Wykład 14
Układy nierówności liniowych

1 Układy nierówności liniowych

Mówimy, że nierówność $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \geq b$ jest **kombinacją liniową o nieujemnych współczynnikach nierówności układu**

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \geq & b_m \end{array}\right. , \tag{1}$$

gdy istnieją nieujemne liczby rzeczywiste $d_1, \ldots, d_m$ takie, że

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = d_1(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n) + \ldots + d_m(a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n)$$

oraz

$$b = d_1b_1 + \ldots + d_mb_m,$$

tj.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}d_1 & + & a_{21}d_2 & + & \ldots & + & a_{m1}d_m & = & c_1 \\ a_{12}d_1 & + & a_{22}d_2 & + & \ldots & + & a_{m2}d_m & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}d_1 & + & a_{2n}d_2 & + & \ldots & + & a_{mn}d_m & = & c_n \end{array}\right.$$

i

$$b_1d_1 + b_2d_2 + \ldots + b_md_m = b.$$

Z definicji tej wynika od razu, że jeżeli $(a_1, \ldots, a_n)$ jest rozwiązaniem układu (1), to jest również rozwiązaniem każdej nierówności $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \geq b$, która jest kombinacją liniową o nieujemnych współczynnikach nierówności układu (1) i ogólniej: jest rozwiązaniem każdej takiej nierówności $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \geq b'$, że nierówność $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \geq b$ jest kombinacją liniową o nieujemnych współczynnikach nierówności układu (1), dla pewnej liczby rzeczywistej $b \geq b'$.

Przykład 14.1. Nierówność $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \geq 4$ jest kombinacją liniową o współczynnikach 4, 12, 4 nierówności układu

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & \geq & 1 \\ -2x_1 & + & x_2 & \geq & -1 \\ 2x_1 & - & 6x_2 & \geq & 3 \end{array}\right. . \tag{2}$$

Wynika stąd od razu, że układ (2) nie posiada rozwiązania. □

Twierdzenie 14.2. Niech

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \geq & b_m \end{array}\right. \tag{3}$$

będzie rozwiązalnym (tzn. posiadającym rozwiązanie) układem nierówności i niech

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \geq b' \tag{4}$$

będzie dowolną nierównością. Każde rozwiązanie układu (3) jest rozwiązaniem nierówności (4) wtedy, i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba rzeczywista $b \geq b'$, że nierówność

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \geq b \tag{5}$$

jest kombinacją liniową o nieujemnych współczynnikach nierówności układu (3).

Przykład 14.3. Korzystając z twierdzenia 14.2 uzasadnimy, że następujący układ równań

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 7x_3 & = & 3 \end{array}\right. \tag{6}$$

nie posiada rozwiązania nieujemnego. W tym celu załóżmy, że nasz układ posiada rozwiązanie nieujemne (a_1, a_2, a_3) (tzn. takie, że $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$ i $a_3 \geq 0$). Ponieważ układ nierówności

$$\left\{\begin{array}{ccccc} y_1 & + & y_2 & \geq & 0 \\ 3y_1 & - & 4y_2 & \geq & 0 \\ -5y_1 & - & 7y_2 & \geq & 0 \end{array}\right. \tag{7}$$

jest rozwiązalny (np. $y_1 = y_2 = y_3 = 0$) oraz nierówność

$$2y_1 + 3y_2 \geq 0 \tag{8}$$

jest kombinacją liniową nierówności układu (7) o współczynnikach nieujemnych a_1, a_2, a_3, więc na mocy twierdzenia 14.2, każde rozwiąza-nie układu (7) jest rozwiązaniem nierówności (8). Ale $(1, -1)$ jest rozwiązaniem układu (7) i nie jest rozwiązaniem nierówności (8), więc mamy sprzeczność. Przypuszczenie, że układ (6) posiada rozwiązanie nieujemne doprowadziło nas zatem do sprzeczności. Stąd układ (6) nie posiada rozwiązania nieujemnego.$\square$

2 Sprzeczne układy nierówności liniowych

Układ nierówności z niewiadomymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy **sprzecznym**, gdy nierówność $0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n \geq 1$ jest kombinacją liniową o nieujemnych współczynnikach nierówności tego układu.

Twierdzenie 14.4. Układ nierówności liniowych jest rozwiązalny wtedy, i tylko wtedy, gdy nie jest sprzeczny.

