Wykład 12
Przestrzeń afiniczna $\mathbb{E}^n$

1 Przestrzeń afiniczna

Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Oznaczmy przez $\mathbb{E}^n$ zbiór wszystkich ciągów n-elementowych $(a_1, \ldots, a_n)$ liczb rzeczywistych. Elementy zbioru $\mathbb{E}^n$ będziemy nazywali **punktami**, zaś elementy przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ będziemy nazywali **wektorami swobodnymi**. Punktowi $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{E}^n$ można jednoznacznie przyporządkować wektor swobodny $\alpha = [a_1, \ldots, a_n]$. Ponadto każdej parze punktów $a, b \in \mathbb{E}^n$ można przyporządkować wektor swobodny $\overrightarrow{ab}$ za pomocą wzoru:

$$\overrightarrow{ab} = \beta - \alpha. \tag{1}$$

Zatem dla $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, \ldots, b_n)$ mamy, że

$$\overrightarrow{ab} = [b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n]. \tag{2}$$

Stąd dla dowolnych $a, b \in \mathbb{E}^n$: $\overrightarrow{aa} = \Theta$ oraz $\overrightarrow{ba} = -\overrightarrow{ab}$. Łatwo też zauważyć, że wówczas zachodzą warunki:

(i) dla każdego punktu $p \in \mathbb{E}^n$ oraz dla każdego wektora $\alpha \in \mathbb{R}^n$ istnieje dokładnie jeden punkt $q \in \mathbb{E}^n$ taki, że

$$\overrightarrow{pq} = \alpha,$$

(ii) (równość trójkąta) dla dowolnych punktów $p, q, r \in \mathbb{E}^n$

$$\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}.$$

W ten sposób otrzymujemy tzw. **rzeczywistą n-wymiarową przestrzeń afiniczną współrzędnych**, którą będziemy oznaczali przez $\mathbb{E}^n$.

Punkt q w (i) nazywamy **sumą punktu p i wektora α** i oznaczamy przez $p + \alpha$. Zatem dla $p = (p_1, \ldots, p_n)$ oraz $\alpha = [a_1, \ldots, a_n]$

$$p + \alpha = (p_1 + a_1, \ldots, p_n + a_n). \tag{3}$$

Sumę punktu p i wektora $-\alpha$ przeciwnego do α będziemy oznaczali przez $p - \alpha$ i nazywali **różnicą punktu p i wektora α**. Zatem dla $p = (p_1, \ldots, p_n)$ oraz $\alpha = [a_1, \ldots, a_n]$

$$p - \alpha = (p_1 - a_1, \ldots, p_n - a_n). \tag{4}$$

Określone wyżej pojęcie sumy oraz różnicy punktu i wektora swobodnego posiadają nstępujące własności, dla dowolnych $p, q \in \mathbb{E}^n$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$:

1. Prawa skracania równości:
(a) Jeśli $p + \alpha = q + \alpha$, to $p = q$ oraz (b) Jeśli $p + \alpha = p + \beta$, to $\alpha = \beta$.

2. $(p + \alpha) + \beta = p + (\alpha + \beta)$.

Liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_s$ nazywamy **układem wag**, jeżeli $a_1 + \ldots + a_s = 1$.

Niech $p_1 = (p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}), \ldots, p_s = (p_{s1}, p_{s2}, \ldots, p_{sn})$ będą punktami przestrzeni $\mathbb{E}^n$ i niech liczby $a_1, \ldots, a_s$ będą układem wag. Wówczas **środkiem ciężkości** układu punktów $(p_1, \ldots, p_s)$ o wagach $(a_1, \ldots, a_s)$ nazywamy punkt

$$a_1 p_1 + \ldots + a_s p_s = (a_1 p_{11} + \ldots + a_s p_{s1}, \ldots, a_1 p_{1n} + \ldots + a_s p_{sn}). \tag{5}$$

