Wykład 8
Rząd macierzy i twierdzenie Kroneckera-Capellego

1 Określenie rzędu macierzy

Niech A będzie $m \times n$ - macierzą. Wówczas wiersze macierzy A możemy w naturalny sposób traktować jako wektory przestrzeni $\mathbb{R}^n$, zaś kolumny macierzy A możemy traktować jako wektory przestrzeni $\mathbb{R}^m$. **Rzędem wierszowym** macierzy A nazywamy maksymalną ilość jej liniowo niezależnych wierszy. Natomiast **rzędem kolumnowym** macierzy A nazywamy maksymalną ilość jej liniowo niezależnych kolumn. Rząd wierszowy i rząd kolumnowy macierzy A oznaczamy odpowiednio symbolami: $r_w(A)$ i $r_k(A)$.

Z tego określenia wynika od razu, że dla dowolnej macierzy A:

$$r_w(A) = r_k(A^T) \text{ oraz } r_k(A) = r_w(A^T). \tag{1}$$

Ponadto z określenia rzędu macierzy mamy natychmiast, że

$$r_w(0_{m\times n}) = r_k(0_{m\times n}) = 0. \tag{2}$$

Z twierdzenia 7.8 wynika od razu, że **rząd wierszowy macierzy A jest równy wymiarowi podprzestrzeni generowanej przez jej wektory wierszowe, zaś rząd kolumnowy macierzy A jest równy wymiarowi podprzestrzeni generowanej przez wektory kolumnowe macierzy A.**

Ponadto z własności operacji elementarnych **rząd wierszowy macierzy A nie zmienia się przy stosowaniu operacji elementarnych na wierszach tej macierzy oraz rząd kolumnowy macierzy A nie zmienia się przy stosowaniu operacji elementarnych na kolumnach tej macierzy.**

Lemat 8.1. *Jeżeli do pewnego wiersza macierzy dodamy inny jej wiersz pomnożony przez dowolny skalar, to rząd kolumnowy tej macierzy nie ulegnie zmianie.*

Dowód. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie $m \times n$-macierzą. Dla uproszczenia znakowania założymy, że do pierwszego wiersza macierzy A dodano drugi jej wiersz pomnożony przez skalar a i oznaczmy przez $B = [b_{ij}]$ macierz uzyskaną w wyniku tej operacji. Niech $r = r_k(A)$. Oznacza to, że pewne r-kolumn macierzy A są liniowo niezależne. Dla uproszczenia znakowania załóżmy, że pierwsze r-kolumny macierzy A są liniowo niezależne. Udowodnimy, że wówczas pierwsze r-kolumny macierzy B też są liniowo niezależne. Niech A_j oraz B_j oznaczają j-tą kolumnę macierzy A i B odpowiednio. Weźmy dowolne $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}$ takie, że $x_1 \circ B_1 + \ldots + x_r \circ B_r = \theta$. Wtedy

$$x_1 \circ \begin{bmatrix} a_{11} + aa_{21} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \ldots + x_r \circ \begin{bmatrix} a_{1r} + aa_{2r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{bmatrix} = 0_{m\times 1},$$

więc

$$\begin{cases} (a_{11}+aa_{12})x_1 & + & \dots & + & (a_{1r}+aa_{2r})x_r & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{2r}x_r & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mr}x_r & = & 0 \end{cases},$$

skąd po odjęciu od pierwszej równości równości drugiej pomnożonej przez a uzyskamy, że $x_1 \circ A_1 + \ldots + x_r \circ A_r = \theta$. Zatem z liniowej niezależności kolumn $A_1, \ldots, A_r$ wynika, że $x_1 = \ldots = x_r = 0$ i kolumny $B_1, \ldots, B_r$ są liniowo niezależne. Zatem $r_k(B) \geq r_k(A)$. Ale macierz A powstaje z macierzy B przez dodanie do pierwszego wiersza drugiego wiersza pomnożonego przez skalar $(-a)$, więc z pierwszej części dowodu $r_k(A) \geq r_k(B)$ i ostatecznie $r_k(A) = r_k(B)$. $\square$

Z (1) i z lematu 8.1 wynika od razu, że prawdziwy jest też następujący

Lemat 8.2. *Jeżeli do pewnej kolumny macierzy dodamy inną jej kolumnę pomnożoną przez dowolny skalar, to rząd wierszowy tej macierzy nie ulegnie zmianie.* $\square$

