Wykład 5
Określenie przestrzeni liniowej

1 Określenie przestrzeni liniowej

Niech V będzie niepustym zbiorem, w którym określone jest działanie dodawania $+\colon V\times V \to V$ (przy czym dla $\alpha, \beta \in V$ i będziemy pisali $\alpha+\beta$ zamiast $+((\alpha,\beta)))$ i operacja $\circ : \mathbb{R}\times V \longrightarrow V$ mnożenia przez elementy z ciała $\mathbb{R}$ (przy czym dla $a \in \mathbb{R}$ oraz $\alpha \in V$ będziemy pisali $a\circ\alpha$ zamiast $\circ((a,\alpha)))$ oraz wyróżniony jest element $\theta \in V$.

Elementy zbioru V będziemy nazywali **wektorami**, wektor θ **wektorem zerowym**, a elementy ciała $\mathbb{R}$ **skalarami**. Używać będziemy greckich liter do oznaczania wektorów, a łacińskich do oznaczania skalarów.

Zbiór V (z działaniem $+$, operacją $\circ$ mnożenia przez skalary z ciała $\mathbb{R}$ oraz wyróżnionym elementem θ) nazywamy **przestrzenią liniową (nad ciałem** $\mathbb{R}$), jeśli spełnione są następujące warunki (**aksjomaty przestrzeni liniowych**):

A1. $\forall_{\alpha,\beta\in V}\ \alpha+\beta=\beta+\alpha$, tj. *działanie + jest przemienne*;
A2. $\forall_{\alpha,\beta,\gamma\in V}\ \alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$, tj. *działanie + jest łączne*;
A3. $\forall_{\alpha\in V}\ \alpha+\theta=\alpha$, tj. *wektor θ jest elementem neutralnym działania +*;
A4. $\forall_{\alpha\in V}\exists_{\delta\in V}\ \alpha+\delta=\theta$;
A5. $\forall_{\alpha,\beta\in V}\forall_{a\in K}\ a\circ(\alpha+\beta)=a\circ\alpha+a\circ\beta$;
A6. $\forall_{\alpha\in V}\forall_{a,b\in K}\ (a+b)\circ\alpha=a\circ\alpha+b\circ\alpha$;
A7. $\forall_{\alpha\in V}\forall_{a,b\in K}\ (a\cdot b)\circ\alpha=a\circ(b\circ\alpha)$;
A8. $\forall_{\alpha\in V}\ 1\circ\alpha=\alpha$.

2 Przykłady przestrzeni liniowych

Przykład 5.1. Zbiór jednoelementowy $V=\{\alpha\}$ z działaniem + takim, że $\alpha+\alpha=\alpha$ oraz wyróżnionym elementem $\theta=\alpha$ jest przestrzenią liniową, jeżeli mnożenie $\circ$ określimy wzorem: $a\circ\alpha=\alpha$ dla każdego $a\in\mathbb{R}$. Przestrzenie takiej postaci nazywamy **zerowymi**. □

Przykład 5.2. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną i niech $\mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wszystkich ciągów postaci $[a_1,a_2,\dots,a_n]$, gdzie $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$. Dodawanie takich ciągów i mnożenie przez skalary określamy następująco:

$$[a_1,a_2,\dots,a_n]+[b_1,b_2,\dots,b_n]=[a_1+b_1,a_2+b_2,\dots,a_n+b_n],$$

$$a\circ[a_1,a_2,\dots,a_n]=[aa_1,aa_2,\dots,aa_n].$$

Natomiast wektor zerowy określamy jako $\theta=[0,0,\dots,0]$. Łatwo sprawdzić, że aksjomaty **A1-A8** są w tym przypadku spełnione, a więc zbiór $\mathbb{R}^n$ z tak określonym dodawaniem i mnożeniem przez skalary oraz z wyróżnionym wektorem θ jest przestrzenią liniową. Przestrzeń tę oznacza się przez $\mathbb{R}^n$ i nazywa n-wymiarową przestrzenią liniową współrzędnych. Dla wektora

$[a_1, a_2, \ldots, a_n] \in \mathbb{R}^n$ element a_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$ nazywamy i-**tą współrzędną** lub i-**tą składową** tego wektora. $\square$

Przykład 5.3. Oznaczmy przez $\mathbb{R}^\infty$ zbiór wszystkich ciągów nieskończonych $[a_1, a_2, \ldots]$ o wyrazach z ciała $\mathbb{R}$. Dodawanie takich ciągów i mnożenie przez skalary określamy następująco:

$$[a_1, a_2, \ldots] + [b_1, b_2, \ldots] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots],$$

$$a \circ [a_1, a_2, \ldots] = [aa_1, aa_2, \ldots].$$

Natomiast wektor zerowy określamy jako $\theta = [0, 0, \ldots]$. Łatwo sprawdzić, że wówczas aksjomaty **A1-A8** też są spełnione. Otrzymaną w ten sposób przestrzeń liniową oznaczamy przez $\mathbb{R}^\infty$. $\square$