Łatwo wykazać, że $a_1 p_1 + \ldots + a_s p_s$ jest dokładnie jednym punktem $p \in \mathbb{E}^n$ takim, że $a_1 \circ \overrightarrow{pp_1} + \ldots + a_s \circ \overrightarrow{pp_s} = \Theta$. Rzeczywiście, niech $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}^n$. Wtedy dla $i = 1, 2, \ldots, s$: $a_i \circ \overrightarrow{pp_i} = a_i \circ [p_{i1} - x_1, \ldots, p_{in} - x_n] = [a_i p_{i1} - a_i x_1, \ldots, a_i p_{in} - a_i x_n]$. Zatem dla $j = 1, 2, \ldots, n$, j-ta składowa wektora $a_1 \circ \overrightarrow{pp_1} + \ldots + a_s \circ \overrightarrow{pp_s}$ jest równa $\sum_{i=1}^{s} a_{ij} p_{ij} - \sum_{i=1}^{s} a_i x_j = \sum_{i=1}^{s} a_{ij} p_{ij} - x_j \cdot \sum_{i=1}^{s} a_i = \sum_{i=1}^{s} a_{ij} p_{ij} - x_j$, bo $a_1 + a_2 + \ldots + a_s = 1$. Wobec tego $a_1 \circ \overrightarrow{pp_1} + \ldots + a_s \circ \overrightarrow{pp_s} = \Theta$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $j = 1, 2, \ldots, n$: $0 = \sum_{i=1}^{s} a_{ij} p_{ij} - x_j$, tzn. gdy $x_j = \sum_{i=1}^{s} a_{ij} p_{ij}$.

Pojęcie środka ciężkości układu punktów $(p_1, \ldots, p_s)$ jest odpowiednikiem pojęcia kombinacji liniowej wektorów. Jest rzeczą wartą podkreślenia, że w odróżnieniu od sytuacji, z którą mieliśmy do czynienia z wektorami, tutaj suma $a_1 p_1 + \ldots + a_s p_s$ jest określona tylko wtedy, gdy $a_1 + \ldots + a_s = 1$. W szczególności więc na ogół w przestrzeni afinicznej nie jest określona ani suma dwóch punktów, ani iloczyn punktu przez skalar różny od 1.
Ze wzoru (5) natychmiast wynika, że punkt $p = (x_1, \ldots, x_n)$ jest środkiem ciężkości układu punktów $(p_1, \ldots, p_s)$ przy układzie wag $(a_1, \ldots, a_s)$, gdzie $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{in})$ dla $i = 1, 2, \ldots, s$ wtedy i tylko wtedy, gdy w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^{n+1}$ wektor $[1, x_1, \ldots, x_n]$ jest kombinacją liniową wektorów $[1, p_{11}, \ldots, p_{1n}], [1, p_{21}, \ldots, p_{2n}], \ldots, [p_{s1}, \ldots, p_{sn}]$ o współczynnikach $a_1, a_2, \ldots, a_s$. Stąd i z własności kombinacji liniowych wektorów uzyskujemy, że jeżeli dla $j = 1, \ldots, t$ punkt q_j jest środkiem ciężkości układu punktów $(p_1, \ldots, p_s)$ przy wagach $(a_{j1}, \ldots, a_{js})$ oraz $(b_1, \ldots, b_t)$ jest układem wag, to $(c_1, \ldots, c_s)$, gdzie $c_i = \sum_{j=1}^{t} b_j a_{ji}$ dla $i = 1, \ldots, s$, jest układem wag i punkt $c_1 p_1 + \ldots + c_s p_s = b_1 q_1 + \ldots + b_t q_t$. Można więc powiedzieć, że wyznaczanie środka ciężkości układu punktów jest operacją łączną. Informację tę można wykorzystać do udowodnienia wielu twierdzeń z geometrii np. z planimetrii.