Lemat 8.3. *Niech $m, n \geq 2$ i niech $A = [a_{ij}]$ będzie $m \times n$-macierzą taką, że dla pewnych s, t jest $a_{st} \neq 0$ oraz $a_{it} = 0$ dla wszystkich $i \neq s$ i $a_{sj} = 0$ dla wszystkich $j \neq t$. Wówczas $r_k(A) = 1 + r_k(A_{st})$ oraz $r_w(A) = 1 + r_w(A_{st})$.*

Dowód. Niech $r = r_k(A_{st})$. Istnieją wówczas kolumny $B_1, \ldots, B_r$ macierzy A_{st}, które są liniowo niezależne i takie, że każda kolumna macierzy A_{st} jest ich kombinacją liniową. Oznaczmy przez A_j kolumnę macierzy A powstającą przez dopisanie 0 w s-tym wierszu macierzy B_j dla $j = 1, \ldots, r$. Niech A_{r+1} oznacza t-tą kolumnę macierzy A. Weźmy dowolne $x_1, \ldots, x_{r+1} \in \mathbb{R}$ takie, że $x_1 \circ A_1 + \ldots + x_{r+1} \circ A_{r+1} = \theta$. Wtedy $x_{r+1} a_{st} = 0$, skąd $x_{r+1} = 0$ oraz $x_1 \circ B_1 + \ldots + x_r \circ B_r = \theta$. Zatem z liniowej niezależności $B_1, \ldots, B_r$ jest $x_1 = \ldots = x_r = 0$. Stąd kolumny $A_1, \ldots, A_{r+1}$ są liniowo niezależne. Niech X będzie dowolną kolumną macierzy A o numerze różnym od t. Niech Y będzie kolumną macierzy A_{st} powstającą z X przez wykreślenie s-tego wiersza (który składa się z jednego zera!). Wtedy istnieją $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ takie, że $Y = a_1 \circ B_1 + \ldots + a_r \circ B_r$, skąd $X = a_1 \circ A_1 + \ldots + a_r \circ A_r$. Wynika stąd, że wszystkie kolumny macierzy A są kombinacjami liniowymi kolumn $A_1, \ldots, A_r, A_{r+1}$. Oznacza to, że $r_k(A) = r + 1 = 1 + r_k(A_{st})$.

Dowód drugiej części lematu wynika natychmiast z (1) i z pierwszej jego części. $\square$

Twierdzenie 8.4. *Rząd kolumnowy dowolnej macierzy równy jest jej rzędowi wierszowemu.*

Dowód. Indukcja względem liczby m wierszy macierzy. Jeżeli $m = 1$, to $A = [a_1 \;\; a_2 \;\; \ldots \;\; a_n]$ dla pewnych skalarów $a_1, \ldots, a_n$. Jeżeli $a_1 = \ldots = a_n = 0$, to $r_w(A) = 0 = r_k(A)$. Jeżeli zaś $a_j \neq 0$ dla pewnego $j = 1, \ldots, n$, to $r_w(A) = 1 = r_k(A)$. Zatem teza zachodzi dla $m = 1$.

Niech teraz m będzie liczbą naturalną większą od 1 i taką, że teza zachodzi dla wszystkich macierzy, które mają mniej niż m wierszy. Weźmy dowolną $m \times n$-macierz $A = [a_{ij}]$. Jeśli $A = 0_{m \times n}$, to $r_w(A) = 0 = r_k(A)$. Niech zatem $A \neq 0_{m \times n}$. Wtedy istnieją k, l takie, że $a_{kl} \neq 0$. Jeśli $n = 1$, to $r_w(A) = r_k(A^T)$, więc z założenia indukcyjnego $r_k(A^T) = r_w(A^T) = r_k(A)$, czyli $r_w(A) = r_k(A)$. Niech dalej $n > 1$. Niech $B = [b_{ij}]$ będzie macierzą powstającą z macierzy A przez wykonanie operacji elementarnych: $w_i - \frac{a_{il}}{a_{kl}} \cdot w_k$ dla wszystkich $i \neq k$.