Przykład 14.5. Korzystając z twierdzenia 14.4 udowodnimy, że następujący układ nierówności

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \geq & -1 \\ -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq & -1 \end{array}\right. \tag{9}$$

nie ma rozwiązania. W tym celu wystarczy wykazać, że układ równań

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} y_1 & + & y_2 & - & y_3 & - & y_4 & = & 0 \\ y_1 & - & y_2 & + & y_3 & - & y_4 & = & 0 \\ y_1 & + & y_2 & - & 2y_3 & + & y_4 & = & 0 \\ 2y_1 & + & y_2 & - & y_3 & - & y_4 & = & 1 \end{array}\right. \tag{10}$$

posiada rozwiązanie nieujemne. Układ (10) rozwiązujemy metodą eliminacji Gaussa. Po zastosowaniu operacji elementarnych: $r_2 - r_1$, $r_3 - r_1$, $r_4 - 2 \cdot r_1$, $(-\frac{1}{2}) \cdot r_2$, $(-1) \cdot r_3$ uzyskamy układ równoważny postaci

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} y_1 & + & y_2 & - & y_3 & - & y_4 & = & 0 \\ & & y_2 & - & y_3 & & & = & 0 \\ & & & & y_3 & - & 2y_4 & = & 0 \\ & - & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 1 \end{array}\right. . \tag{11}$$

Następnie wykonujemy kolejno operacje: $r_4 + r_2$, $r_1 + r_4$, $r_3 + 2 \cdot r_4$, $r_1 + r_3$, $r_2 + r_3$, $r_1 - r_2$ i uzyskujemy, że $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 2$, $y_4 = 1$. Zatem układ (2) posiada rozwiązanie nieujemne, więc z twierdzenia 14.4 układ nierówności (1) nie posiada rozwiązania.$\square$

Podzbiór A przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n$ nazywamy **ograniczonym**, gdy podzbiór A jest zawarty w pewnym równoległościanie. Można wykazać, że podzbiór A przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka dodatnia liczba rzeczywista a, że dla każdego punktu $(x_1, \ldots, x_n) \in A$ mamy, że $|x_1| \leq a$,...,$|x_n| \leq a$.

Twierdzenie 14.6. Zbiór wszystkich rozwiązań układu nierówności

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \geq & b_m \end{array}\right. , \tag{12}$$

jest ograniczony wtedy, i tylko wtedy, gdy układ nierówności

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \geq & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \geq & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \geq & 0 \end{array}\right. \tag{13}$$

nie ma rozwiązania różnego od rozwiązania $(0, \dots, 0)$.

Przykład 14.7. W oparciu o twierdzenia 14.4 i 14.6 zbadamy, czy następujący układ nierówności:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \geq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \geq -1 \\ 3x_1 - 5x_2 \geq 7 \end{cases}$$

ma rozwiązanie i czy zbiór wszystkich jego rozwiązań jest ograniczony. Gdyby nasz układ nierówności był sprzeczny, to zgodnie z twierdzeniem 14.4 istniałyby nieujemne liczby rzeczywiste y_1, y_2, y_3 takie, że

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + 3y_3 = 0 \\ -3y_1 + 2y_2 - 5y_3 = 0 \\ 2y_1 - y_2 + 7y_3 = 1 \end{cases}.$$

Ale jedynym rozwiązaniem tego układu równań jest $y_1 = -\frac{1}{4}$, $y_2 = y_3 = \frac{1}{4}$, więc mamy sprzeczność. Wobec tego nasz układ nierówności nie jest sprzeczny, a więc ma rozwiązanie. Rozważmy teraz układ nierówności:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \geq 0 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 0 \\ 3x_1 - 5x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Łatwo zauważyć, że $x_1 = 5$, $x_2 = 3$ jest jego niezerowym rozwiązaniem. Wobec tego na mocy twierdzenia 14.6 zbiór rozwiązań układu nierówności

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \geq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \geq -1 \\ 3x_1 - 5x_2 \geq 7 \end{cases}$$

jest nieograniczony.

3 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 14.8. W oparciu o twierdzenia 14.4 i 14.6 zbadaj, czy następujący układ nierówności:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \geq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \geq -1 \\ 3x_1 - 5x_2 \geq 7 \end{cases}$$

ma rozwiązanie i czy zbiór wszystkich jego rozwiązań jest ograniczony.

Odp. Układ ma rozwiązanie. Zbiór wszystkich rozwiązań nie jest ograniczony.

Zadanie 14.9. W oparciu o twierdzenie 14.2 zbadaj, czy następujący układ równań:

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -1 \end{cases}$$

posiada rozwiązanie nieujemne.

Odp. Układ nie posiada rozwiązania nieujemnego.

Zadanie 14.10. Rozwiąż graficznie układ nierówności:

$$\begin{cases} 3x_1 & - & 2x_2 & \geq & -2 \\ 3x_1 & + & x_2 & \geq & 1 \\ -3x_1 & + & x_2 & \geq & -2 \end{cases}.$$

Odp. Rozwiązaniem jest trójkąt o wierzchołkach $(0,1)$, $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, $(2,4)$.

Zadanie 14.11. Wyznacz wszystkie nieujemne rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 8 \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 7x_3 & = & 7 \end{cases}$$

Odp. $x_1 = \frac{21-41t}{2}$, $x_2 = t$, $x_3 = \frac{1-7t}{2}$, gdzie $t \in \langle 0, \frac{1}{7} \rangle$.

Zadanie 14.12. W oparciu o twierdzenie 14.4 zbadaj, czy następujący układ nierówności:

$$\begin{cases} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \geq & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & \geq & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & \geq & -1 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & - & x_4 & \geq & 1 \\ -4x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & - & 2x_4 & \geq & 1 \end{cases}$$

ma rozwiązanie.

Odp. Układ nie posiada rozwiązania.