Wykład 11
Przekształcenia liniowe a macierze

1 Izomorfizm przestrzeni $L(V;W)$ i $M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Twierdzenie 11.1. *Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi o bazach uporządkowanych $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ i $(\beta_1,\ldots,\beta_m)$ odpowiednio. Niech $\varphi\colon L(V;W)\to M_{m\times n}(\mathbb{R})$ będzie przekształceniem, które każdemu $f\in L(V;W)$ przyporządkowuje macierz f w podanych bazach przestrzeni V i W. Wówczas φ jest izomorfizmem liniowym.*

Dowód. Niech $f,g\in L(V;W)$ i niech $A=[a_{ij}]$ oraz $B=[b_{ij}]$ będą macierzami f i g odpowiednio, w rozpatrywanych bazach przestrzeni V i W. Wtedy dla $k=1,\ldots,n$ mamy, że

$$(f+g)(\alpha_k)=f(\alpha_k)+g(\alpha_k)=\sum_{i=1}^{m}a_{ik}\circ\beta_i+\sum_{i=1}^{m}b_{ik}\circ\beta_i=\sum_{i=1}^{m}(a_{ik}+b_{ik})\circ\beta_i,$$

więc, ze wzorów (5) i (6), $A+B$ jest macierzą przekształcenia liniowego $f+g$ w zadanych bazach przestrzeni V i W, czyli $\varphi(f+g)=\varphi(f)+\varphi(g)$. Dalej, dla dowolnego $a\in\mathbb{R}$ oraz dla dowolnego $k=1,\ldots,n$

$$(a\cdot f)(\alpha_k)=a\circ f(\alpha_k)=a\circ\sum_{i=1}^{m}a_{ik}\circ\beta_i=\sum_{i=1}^{m}(a\cdot a_{ik})\circ\beta_i,$$

skąd macierzą przekształcenia $a\cdot f$ w rozpatrywanych bazach jest $a\cdot A$, czyli $\varphi(a\cdot f)=a\cdot\varphi(f)$. Zatem φ jest przekształceniem liniowym. Jeżeli $\varphi(f)=\varphi(g)$, to na mocy twierdzenia 10.6, $f(\alpha)=g(\alpha)$ dla dowolnego $\alpha\in V$, skąd $f=g$. Zatem przekształcenie φ jest różnowartościowe.

Weźmy dowolne $A=[a_{ij}]\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i niech $f=\sum_{i,j}a_{ij}\circ\varphi_{ij}$, gdzie $(\varphi_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$ jest bazą przestrzeni $L(V;W)$ zdefiniowaną w twierdzeniu 10.2. Wtedy $f\in L(V;W)$ oraz z dowodu twierdzenia 10.2 $f(\alpha_k)=\sum_{i=1}^{m}a_{ik}\circ\beta_i$ dla każdego $k=1,\ldots,n$. Zatem $\varphi(f)=A$ i przekształcenie φ jest „na”. Stąd ostatecznie φ jest izomorfizmem liniowym. □

Twierdzenie 11.2. *Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi o bazach uporządkowanych $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ i $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, odpowiednio. Niech $A=[a_{ij}]$ będzie macierzą przekształcenia $f\in L(V;W)$ w tych bazach. Wówczas f jest izomorfizmem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest odwracalna. Jeżeli f jest izomorfizmem liniowym, to A^{-1} jest macierzą przekształcenia $f^{-1}\in L(W;V)$ w bazach $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ i $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ przestrzeni W i V.*

Dowód. Załóżmy, że f jest izomorfizmem liniowym. Istnieje wówczas przekształcenie odwrotne $f^{-1}\colon W\to V$, które jest izomorfizmem liniowym. Niech B będzie macierzą przekształcenia liniowego f^{-1} w bazach $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ i $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ przestrzeni W i V. Oczywiście $f^{-1}\circ f=id_V$ oraz macierzą przekształcenia tożsamościowego id_V w bazach $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ i $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ przestrzeni V jest macierz jednostkowa I_n. Zatem, na mocy twierdzenia 10.10, $B\cdot A=I_n$, skąd $B=A^{-1}$.

