Wykład 15
Elementy geometrii analitycznej wielowymiarowej

1 Odległość punktów w przestrzeni $\mathbb{E}^n$

Odległością dwóch punktów $p = (x_1, \ldots, x_n)$, $q = (y_1, \ldots, y_n)$ przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n$ nazywamy nieujemną liczbę rzeczywistą $d(p, q)$ daną wzorem:

$$d(p,q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}. \tag{1}$$

Można wykazać, że otrzymana w ten sposób funkcja $d : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:

1. $d(p, q) = d(q, p)$ dla dowolnych $p, q \in \mathbb{E}^n$,
2. $d(p, q) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p = q$ dla dowolnych $p, q \in \mathbb{E}^n$,
3. $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ dla dowolnych $p, q, r \in \mathbb{E}^n$.

Ostatni z tych trzech warunków nazywa się **nierównością trójkąta**.

Twierdzenie 15.1. Dla dowolnych punktów $p, q \in \mathbb{E}^n$ odcinek $conv(p, q)$ składa się z tych, i tylko tych, punktów $x \in \mathbb{E}^n$, że $d(p, q) = d(p, x) + d(x, q)$.

Długością wektora $\alpha = [a_1, \ldots, a_n] \in \mathbb{R}^n$ nazywamy nieujemną liczbę rzeczywistą $|\alpha|$ daną wzorem:

$$|\alpha| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}. \tag{2}$$

Jeżeli $|\alpha| = 1$, wektor α nazywamy **unormowanym**.

Mówimy, że wektory swobodne α, $\beta \in \mathbb{R}^n$ są **równoległe i mają jednakowy zwrot**, jeśli

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|. \tag{3}$$

Mówimy, że wektory swobodne α, $\beta \in \mathbb{R}^n$ są **równoległe i mają zwroty przeciwne**, jeżeli

$$|\alpha - \beta| = |\alpha| + |\beta|. \tag{4}$$

W obu przypadkach mówimy, że wektory α i β są **równoległe**, czyli **mają ten sam kierunek**.

Twierdzenie 15.2. Wektory α, $\beta \in \mathbb{R}^n$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby rzeczywiste r, s takie, że $r \neq 0$ lub $s \neq 0$ oraz

$$r \circ \alpha = s \circ \beta. \tag{5}$$

Wektory α i β mają zwrot jednakowy lub zwroty przeciwne, zależnie od tego czy $rs \geq 0$, czy $rs \leq 0$.

2 Proste w przestrzeniach $\mathbb{E}^n$

Twierdzenie 15.3. Przez każde dwa różne punkty p i q przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n$ przechodzi dokładnie jedna prosta. Jest ona identyczna ze zbiorem L punktów postaci

$$L(t) = (1-t)p + tq, \tag{6}$$

gdzie parametr t przebiega wszystkie wartości rzeczywiste.

Zależność (6) nazywa się **równaniem parametrycznym** prostej przechodzącej przez punkty p i q. Niech $p = (a_1, \ldots, a_n)$ i $q = (b_1, \ldots, b_n)$. Oznaczmy $\alpha = [b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n]$. Wówczas równanie prostej L możemy zapisać w **postaci wektorowej**:

$$L(t) = p + t \circ \alpha. \tag{7}$$

Niech przy oznaczeniach wzoru (6) $\beta = \frac{1}{|\alpha|} \circ \alpha$. Wtedy wektor β jest unormowany oraz $L(t) = p + t \circ \beta$ też jest równaniem wektorowym prostej L. **Kierunkiem prostej** L nazywamy w tej sytuacji kierunek wektora β. Proste o jednakowym kierunku nazywamy **równoległymi**.

Twierdzenie 15.4. Proste $L_1(t) = p_1 + t \circ \beta_1$ i $L_2(t) = p_2 + t \circ \beta_2$, gdzie wektory β_1 i β_2 są unormowane, są równoległe wtedy, i tylko wtedy, gdy $\beta_1 = \beta_2$ lub $\beta_1 = -\beta_2$.

3 Iloczyn skalarny wektorów

Iloczynem skalarnym wektorów $\alpha = [a_1, \ldots, a_n]$, $\beta = [b_1, \ldots, b_n] \in \mathbb{R}^n$ nazywamy liczbę rzeczywistą $\alpha \cdot \beta$ określoną wzorem:

$$\alpha \cdot \beta = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n. \tag{8}$$

Twierdzenie 15.5. Dla dowolnych wektorów $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n$ oraz dla dowolnego skalara $a \in \mathbb{R}$:
(i) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$,
(ii) $a \circ (\alpha \cdot \beta) = (a \circ \alpha) \cdot \beta = \alpha \cdot (a \circ \beta)$,
(iii) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$,
(iv) $\alpha \cdot \alpha \geq 0$,
(v) $\alpha \cdot \alpha = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \Theta$.