Zauważmy jeszcze, że dla dowolnego układu wag $(a_1, \ldots, a_s)$ i dla dowolnych $p \in \mathbb{E}^n$ oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R}^n$ zachodzi wzór:

$$a_1(p + \alpha_1) + a_2(p + \alpha_2) + \ldots + a_s(p + \alpha_s) = p + (a_1 \circ \alpha_1 + a_2 \circ \alpha_2 + \ldots + a_s \circ \alpha_s). \tag{6}$$

Przykład 12.1. Środkiem ciężkości układu (p_1, p_2, p_3) punktów $p_1 = (0, 1, 0)$, $p_2 = (1, 1, 1)$, $p_3 = (2, 0, 1)$ przestrzeni $\mathbb{E}^3$ o wagach $(2, -2, 1)$ jest punkt $2p_1 + (-2)p_2 + 1p_3 = (0 - 2 + 2, 2 - 2 + 0, 0 - 2 + 1) = (0, 0, -1)$.$\square$

Przykład 12.2 Niech $(p_1, \dots, p_s)$ będzie układem punktów materialnych w przestrzeni $\mathbb{E}^n$ (gdzie $n = 1, 2, 3$) o wagach odpowiedni $w_1, \dots, w_s$. Wówczas z kursu fizyki wiadomo, że środkiem ciężkości układu $(p_1, \dots, p_s)$ jest punkt $\frac{w_1}{w} p_1 + \ldots + \frac{w_s}{w} p_s$, gdzie $w = w_1 + \ldots + w_s$. $\square$

2 Podprzestrzenie afiniczne

Niepusty podzbiór H przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n$ nazywamy **podprzestrzenią afiniczną**, gdy dla każdych dwóch punktów $p, q \in H$ i dla każdego $a \in \mathbb{R}$ środek ciężkości $ap + (1 - a)q$ należy do H.

Można wykazać, że jeżeli H jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni $\mathbb{E}^n$, to każdy środek ciężkości dowolnego układu punktów należących do H należy do H.

Przykład 12.3. Niech $p \in \mathbb{E}^n$. Wówczas zbiór $\{p\}$ złożony tylko z jednego punktu jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni $\mathbb{E}^n$. Rzeczywiście, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, więc dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ mamy, że $ap + (1 - a)p = (ap_1 + (1 - a)p_1, ap_2 + (1 - a)p_2, \dots, ap_n + (1 - a)p_n) = (p_1, p_2, \dots, p_n) = p$. $\square$

Przykład 12.4. Niech $p \in \mathbb{E}^n$ i $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{\Theta\}$. Wtedy na mocy wzoru (6) zbiór $\{p + t \circ \alpha : t \in \mathbb{R}\}$ jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni $\mathbb{E}^n$. Nazywamy ją **prostą afiniczną** w postaci parametrycznej $p + t \circ \alpha$.$\square$

Przykład 12.5. Niech $p \in \mathbb{E}^n$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ będą wektorami liniowo niezależnymi. Wtedy na mocy wzoru (6) zbiór $\{p + t \circ \alpha + s \circ \beta : \ t, s \in \mathbb{R}\}$ jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni $\mathbb{E}^n$. Nazywamy ją **płaszczyzną afiniczną** w postaci parametrycznej $p + t \circ \alpha + s \circ \beta$.$\square$

Przykład 12.6. Rozważmy układ m-równań liniowych z n-niewiadomymi nad ciałem $\mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. . \tag{7}$$

Rozwiązania tego układu można w naturalny sposób utożsamiać z punktami przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n$. Jeżeli układ (7) posiada rozwiązanie, to zbiór jego wszystkich rozwiązań jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni $\mathbb{E}^n$. Rzeczywiście, niech $a \in \mathbb{R}$ i niech $p = (p_1, \dots, p_n)$ oraz $q = (q_1, \dots, q_n)$ będą rozwiązaniami tego układu. Wtedy
$ap + (1-a)q = (ap_1 + (1-a)q_1, \dots, ap_n + (1-a)q_n)$ oraz dla $i = 1, \dots, m$: $a_{i1}(ap_1 + (1-a)q_1) + \ldots + a_{in}(ap_n + (1-a)q_n) = a(a_{i1}p_1 + \ldots + a_{in}p_n) + (1-a)(a_{i1}q_1 + \ldots + a_{in}q_n) = ab_i + (1-a)b_i = b_i$, czyli $ap + (1 - a)q$ też jest rozwiązaniem układu (7). $\square$