Na odwrót, załóżmy, że macierz A jest odwracalna. Istnieje wtedy macierz $B \in M_n(\mathbb{R})$ taka, że $B \cdot A = A \cdot B = I_n$. Z twierdzenia 11.1 istnieje przekształcenie $g \in L(W;V)$, którego macierzą w bazach $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ i $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni W i V jest B. Z twierdzenia 10.10 otrzymujemy zatem, że $I_n = B \cdot A$ jest macierzą przekształcenia $g \circ f$ w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni V, skąd $g \circ f = id_V$. Ponadto z twierdzenia 10.10, $I_n = A \cdot B$ jest macierzą przekształcenia $f \circ g$ w bazach $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ przestrzeni W. Stąd $f \circ g = id_W$. Zatem $g = f^{-1}$ i f jest izomorfizmem liniowym. □

2 Macierz przejścia

Niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ będą dwiema uporządkowanymi bazami przestrzeni liniowej V. Niech dla $i = 1, \ldots, n$, $\begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$ będzie wektorem współrzędnych wektora α'_i w bazie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, tzn. $\alpha'_i = a_{1i} \circ \alpha_1 + \ldots + a_{ni} \circ \alpha_i$. Wówczas macierz kwadratową

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) \tag{1}$$

nazywamy **macierzą przejścia od bazy** $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ **do bazy** $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$. Równoważnie, A jest macierzą przekształcenia tożsamościowego $id_V \colon V \to V$ w bazach $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ i $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni V.

Ponieważ id_V jest izomorfizmem liniowym, więc z twierdzeń 11.2 i 10.6 uzyskujemy od razu następujące

Twierdzenie 11.3. *Macierz przejścia A od bazy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ do bazy $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ przestrzeni liniowej V jest macierzą odwracalną i A^{-1} jest macierzą przejścia od bazy $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ do bazy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Jeżeli $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ jest wektorem współrzędnych wektora $\alpha \in V$ w bazie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, to $A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ jest wektorem współrzędnych wektora α w bazie $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$.* □

Przykład 11.4. Załóżmy, że $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz $\alpha_i = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$ dla $i = 1, \ldots, n$. Wówczas macierzą przejścia od bazy kanonicznej $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ do bazy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$. Np. dla $n = 3$, macierzą przejścia od bazy

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ do bazy $([1,1,1],[0,1,2],[0,0,1])$ jest $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. $\square$

Twierdzenie 11.5. Załóżmy, że $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$, $(\alpha_1", \ldots, \alpha_n")$ są bazami przestrzeni liniowej V. Jeżeli A jest macierzą przejścia od bazy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ do bazy $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ oraz B jest macierzą przejścia od bazy $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ do bazy $(\alpha_1", \ldots, \alpha_n")$, to $A \cdot B$ jest macierzą przejścia od bazy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ do bazy $(\alpha_1", \ldots, \alpha_n")$.

Dowd. Niech $f \colon V \to V$ będzie przekształceniem liniowym danym wzorem $f(\alpha) = \alpha$ dla $\alpha \in V$. Wtedy A jest macierzą f w bazach $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ i $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Niech $g \colon V \to V$ będzie przekształceniem liniowym danym wzorem $g(\alpha) = \alpha$ dla $\alpha \in V$. Wtedy B jest macierzą g w bazach $(\alpha_1", \ldots, \alpha_n")$ i $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$. Wówczas z twierdzenia 10.10, $A \cdot B$ jest macierzą przekształcenia $f \circ g$ w bazach $(\alpha_1", \ldots, \alpha_n")$ i $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Ale $f \circ g = id_V$, więc $A \cdot B$ jest macierzą przejścia od bazy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ do bazy $(\alpha_1", \ldots, \alpha_n")$. $\square$