Wtedy $r_w(B) = r_w(A)$ oraz z lematu 8.1, $r_k(B) = r_k(A)$. Niech dalej C będzie macierzą powstającą z macierzy B przez wykonanie operacji elementarnych: $k_j - \frac{b_{kj}}{a_{kl}} \cdot k_l$ dla wszystkich $j \neq l$. Wtedy $r_k(C) = r_k(B)$ oraz z lematu 8.2, $r_w(C) = r_w(B)$. Ale z lematu 8.3 mamy, że $r_w(C) = 1 + r_w(C_{kl})$ oraz $r_k(C) = 1 + r_k(C_{kl})$. Z założenia indukcyjnego $r_w(C_{kl}) = r_k(C_{kl})$. Zatem $r_w(A) = 1 + r_k(C_{kl}) = r_k(A)$. $\square$

2 Metody obliczania rzędu macierzy

Wspólną wartość rzędu kolumnowego i wierszowego macierzy A nazywamy **rzędem macierzy** A i oznaczamy przez $r(A)$. Z twierdzenia 8.4 oraz z początkowej części tego rozdziału mamy od razu następujące

Twierdzenie 8.5. *Operacje elementarne wykonywane na wierszach lub kolumnach macierzy nie zmieniają jej rzędu.* $\square$

Z twierdzenia 8.4 oraz ze wzoru (1) wynika od razu następujące

Twierdzenie 8.6. *Dla dowolnej macierzy A: $r(A) = r(A^T)$.* $\square$

Twierdzenie 8.7. *Niech $A = [a_{ij}]$ będzie taką $m \times n$-macierzą, że $a_{kl} \neq 0$ dla pewnych k, l oraz $a_{il} = 0$ dla wszystkich $i \neq k$. Wtedy $r(A) = 1 + r(A_{kl})$.*

Dowód. Oznaczmy przez B macierz powstającą z macierzy A przez wykonanie operacji elementarnych: $k_j - \frac{a_{kj}}{a_{kl}} \cdot k_l$ dla wszystkich $j \neq l$. Wtedy $B_{kl} = A_{kl}$ oraz na mocy twierdzenia 8.5, $r(A) = r(B)$. Ponadto z twierdzenia 8.4 i z lematu 8.3, $r(B) = 1 + r(B_{kl})$. Zatem $r(A) = 1 + r(A_{kl})$. $\square$

Twierdzenie 8.8. *Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia n. Wówczas równoważne są warunki:*

(i) $r(A) = n$,

(ii) $\det(A) \neq 0$.

Dowód. (i)$\Rightarrow$(ii). Ponieważ wszystkie kolumny $A_1, \ldots, A_n$ macierzy A są liniowo niezależne i jest ich n, więc tworzą one bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wynika stąd, że dla każdego $i = 1, \ldots, n$ istnieją skalary $x_{i1}, \ldots, x_{in} \in K$ takie, że $x_{i1} \circ A_1 + \ldots + x_{in} \circ A_n = \varepsilon_i$. Niech $X = [x_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$. Wtedy $A \cdot X = I_n$, skąd z twierdzenia Cauchy'ego $\det(A) \neq 0$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Ponieważ $\det(A) \neq 0$, więc istnieje macierz $X = [x_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ taka, że $A \cdot X = I_n$. Wtedy dla każdego $i = 1, \ldots, n$ mamy, że $\varepsilon_i = x_{i1} \circ A_1 + \ldots + x_{in} \circ A_n$, więc kolumny macierzy A generują przestrzeń $\mathbb{R}^n$. Stąd na mocy twierdzenia 7.8 te kolumny są liniowo niezależne, czyli $r(A) = n$. $\square$

Definicja 8.9. Niech A będzie $m \times n$-macierzą oraz niech k będzie liczbą naturalną taką, że $k \leq \min\{m, n\}$. **Minorem** stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia k, która powstaje z macierzy A przez wykreślenie $m - k$ wierszy oraz $n - k$ kolumn.

Twierdzenie 8.10. *Rząd niezerowej macierzy jest równy maksymalnemu stopniowi jej niezerowego minora.*

Dowód. Niech A będzie niezerową $m \times n$-macierzą. Oznaczmy przez k maksymalny stopień niezerowego minora macierzy A oraz przez r rząd tej macierzy. Wtedy pewne r wierszy macierzy A jest liniowo niezależnych. Wykreślając pozostałe wiersze uzyskamy $k \times n$-macierz B o rzędzie r. Zatem z twierdzenia 8.6 pewne r kolumn macierzy B są liniowo niezależne. Wykreślając w macierzy B pozostałe kolumny uzyskamy macierz kwadratową C stopnia r o rzędzie r. Zatem z twierdzenia 8.8, $\det(C) \neq 0$. Ale $\det(C)$ jest minorem stopnia r macierzy A, więc $r \leq k$.