Oznaczmy iloczyn skalarny $\alpha \cdot \alpha$ przez α^2. Wówczas zachodzi następujące

Twierdzenie 15.6 (nierówność Schwarza-Cauchy'ego). Dla dowolnych wektorów α, $\beta \in \mathbb{R}^n$:

$$(\alpha \cdot \beta)^2 \leq \alpha^2 \cdot \beta^2, \tag{9}$$

przy czym równość ma miejsce jedynie wówczas, gdy wektory α i β są równoległe.

Niech α i β będą niezerowymi wektorami przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Miarą kąta między wektorami α i β nazywamy liczbę $\phi \in \langle 0, \pi \rangle$ spełniającą równość:

$$\cos \phi = \frac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha||\beta|}. \tag{10}$$

Przyjmujemy, że miara kąta między wektorem zerowym a innym wektorem jest dowolną liczbą z przedziału $\langle 0, \pi \rangle$. Miarę kąta między wektorami α i β oznaczamy przez $\angle(\alpha, \beta)$. Zachodzi więc wzór

$$\alpha \cdot \beta = |\alpha||\beta| \cos \angle(\alpha, \beta). \tag{11}$$

Powyższa definicja jest poprawna, gdyż z nierówności Schwarza-Cauchy' ego wynika, że

$$-1 \leq \tfrac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha||\beta|} \leq 1.$$

Ponadto definicja ta pokrywa się z określeniem miary kąta między wektorami na płaszczyźnie i w przestrzeni.

Powiemy, że wektory α i β należące do przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są **prostopadłe**, jeżeli spełniają warunek:

$$\alpha \cdot \beta = 0. \tag{12}$$

4 Wektory równoległe (prostopadłe) do hiperpłaszczyzny

Niech H będzie dowolną hiperpłaszczyzną w przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n$. Wówczas istnieją liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_n$ nie wszystkie równe 0 i liczba rzeczywista b takie, że

$$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}^n : \ a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b\}. \tag{13}$$

Powiemy, że wektor $\alpha \in \mathbb{R}^n$ jest **równoległy** do hiperpłaszczyzny H, jeżeli $\alpha \in S(H)$, tzn. istnieją dwa różne punkty $p, q \in H$ takie, że wektory α i $\overrightarrow{pq}$ są równoległe.

Powiemy, że wektor $\alpha \in \mathbb{R}^n$ jest **prostopadły** do H, jeżeli α jest wektorem prostopadłym do każdego wektora równoległego do H.

Twierdzenie 15.7. Aby wektor $\alpha \in \mathbb{R}^n$ był równoległy do hiperpłaszczyzny H danej wzorem (1) potrzeba i wystarcza, żeby był on prostopadły do wektora $[a_1, \ldots, a_n]$.

Twierdzenie 15.8. Wektor $\alpha \in \mathbb{R}^n$ jest prostopadły do hiperpłaszczyzny H danej wzorem (1) wtedy, i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista t taka, że $\alpha = t \circ [a_1, \ldots, a_n]$.

Twierdzenie 15.9. Jeżeli wektor $\alpha = [a_1, \ldots, a_n]$ jest różny od Θ, to przez każdy punkt $p = (p_1, \ldots, p_n)$ przechodzi dokładnie jedna hiperpłaszczyzna prostopadła do α. Równanie jej ma postać:

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = a_1p_1 + \ldots + a_np_n. \tag{14}$$

Niech $p = (p_1, \ldots, p_n)$ będzie dowolnym punktem przestrzeni $\mathbb{E}^n$,
a H hiperpłaszczyzną o równaniu (2). Punkt p' przecięcia prostej L przechodzącej przez p i prostopadłej do H nazywamy **rzutem prostopadłym punktu** p **na hiperpłaszczyznę** H. Odległość punktu p od jego rzutu prostopadłego p' nazywamy **odległością punktu** p **od hiperpłaszczyzny** H i oznaczamy przez $d(p, H)$. Można udowodnić, że przy tych oznaczeniach zachodzi wzór:

$$d(p, H) = \frac{|a_1p_1 + \ldots + a_np_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}. \tag{15}$$

5 Iloczyn wektorowy

Niech $\alpha = [a_1, a_2, a_3]$ i $\beta = [b_1, b_2, b_3]$ będą wektorami przestrzeni $\mathbb{R}^3$. *Iloczynem wektorowym* wektorów α i β nazywamy wektor $\alpha \times \beta$ dany wzorem:

$$\alpha \times \beta = \left[\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right]. \tag{16}$$

Z twierdzeń 5.2, 15.2 i z wniosku 5.7 można wyprowadzić następujące

Twierdzenie 15.10. Wektory $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \times \beta = \Theta$.

Z twierdzenia 5.1 i z określenia iloczynu wektorowego można łatwo udowodnić następujące

Twierdzenie 15.11. Dla dowolnych wektorów $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$:
(i) $\alpha \times \beta = -(\beta \times \alpha)$,
(ii) $|\alpha \times \beta|^2 + (\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2$,
(iii) $\alpha \times (\beta + \gamma) = (\alpha \times \beta) + (\alpha \times \gamma)$.