Z twierdzeń 11.3 i 11.5 wynika od razu następujący

Wniosek 11.6. *Niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$, $(\alpha_1", \ldots, \alpha_n")$ będą bazami przestrzeni liniowej V. Jeżeli A jest macierzą przejścia od bazy $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ do bazy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ oraz B jest macierzą przejścia od bazy $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ do bazy $(\alpha_1", \ldots, \alpha_n")$, to macierzą przejścia od bazy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ do bazy $(\alpha_1", \ldots, \alpha_n")$ jest $A^{-1} \cdot B$.*

Przykład 11.7. Znajdziemy macierz przejścia od bazy $([1,3,1],[2,2,1],[3,4,2])$ do bazy $([2,7,3],[3,9,4],[1,5,3])$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Z przykładu 11.4 mamy, że macierzą przejścia od bazy kanonicznej do bazy $([1,3,1],[2,2,1],[3,4,2])$ jest $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ oraz macierzą przejścia od bazy kanonicznej do bazy $([2,7,3],[3,9,4],[1,5,3])$ jest $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$. Obliczamy (np. przy pomocy operacji elementarnych) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. Z wniosku 11.6 macierzą przejścia od bazy $([1,3,1],[2,2,1],[3,4,2])$ do bazy $([2,7,3],[3,9,4],[1,5,3])$ jest $A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$. $\square$

3 Zmiana baz

Twierdzenie 11.8. *Niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ będą dwiema uporządkowanymi bazami przestrzeni liniowej V i niech $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ i $(\beta'_1, \ldots, \beta'_m)$ będą dwiema uporządkowanymi bazami przestrzeni liniowej W. Niech C będzie macierzą przekształcenia $f \in L(V;W)$ w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ i niech D będzie macierzą f w bazach $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ i $(\beta'_1, \ldots, \beta'_m)$.*

Niech A będzie macierzą przejścia od bazy $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ do bazy $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ oraz niech B będzie macierzą przejścia od bazy $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ do bazy $(\beta'_1, \dots, \beta'_m)$. Wtedy

$$D = B^{-1} \cdot C \cdot A.$$

Dowód. Ponieważ $f = f \circ id_V$, więc z twierdzenia 10.10, $C \cdot A$ jest macierzą f w bazach $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ i $(\beta_1, \dots, \beta_m)$. Ponadto $f = id_W \circ f$, więc na mocy twierdzenia 10.10, $B \cdot D$ jest macierzą f w bazach $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ i $(\beta_1, \dots, \beta_m)$. Stąd $B \cdot D = C \cdot A$. Ale z twierdzenia 11.2 macierz B jest odwracalna, więc $D = B^{-1} \cdot C \cdot A$. □

Niech V będzie przestrzenią liniową. Każde przekształcenie liniowe $f\colon V \to V$ nazywamy **endomorfizmem liniowym przestrzeni** V. Przez macierz takiego endomorfizmu f w bazie uporządkowanej $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ przestrzeni V rozumiemy macierz f w bazach $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ i $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Z twierdzenia 11.8 i z twierdzenia Cauchy'ego mamy od razu następujący

Wniosek 11.9. *Niech $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ i $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ będą uporządkowanymi bazami przestrzeni liniowej V. Niech A będzie macierzą endomorfizmu $f \in L(V; V)$ w bazie $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ i niech B będzie macierzą f w bazie $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$. Niech P będzie macierzą przejścia od bazy $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ do bazy $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$. Wtedy $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$. W szczególności* $\det(B) = \det(A)$. □

Definicja 11.10. Powiemy, że macierze $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ są **podobne**, jeżeli istnieje odwracalna macierz $C \in M_n(\mathbb{R})$ taka, że $B = C^{-1} \cdot A \cdot C$. Piszemy wtedy $A \sim B$.