Przykład 5.4. Zbiór $\mathbb{R}[x]$ wszystkich wielomianów zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych ze zwykłym dodawaniem wielomianów i z naturalnym mnożeniem wielomianów przez liczby rzeczywiste oraz z wyróżnionym elementem $\theta = 0$ jest przestrzenią liniową. Oznaczamy ją przez $\mathbb{R}[x]$. $\square$

Przykład 5.5. Niech m i n będą ustalonymi liczbami naturalnymi. Wówczas zbiór $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ wszystkich $m \times n$-macierzy o wyrazach z ciała $\mathbb{R}$ z naturalnym dodawaniem macierzy i mnożeniem przez skalary oraz z wyróżnionym elementem $\theta = 0_{m\times n}$ tworzy przestrzeń liniową. Oznaczamy ją przez $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. $\square$

Przykład 5.6. Zbiór wszystkich równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, z naturalnym dodawaniem równań stronami i naturalną operacją mnożenia równań przez skalary oraz z wektorem θ rozumianym jako równanie $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$ jest przestrzenią liniową. $\square$

Przykład 5.7. Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem. Oznaczmy przez $\mathbb{R}^X$ zbiór wszystkich funkcji $f\colon X \to \mathbb{R}$. Dodawanie funkcji z tego zbioru określamy wzorem:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ dla } x \in X.$$

Natomiast mnożenie przez skalary określamy wzorem:

$$(a \circ f)(x) = a \cdot f(x) \text{ dla } x \in X.$$

Łatwo sprawdzić, że w ten sposób otrzymujemy przestrzeń liniową, którą oznaczamy przez $\mathbb{R}^X$. $\square$

3 Własności działań na wektorach

Niech V będzie przestrzenią liniową. Wówczas

Własność 5.8. Prawo skracania równości:

$$\forall_{\alpha,\beta,\gamma\in V}[\alpha+\beta=\alpha+\gamma \Rightarrow \beta=\gamma].$$

Dowód. Załóżmy, że $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$. Z **A4** i z **A1** istnieje $\delta\in V$ takie, że $\delta+\alpha=\theta$. Zatem z **A2** mamy, że $(\delta+\alpha)+\beta=(\delta+\alpha)+\gamma$, czyli $\theta+\beta=\theta+\gamma$, a więc z **A3** i **A1** $\beta=\gamma$. □

Własność 5.9. Dla każdego wektora $\alpha\in V$ istnieje dokładnie jeden wektor $\delta\in V$ taki, że $\alpha+\delta=\theta$.

Dowód. Istnienie takiego wektora δ wynika z **A4**. Jeśli zaś $\delta_1\in V$ jest takie, że $\alpha+\delta_1=\theta$, to $\alpha+\delta_1=\alpha+\delta$, więc z własności 5.8 mamy, że $\delta_1=\delta$. □

Uwaga 5.10. Wektor $\delta\in V$ taki, że $\alpha+\delta=\theta$ nazywamy **wektorem przeciwnym do wektora** α i oznaczamy przez $-\alpha$. Ponieważ z **A1** $(-\alpha)+\alpha=\theta$, więc α jest wektorem przeciwnym do wektora $(-\alpha)$, czyli mamy wzór:

$$-(-\alpha)=\alpha \text{ dla każdego } \alpha\in V. \tag{1}$$

Uwaga 5.11. Można udowodnić, że suma n wektorów z przestrzeni V nie zależy od sposobu rozstawienia nawiasów. Ponadto z przemienności dodawania wektorów wynika, że suma n wektorów nie zależy też od kolejności składników.

Własność 5.12. Dla dowolnych wektorów $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in V$ zachodzi wzór:

$$-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)=(-\alpha_1)+(-\alpha_2)+\ldots+(-\alpha_n). \tag{2}$$

Dowód. Mamy, że $(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)+[(-\alpha_1)+\ldots+(-\alpha_n)]=(\alpha_1+(-\alpha_1))+\ldots+(\alpha_n+(-\alpha_n))=\theta+\ldots+\theta=\theta$. Zatem wektor $(-\alpha_1)+\ldots+(-\alpha_n)$ jest wektorem przeciwnym do wektora $\alpha_1+\ldots+\alpha_n$, skąd mamy nasz wzór. □

Własność 5.13. Dla dowolnych wektorów $\alpha,\beta\in V$ istnieje dokładnie jeden wektor $\gamma\in V$ taki, że $\alpha+\gamma=\beta$. Mianowicie $\gamma=\beta+(-\alpha)$. Będziemy go nazywali **różnicą wektorów** α i β i oznaczali przez $\beta-\alpha$.