3 Własności podprzestrzeni afinicznych

Twierdzenie 12.7. Niech H będzie podzbiorem przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n$ i niech $p \in H$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(a) H jest podprzestrzenią afiniczną;

(b) istnieje taka podprzestrzeń liniowa V przestrzeni $\mathbb{R}^n$, że $H = p+V$, gdzie $p+V = \{p+\alpha : \alpha \in V\}$.

Dowód. $(a) \Rightarrow (b)$. Niech $V = \{\alpha \in \mathbb{R}^n : p+\alpha \in H\}$. Wtedy $\Theta \in V$, bo $p = p+\Theta$. Weźmy dowolne $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ i dowolne $a \in \mathbb{R}$. Wtedy $p+\alpha_1, p+\alpha_2 \in H$, więc $a(p+\alpha_1)+(1-a)(p+\Theta) \in H$, skąd na mocy wzoru (6), $p + a \circ \alpha_1 \in H$, a zatem $a \circ \alpha_1 \in$. Ponadto $(1, 1, -1)$ jest układem wag, więc $1(p+\alpha_1) + 1(p+\alpha_2) + (-1)(p+\Theta) \in H$ i na mocy wzoru (6), $p + (\alpha_1 + \alpha_2) \in H$, skąd $\alpha_1 + \alpha_2 \in V$. Zatem V jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$. Wprost z określenia V mamy, że $p+V \subseteq H$. Ponadto dla każdego $q \in H$ mamy, że $q = p + \overrightarrow{pq}$, więc $H \subseteq p+V$ i ostatecznie $H = p+V$.

$(b) \Rightarrow (a)$. Dla dowolnych $q_1, q_2 \in H$ i dowolnego $a \in \mathbb{R}$ istnieją wektory $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ takie, że $q_1 = p+\alpha_1$ i $q_2 = p+\alpha_2$. Zatem ze wzoru (6), $aq_1 + (1-a)q_2 = p + (a \circ \alpha_1 + (1-a) \circ \alpha_2) \in H$, bo $a \circ \alpha_1 + (1-a) \circ \alpha_2 \in V$, gdyż V jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$. $\square$

Uwaga 12.8. Podprzestrzeń liniowa V z (b) jest wyznaczona jednoznacznie przez podprzestrzeń afiniczną H. Oznaczamy ją przez $S(H)$. Łatwo wykazać, że dla każdego $p \in H$ jest $S(H) = \{\overrightarrow{pq} : q \in H\}$. **Wymiarem** podprzestrzeni afinicznej H nazywamy wymiar podprzestrzeni liniowej $S(H)$. Zatem prosta afiniczna jest podprzestrzenią afiniczną wymiaru 1, zaś płaszczyzna afiniczna jest podprzestrzenią afiniczną wymiaru 2.

Przykład 12.9. Niech H będzie niepustym zbiorem rozwiązań układu równań nad ciałem $\mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. . \tag{8}$$

Wtedy $S(H)$ jest zbiorem wszystkich rozwiązań układu jednorodnego

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right. . \tag{9}$$

W szczególności, jeżeli $p = (p_1, \dots, p_n)$ jest jakimkolwiek rozwiązaniem układu (1), to każde rozwiązanie układu (1) ma postać: $p + \alpha$, gdzie $\alpha = [a_1, \dots, a_n]$ jest rozwiązaniem układu jednorodnego (2). $\square$

Twierdzenie 12.10. Każda podprzestrzeń afiniczna H wymiaru k przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n$ jest zbiorem rozwiązań układu $n-k$, ale nie mniejszej liczby równań liniowych z n-niewiadomymi nad ciałem $\mathbb{R}$.

