $r_2 - 2 \cdot r_1$, $r_3 - r_1$, $r_1 \leftrightarrow r_3$, $r_1 - 3 \cdot r_2$, $(-1) \cdot r_2$, $r_1 - r_2$, $x_2 \leftrightarrow x_3$ uzyskamy układ:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & & - \;\; x_2 & = & 0 \\ & x_3 & & = & 0 \end{array}\right. ,$$

więc $x_2 = t$, $x_1 = t$, $x_3 = 0$, gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywistą. Ale nasze rozwiązania muszą być niezerowe, więc dodatkowo $t \neq 0$.
Zatem wektory własne odpowiadające wartości własnej $a = 2$ są postaci: $[t, t, 0]$ dla $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. Dla wartości własnej $a = 3$ mamy układ:

$$\begin{cases} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 6x_1 & - & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{cases}.$$

Rozwiązujemy go metodą eliminacji Gaussa. Po zastosowaniu operacji: $\frac{1}{2} \cdot r_3$, $x_1 \leftrightarrow x_3$, $r_1 \leftrightarrow r_3$, $r_2 - 4 \cdot r_1$, $r_3 - 2 \cdot r_1$, $(-1) \cdot r_2$, wykreśleniu trzeciego równania oraz wykonaniu operacji $r_1 + 2 \cdot r_2$ uzyskamy układ:

$$\begin{cases} x_3 & & & - & 2x_1 & = & 0 \\ & & x_2 & - & 2x_1 & = & 0 \end{cases},$$

więc $x_1 = t$, $x_3 = 2t$, $x_2 = 2t$, gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywistą. Ale nasze rozwiązania muszą być niezerowe, więc dodatkowo $t \neq 0$.
Zatem wektory własne odpowiadające wartości własnej $a = 3$ są postaci: $[t, 2t, 2t]$ dla $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.□

Definicja 11.10. Wektorem własnym macierzy $A \in M_n(K)$ nazywamy wektor własny przekształcenia liniowego $f\colon K^n \to K^n$, które w bazie kanonicznej ma macierz A, tzn. $f([x_1, \ldots, x_n]) = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Przykad 11.11. Pokażemy, że jeżeli ciało K nie jest algebraicznie domknięte, to pewna macierz kwadratowa nad K nie posiada wartości własnej. Najpierw zauważmy, że jeśli ciało K nie jest algebraicznie domknięte, to istnieją $n \in \mathbb{N}$ oraz $a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$ takie, że wielomian $w = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_1 x - a_0$ nie posiada pierwiastka w ciele K. Przez prostą indukcję można wykazać, że $(-1)^n \cdot w$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Zatem z twierdzenia 11.3, macierz A nie posiada wartości własnej. W szczególności macierz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ nie posiada rzeczywistej wartości własnej. □

Twierdzenie 11.12 (Cayleya-Hamiltona). Dla dowolnego ciaa K każda macierz $A \in M_n(K)$ jest pierwiastkiem swojego wielomianu charakterystycznego tzn. jeśli $\det(A - x \cdot I_n) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$, to $c_0 \cdot I_n + c_1 \cdot A + \ldots + c_n \cdot A^n = 0_n$.

2 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 11.13. Wyznaczyć wartości własne oraz odpowiadające im wektory własne podanych macierzy A nad ciałem $\mathbb{R}$:

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, d) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

Odp. a) Wartości własne: 1 i 5. Odpowiadające im wektory własne: $[1, -1]$ i $[3, 1]$. b) Brak rzeczywistych wartości własnych. c) Wartości własne: 1. Wektory własne: $[1, 0]$ i $[0, 1]$. d) Wartości własne: 4, -1, 1. Odpowiadające im wektory własne: $[1, 0, 0]$, $[2, -5, 0]$, $[-8, 3, 6]$. e) Wartości własne: 0 i 6. Odpowiadające im wektory własne: $[-2, 1, 0]$ i $[-3, 0, 1]$, $[1, 1, 1]$. f) Wartości własne: 0. Odpowiadające im wektory własne: $[-3, 1, 0, 0]$, $[0, 0, 1, 0]$, $[4, 0, 0, 1]$.

Zadanie 11.14. Wyznaczyć wartości własne oraz odpowiadające im wektory własne podanych macierzy A nad ciałem $\mathbb{R}$:

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix}$,

d) $A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, e) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Odp. a) Wartości własne: 1, 2, 3. Odpowiadające im wektory własne: $[1, 1, 1]$, $[1, 0, 1]$, $[1, 1, 0]$. b) Wartości własne: 3, 6. Odpowiadające im wektory własne: $[0, 1, -1]$, $[3, 4, 2]$. c) Wartości własne: 3, 6. Odpowiadające im wektory własne: $[-7, 5, -6]$ i $[6, -3, 3]$, $[1, 1, -3]$. d) Wartości własne: 0. Odpowiadające im wektory własne: $[1, 1, 0]$, $[0, 1, 2]$. e) Wartości własne: -3, -1, 1, 3. Odpowiadające im wektory własne: $[1, -3, 3, -1]$, $[1, -1, -1, 1]$, $[1, 1, -1, -1]$, $[1, -3, 3, -1]$.

Zadanie 11.15. Udowodnij twierdzenie Cayleya-Hamiltona dla $n = 2$ i $n = 3$.