Dowód. Mamy, że $\alpha+[\beta+(-\alpha)]=[\alpha+(-\alpha)]+\beta=\theta+\beta=\beta$. Jeżeli ponadto $\gamma_1\in V$ jest takie, że $\alpha+\gamma_1=\beta$, to $\alpha+\gamma_1=\alpha+\gamma$, więc z własności 5.8 mamy, że $\gamma_1=\gamma$. □

Uwaga 5.14. Oczywiście dla dowolnego wektora $\alpha\in V$: $\alpha-\alpha=\theta$, bo $\alpha-\alpha=\alpha+(-\alpha)=\theta$.

Własność 5.15. $0\circ\alpha=\Theta$ dla dowolnego wektora $\alpha\in V$.

Dowód. Ponieważ $0=0+0$, więc na mocy **A6**: $0\circ\alpha=(0+0)\circ\alpha=0\circ\alpha+0\circ\alpha$. Zatem z **A3**, $0\circ\alpha+\theta=0\circ\alpha+0\circ\alpha$ i z własności 5.8, $\theta=0\circ\alpha$. □

Własność 5.16. $-\alpha=(-1)\circ\alpha$ dla dowolnego wektora $\alpha\in V$.

Dowód. Ponieważ $\alpha = 1 \circ \alpha$ na mocy **A8**, więc z **A6** $\alpha + (-1) \circ \alpha = 1 \circ \alpha + (-1) \circ \alpha = (1 + (-1)) \circ \alpha = 0 \circ \alpha = \theta$ na mocy własności 5.15. □

Własność 5.17. $a \circ \theta = \theta$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$.

Dowód. Z **A3** mamy, że $\theta = \theta + \theta$, więc na mocy **A5**: $a \circ \theta = a \circ (\theta + \theta) = a \circ \theta + a \circ \theta$, czyli na mocy **A3**, $a \circ \theta + \theta = a \circ \theta + a \circ \theta$, więc z własności 5.15, $\theta = a \circ \theta$. □

Własność 5.18. $a \circ \alpha \neq \theta$ dla dowolnych $0 \neq a \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \alpha \in V$.

Dowód. Załóżmy, że $0 \neq a \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \alpha \in V$ i $a \circ \alpha = \theta$. Wtedy z własności 5.17 mamy, że $\theta = a^{-1} \circ (a \circ \alpha) = (a^{-1} \cdot a) \circ \alpha = 1 \circ \alpha = \alpha$ na mocy **A7** i **A8**, skąd $\alpha = \theta$ i mamy sprzeczność. □

Uwaga 5.19. Z własności 5.15, 5.17 i 5.18 wynika od razu, że dla dowolnych $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in V$:

$$a \circ \alpha = \theta \Leftrightarrow [a = 0 \text{ lub } \alpha = \theta].$$

Własność 5.20. $(-a) \circ \alpha = a \circ (-\alpha) = -(a \circ \alpha)$ dla dowolnych $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in V$.

Dowód. Na mocy **A6** i własności 5.15 mamy, że $(-a) \circ \alpha + a \circ \alpha = ((-a) + a) \circ \alpha = 0 \circ \alpha = \theta$, skąd $(-a) \circ \alpha = -(a \circ \alpha)$. Ponadto z **A5** i własności 5.17 $a \circ (-\alpha) + a \circ \alpha = a \circ (\alpha + (-\alpha)) = a \circ \theta = \theta$, więc $a \circ (-\alpha) = -(a \circ \alpha)$. □

Własność 5.21. Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in V$:

$$a \circ (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = a \circ \alpha_1 + a \circ \alpha_2 + \ldots + a \circ \alpha_n.$$

Dowód. Indukcja względem n. Dla $n = 2$ teza wynika z **A5**. Załóżmy teraz, że teza zachodzi dla pewnej liczby naturalnej $n \geq 2$ i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in V$. Wtedy z założenia indukcyjnego

$$a \circ (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) = a \circ \alpha_1 + \ldots + a \circ \alpha_n.$$

Zatem na mocy **A5** $a \circ (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \alpha_{n+1}) = a \circ ((\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) + \alpha_{n+1}) = a \circ (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) + a \circ \alpha_{n+1} = a \circ \alpha_1 + \ldots + a \circ \alpha_n + a \circ \alpha_{n+1}$, czyli teza zachodzi dla liczby $n + 1$. □

Z własności 5.21 i z **A7** wynika od razu

Własność 5.22. Dla dowolnych $a, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$:

$$a \circ (a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n) = (a \cdot a_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (a \cdot a_n) \circ \alpha_n.$$

Uwaga 5.23. Z udowodnionych własności działań na wektorach można łatwo wyprowadzić następujące prawa rachunkowe dotyczące odejmowania wektorów:

$$\alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta) - \gamma,\ \alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha - \beta) + \gamma,$$

$$-(\alpha + \beta) = (-\alpha) - \beta,\ -(\alpha - \beta) = (-\alpha) + \beta,$$

$$a \circ (\alpha - \beta) = a \circ \alpha - a \circ \beta,\ (a - b) \circ \alpha = a \circ \alpha - b \circ \beta,$$

$$(-a) \circ (-\alpha) = a \circ \alpha.$$