Przykład 12.11. Znajdziemy układ równań, którego rozwiązania tworzą prostą o postaci parametrycznej $(1, 1, 1) + t \circ [1, 2, 3]$. W tym celu znajdujemy najpierw układ jednorodny, którego przestrzeń rozwiązań jest generowana przez wektor $[1, 2, 3]$. Uzupełniamy ten wektor

do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$ wektorami $[0,1,0]$ i $[0,0,1]$ z bazy kanonicznej. Następnie wyznaczamy przekształcenie liniowe $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ takie, że $f([1,2,3]) = [0,0]$, $f([0,1,0]) = [1,0]$ i $f([0,0,1]) = [0,1]$. Ale
$f([1,0,0]) = f([1,2,3]) - 2 \circ f([0,1,0]) - 3 \circ f([0,0,1]) = [0,0] - [2,0] - [0,3] = [-2,-3]$, więc $f([x_1,x_2,x_3]) = x_1 \circ f([1,0,0]) + x_2 \circ f([0,1,0]) + x_3 \circ f([0,0,1]) = [-2x_1, -3x_1] + [x_2, 0] + [0, x_3] = [-2x_1 + x_2, -3x_1 + x_3]$. Ponieważ szukaną podprzestrzenią liniową jest jądro f, więc układ jednorodny ma postać:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Aby znaleźć układ niejednorodny należy tylko wyznaczyć wyrazy wolne. W tym celu w równaniach układu podstawiamy $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ i uzyskujemy szukany układ:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -1 \\ -3x_1 + x_3 = -2 \end{cases}. \square$$

Twierdzenie 12.12. Część wspólna dowolnej niepustej rodziny podprzestrzeni afinicznych przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n$ jest albo zbiorem pustym albo podprzestrzenią afiniczną.

Podprzestrzenie przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^n$ wymiaru $n-1$ nazywamy **hiperpłaszczyznami liniowymi**; są one dokładnie zbiorem rozwiązań równania postaci:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0, \tag{10}$$

w którym co najmniej jedna z liczb a_i jest różna od 0.

Podprzestrzenie afiniczne przestrzeni $\mathbb{E}^n$ wymiaru $n-1$ nazywamy **hiperpłaszczyznami afinicznymi**: są one dokładnie zbiorem rozwiązań równania postaci:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{11}$$

w którym co najmniej jedna z liczb a_i jest różna od 0.

Z twierdzenia 12.10 mamy zatem natychmiast następujące

Twierdzenie 12.13. Każda podprzestrzeń afiniczna wymiaru k przestrzeni $\mathbb{E}^n$ jest częścią wspólną $n-k$, ale nie mniejszej liczby hiperpłaszczyzn afinicznych.

Twierdzenie 12.14. Niech $(p_1, \ldots, p_s)$ będzie układem punktów przestrzeni $\mathbb{E}^n$. Wówczas zbiór $af(p_1, \ldots, p_s)$ wszystkich środków ciężkości tego układu jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni $\mathbb{E}^n$. Podprzestrzeń ta jest najmniejszą podprzestrzenią afiniczną zawierającą wszystkie punkty $p_1, \ldots, p_s$. Ponadto $S(af(p_1, \ldots, p_s)) = L(\overrightarrow{p_1p_2}, \overrightarrow{p_1p_3}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_s}) = V$ oraz $af(p_1, \ldots, p_s) = p_1 + V$.

Przykład 12.15. Dla dowolnych dwóch różnych punktów $p_1 = (x_1, \ldots, x_n)$, $p_2 = (y_1, \ldots, y_n)$ przestrzeni $\mathbb{E}^n$ mamy, że $af(p_1, p_2)$ jest prostą afiniczną przechodzącą przez te punkty. Jej przedstawienie parametryczne ma postać:

$$(x_1, \ldots, x_n) + t \circ [y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n].\square \tag{12}$$

Twierdzenie 12.16. Niech $p = (x_1, \ldots, x_n)$, $p_1 = (x_{11}, \ldots, x_{1n})$,..., $p_s = (x_{s1}, \ldots, x_{sn})$ będą punktami przestrzeni $\mathbb{E}^n$. Wówczas $p \in af(p_1, \ldots, p_s)$ wtedy, i tylko wtedy, gdy $[1, x_1, \ldots, x_n] \in L([1, p_{11}, \ldots, p_{1n}], \ldots, [1, p_{s1}, \ldots, p_{sn}])$.