Niech teraz D będzie macierzą kwadratową stopnia k powstającą z macierzy A przez wykreślenie pewnych $m-k$ wierszy i $n-k$ kolumn taką, że $\det(D) \neq 0$. Wtedy z twierdzenia 8.8 mamy, że $r(D) = k$. Niech X będzie macierzą powstającą z macierzy A przez wykreślenie tych samych wierszy, co dla macierzy D. Wtedy $r(X) \leq k$ oraz wszystkie kolumny macierzy D są liniowo niezależne, więc $r(X) \geq k$ i ostatecznie $r(X) = k$. Stąd z definicji rzędu wierszowego macierzy $k \leq r$ i ostatecznie $r = k$. □

3 Twierdzenie Kroneckera-Capellego

Niech dany będzie teraz dowolny układ m-równań liniowych z n-niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots + & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \ldots + & a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \ldots + & a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{3}$$

Przypomnijmy, że **macierzą współczynników** układu (3) nazywamy macierz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

zaś **macierzą uzupełnioną** układu (3) nazywamy macierz:

$$A_u = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]. \tag{5}$$

Twierdzenie 8.11 (Kroneckera-Capellego). *Układ (3) ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_u)$. Ponadto układ (3) ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_u) = n$.*

Dowód. Oznaczmy przez α_j j-tą kolumnę macierzy A i niech $\beta = [b_1, \ldots, b_m]$. Układ (3) można wtedy zapisać jako równanie wektorowe:

$$x_1 \circ \alpha_1 + \ldots + x_n \circ \alpha_n = \beta. \tag{6}$$

Jeżeli $(a_1, \ldots, a_n)$ jest rozwiązaniem układu (3), to $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \beta$, skąd na mocy twierdzenia 6.8 i twierdzenia 6.11 mamy, że $lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta) = lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, czyli $r(A_u) = r(A)$. Na odwrót, załóżmy, że $r(A_u) = r(A)$. Wtedy

$$\dim lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \dim lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta),$$

więc z twierdzenia 7.22 mamy, że $lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta) = lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, skąd $\beta \in lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, czyli istnieją $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ takie, że $\beta = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$ i wówczas $(a_1, \ldots, a_n)$ jest rozwiązaniem układu (3).

Pozostaje udowodnić drugą część twierdzenia. Załóżmy najpierw, że $r(A_u) = r(A) = n$. Wówczas kolumny $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są liniowo niezależne, więc tworzą bazę podprzestrzeni $lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Ale wtedy $\dim lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \dim lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta)$, skąd $lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta)$, czyli $\beta \in lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Zatem z twierdzenia 7.9 istnieje dokładnie jeden ciąg $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ taki, że $\beta = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$, więc układ (3) ma dokładnie jedno rozwiązanie. Na odwrót, załóżmy, że układ (3) posiada dokładnie jedno rozwiązanie $(a_1, \ldots, a_n)$. Wówczas z pierwszej części dowodu $r(A_u) = r(A)$. Wystarczy zatem wykazać, że wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są liniowo niezależne. Ale jeżeli $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ są takie, że $b_1 \circ \alpha_1 + \ldots + b_n \circ \alpha_n = \theta$, to $(a_1 + b_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (a_n + b_n) \circ \alpha_n = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n + \Theta = \beta$, więc $(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$ jest rozwiązaniem układu (3), skąd $a_i + b_i = a_i$, czyli $b_i = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$, a więc wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są liniowo niezależne. $\square$

Z rezultatów uzyskanych dotychczas wynika, że można stosować następujący schemat postępowania dla znalezienia wszystkich rozwiązań układu (3). Najpierw obliczamy $r(A)$ i $r(A_u)$. Jeżeli $r(A) \neq r(A_u)$, to układ (3) nie ma rozwiązania. Jeśli zaś $r = r(A) = r(A_u)$, to układ posiada rozwiązanie. Wyznaczamy wówczas r liniowo niezależnych wierszy w macierzy A_u i wykreślamy wszystkie pozostałe jej wiersze. W otrzymanej macierzy znajdujemy r liniowo niezależnych kolumn. Następnie w przekształconym układzie równań przenosimy na prawą stronę wszystkie niewiadome o numerach pozostałych $n - k$ kolumn i stosujemy wzory Cramera dla obliczenia pozostałych niewiadomych (natomiast niewiadome przenoszone na drugie strony są dowolnymi liczbami).