Z twierdzenia Laplace'a, dla wierszy i określenia iloczynu skalarnego, otrzymujemy natychmiast

Twierdzenie 15.12. Dla dowolnych wektorów $[a_1, a_2, a_3]$, $[b_1, b_2, b_3]$,$[c_1, c_2, c_3] \in \mathbb{R}^3$ zachodzi wzór:

$$([a_1, a_2, a_3] \times [b_1, b_2, b_3]) \cdot [c_1, c_2, c_3] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Z twierdzeń 15.11 (ii) oraz 15.12 otrzymujemy od razu

Twierdzenie 15.13. Jeżeli wektory $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ nie są równoległe, to wektor $\alpha \times \beta$ jest prostopadły do płaszczyzny rozpiętej na wektorach α i β, a jego długość jest równa polu równoległoboku rozpiętego na wektorach α i β.

Uwaga. Problem zwrotu wektora $\alpha \times \beta$ załatwia tzw. **reguła trzech palców**, która mówi, że jeżeli wyprostowany palec wskazujący prawej dłoni wskazuje kierunek i zwrot wektora α, a palec środkowy kierunek i zwrot wektora β, wówczas kciuk pokazuje kierunek i zwrot wektora $\alpha \times \beta$.

Z twierdzenia 15.13 wynika w prosty sposób

Twierdzenie 15.14. Niech p, q, r będą punktami przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^3$ w położeniu ogólnym. Niech $\alpha = [a_1, a_2, a_3] = \overrightarrow{pq}$, $\beta = [b_1, b_2, b_3] = \overrightarrow{pr}$. Oznaczmy przez $\Delta(p, q, r)$ pole trójkąta o wierzchołkach p, q, r. Wówczas zachodzi wzór:

$$\Delta(p, q, r) = \frac{1}{2}|\alpha \times \beta| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}. \tag{18}$$

6 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 15.15. Oblicz długości podanych wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^3$:
a) $\alpha = [-3, 0, 4]$, b) $\beta = [\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{31}]$, c) $\omega(p, q)$, gdzie $p = (2, 1, -3)$ i $q = (-1, 1, 4)$.
Odp. a) 5. b) 6. c) $\sqrt{58}$.

Zadanie 15.16. Oblicz iloczyny skalarne podanych wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^3$:
a) $\alpha = [-1, 2, -3]$, $\beta = [2, 0, -1]$; b) $\alpha = [\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}]$, $\beta = [\sqrt{8}, -\sqrt{27}, 0]$.
Odp. a) 1 b) -5.

Zadanie 15.17. Oblicz kąt między podanymi parami wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^3$:
a) $\alpha = [3, -1, 2]$, $\beta = [4, 2, -5]$; b) $\alpha = [3, -1, 2]$, $\beta = [1, 2, 3]$.
Odp. a) $\frac{\pi}{2}$. b) $\frac{\pi}{3}$.

Zadanie 15.18. Oblicz iloczyny wektorowe podanych par wektorów:
a) $\alpha = [-1, 2, 5]$, $\beta = [2, 0, -3]$; b) $\alpha = [-1, -3, -4]$, $\beta = [5, 6, -2]$.
Odp. a) $[-6, 7, -4]$. b) $[-18, 18, 9]$.

Zadanie 15.19. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $a = (1, 2, 3)$, $b = (0, -1, 2)$, $c = (0, 4, 0)$.
Odp. $\frac{5}{2}\sqrt{6}$.

Zadanie 15.20. Zbadaj, czy punkty $a = (1, 0, 2)$, $b = (5, 1, 5)$, $c = (3, -1, 2)$, $d = (1, 3, 5)$ leżą w jednej płaszczyźnie.
Odp. Tak.

Zadanie 15.21. Napisz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $p = (-1, 2, 0)$ i prostopadłej do wektora $\alpha = [2, -3, 1]$.
Odp. $2x_1 - 3x_2 + x_3 = -8$.

Zadanie 15.22. Napisz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $p = (0, 1, 2)$, $q = (-1, 4, 5)$, $r = (2, -2, 3)$.
Odp. $12x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 1$.

Zadanie 14.23. Znajdź rzut prostokątny punktu $p = (3, -2, 1)$
na płaszczyznę o równaniu: $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$.
Odp. $(\frac{10}{7}, -\frac{17}{14}, -\frac{19}{14})$.

Zadanie 15.24. Oblicz odległość punktu $p = (5, -1, 6)$ od płaszczyzny o równaniu: $3x_1 - 4x_2 + 12x_3 = 12$.
Odp. $\frac{79}{13}$.
Zadanie 15.25. Oblicz odległość punktu $p = (3, 6, -1)$ od płaszczyzny o równaniu parametrycznym $(1, 0, 0) + t \circ [2, -1, 1] + s \circ [1, 2, 0]$.
Odp. $\sqrt{\frac{3}{10}}$.