Przykład 12.17. Sprawdzimy, czy punkt $(0, 1, 1)$ należy do podprzestrzeni afinicznej $H = af((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ przestrzeni $\mathbb{E}^3$. Mamy, że $V = L([1, 1, 0, 0], [1, 0, 1, 0], [1, 0, 0, 1]) = L([1, 1, 0, 0], [0, -1, 1, 0], [0, -1, 0, 1]) = L([1, 1, 0, 0], [0, -1, 1, 0], [0, 0, -1, 1])$. Ponadto wektory $[1, 1, 0, 0]$, $[0, -1, 1, 0]$, $[0, 0, -1, 1]$ są liniowo niezależne, więc z twierdzenia 8.16, $[1, 0, 1, 1] \in V$ wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $[1, 0, 1, 1]$, $[1, 1, 0, 0]$, $[0, -1, 1, 0]$, $[0, 0, -1, 1]$ są liniowo zależne. Ale wykonując operacje elementarne na tych wektorach możemy się łatwo przekonać, że te wektory nie są liniowo zależne. Zatem z twierdzenia 12.16 mamy, że punkt $(0, 1, 1)$ nie należy do H.$\square$

4 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 12.18. Znajdź środek ciężkości układu (p_1, p_2, p_3) punktów $p_1 = (1, -1, 2)$, $p_2 = (-1, 1, 3)$, $p_3 = (2, 5, 1)$ przestrzeni $\mathbb{E}^3$ o wagach $(3, -4, 2)$.
Odp. $(11, 3, -4)$.

Zadanie 12.19. Udowodnij, że w przestrzeni $\mathbb{E}^3$:
$(x_1, x_2, x_3) \in af((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)) \Leftrightarrow x_3 = 1$.

Zadanie 12.20. W przestrzeni $\mathbb{E}^3$ znajdź równanie liniowe hiperpłaszczyzny afinicznej $af((1, -1, 2), (-1, 1, 3), (2, 5, 1))$.
Odp. $8x_1 + x_2 + 14x_3 = 35$.

Zadanie 12.21. Uzasadnij, że w przestrzeni $\mathbb{E}^3$:
$af((1, 1, 1), (0, 1, 2)) \cap af((1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 1, 2)) = \{(1, 1, 1)\}$.

Zadanie 12.22. Uzasadnij, że w przestrzeni $\mathbb{E}^3$ punkt $(0, 0, 0)$ jest środkiem ciężkości układu punktów $\{(1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
Odp. Układ wag: $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

Zadanie 12.23. W przestrzeni $\mathbb{E}^5$ znajdź punkt wspólny prostych afinicznych $af((2, 1, 1, 3, -3), (2, 3, 1, 1, -1))$ i $af((1, 1, 2, 1, 2), (1, 2, 1, 0, 1))$.

Odp. $(-2, -5, -1, 1, -1)$.

Zadanie 12.24. Znajdź układ równań liniowych, którego przestrzenią rozwiązań jest prosta $(1, -1, 3) + t \circ [0, 5, 7]$.

Odp. Równania układu: $x_1 = 1$, $5x_3 - 7x_2 = 22$.

Zadanie 12.25. Znajdź układ równań liniowych, którego przestrzenią rozwiązań jest $af((1, 2, 3, 4), (2, -1, 3, 1), (6, -4, 2, 2))$.

Odp. Równania układu: $3x_1 + x_2 + 9x_3 = 32$, $12x_1 + 13x_2 - 9x_4 = 2$.