Stwierdzenie 11.11. *Dla dowolnych macierzy $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$:*
(i) $A \sim A$,
(ii) jeeli $A \sim B$, to $B \sim A$,
(iii) jeeli $A \sim B$ i $B \sim C$, to $A \sim C$.
Dowd. (i) Ponieważ $A = I_n^{-1} \cdot A \cdot I_n$, więc $A \sim A$.
(ii) Niech $A \sim B$. Wtedy istnieje $X \in M_n(\mathbb{R})$ takie, że $B = X^{-1} \cdot A \cdot X$, skąd $A = X \cdot B \cdot X^{-1} = (X^{-1})^{-1} \cdot B \cdot X^{-1}$, czyli $B \sim A$.
(iii) Niech $A \sim B$ i $B \sim C$. Wtedy istnieją macierze odwracalne $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ takie, że $B = X^{-1} \cdot A \cdot X$ i $C = Y^{-1} \cdot B \cdot Y$, skąd $C = Y^{-1} \cdot X^{-1} \cdot A \cdot X \cdot Y = (X \cdot Y)^{-1} \cdot A \cdot (X \cdot Y)$, czyli $A \sim C$. □

Uwaga 11.12. Macierze $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy są macierzami pewnego endomorfizmu f przestrzeni $\mathbb{R}^n$ w pewnych bazach tej przestrzeni. Rzeczywiście, jeśli macierze A i B są podobne, to istnieje macierz odwracalna $C = [c_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ taka, że $B = C^{-1} \cdot A \cdot C$. Niech $f \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ będzie przekształceniem liniowym, które w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ma macierz A. Niech $\alpha_i = [c_{1i}, c_{2i}, \dots, c_{ni}]$ dla $i = 1, \dots, n$. Wówczas $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^n$ złożoną z kolumn macierzy C. Wtedy C jest macierzą przejścia od bazy kanonicznej do bazy $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Wówczas z wniosku 11.9 macierzą f w bazie $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jest $C^{-1} \cdot A \cdot C = B$. Natomiast implikacja odwrotna wynika od razu z wniosku 11.9. □

Z twierdzenia 10.8, wniosku 11.9 oraz z uwagi 11.12 wynika od razu następujący

Wniosek 11.13. *Jeżeli macierze* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *są podobne, to* $r(A) = r(B)$ *oraz* $\det A = \det B$.

Przykład 11.14. Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^3$ danym wzorem analitycznym

$$f([x_1, x_2, x_3]) = [2x_1 + 3x_2 + x_3, 7x_1 + 9x_2 + 5x_3, 3x_1 + 4x_2 + 3x_3].$$

Znajdziemy macierz f w bazie $([1,3,1],[2,2,1],[3,4,2])$. Macierzą przejścia od bazy kanonicznej do bazy $([1,3,1],[2,2,1],[3,4,2])$ jest $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ponadto $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ jest macierzą f w bazie kanonicznej. Zatem z wniosku 11.9, macierz $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$ jest macierzą f w bazie $([1,3,1],[2,2,1],[3,4,2])$. Z przykładu 11.7 wynika, że $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. Stąd uzyskujemy, że $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ -27 & -26 & -48 \\ 21 & 20 & 37 \end{bmatrix}$. □

Stwierdzenie 11.15. *Jeżeli macierze* $P \in M_m(\mathbb{R})$ *i* $Q \in M_m(\mathbb{R})$ *są odwracalne, to dla dowolnej macierzy* $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$$r(P \cdot A \cdot Q) = r(A).$$

Dowód. Niech $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i $h\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ będą przekształceniami liniowymi posiadającymi w bazach kanonicznych odpowiednio macierze: A, Q, P. Wówczas, z twierdzenia 11.2, g i h są automorfizmami. Zatem $(f \circ g)(\mathbb{R}^n) = f(g(\mathbb{R}^n)) = f(\mathbb{R}^n) = Im\, f$ i $h(f(\mathbb{R}^n)) \cong f(\mathbb{R}^n)$, skąd $\dim Im(h \circ f \circ g) = \dim Im\, f$. Z twierdzenia 10.10 macierzą $h \circ f \circ g$ w bazach kanonicznych jest $P \cdot A \cdot Q$. Ponadto z twierdzenia 10.8, $r(P \cdot A \cdot Q) = \dim Im(h \circ f \circ g)$ i $r(A) = \dim Im\, f$. Stąd $r(P \cdot A \cdot Q) = r(A)$. □