

Egzamin z algebry liniowej I I rok studia dzienne, 2004 r.

Imię
Nazwisko

Zad.1	Zad.2	Zad.3	Zad.4	Zad.5	Zad.6	Zad.7	Zad.8	Σ

Zadanie 1. Wyznacz wszystkie liczby zespolone z takie, że $(\bar{z})^3 = z^2$.

Zadanie 2. Sformułuj twierdzenie Cramera i zastosuj je do rozwiązania nad ciałem \mathbf{C} układu równań:

$$\begin{cases} (4 + 2i)z + (2 - 3i)w = 5 + 4i \\ (3 - i)z + (4 + 2i)w = 2 + 6i \end{cases}$$

Zadanie 3. Podaj definicję macierzy odwrotnej. Wyznacz macierz odwrotną do macierzy:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_5(\mathbf{R}),$ b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbf{R}).$

Zadanie 4. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiąż nad ciałem \mathbf{R} układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 9x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 10x_6 = 3 \\ - 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 2 \\ - 3x_3 + 2x_4 - 11x_5 - 15x_6 = 1 \end{cases}$$

Zadanie 5. Podaj definicję wyznacznika. Oblicz wyznacznik stopnia n :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 1 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Zadanie 6. Sformułuj twierdzenie Kroneckera-Capelliego i zastosuj je do zbadania dla jakich wartości parametru $a \in \mathbf{R}$ układ równań

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ ax_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$$

ma rozwiązanie w ciele \mathbf{R} .

Zadanie 7. Podaj określenie bazy i wymiaru przestrzeni liniowej. Niech V będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej \mathbf{R}^5 generowaną przez wektory: $[1, -1, 1, -1, 1]$, $[1, 1, 0, 0, 3]$, $[3, 1, 1, -1, 7]$, $[0, 2, -1, 1, 2]$ i niech W będzie hiperpłaszczyzną wyznaczoną przez równanie:

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0.$$

Wyznacz bazę i wymiar przestrzeni liniowej:

a) V , b) W , c) $V + W$, d) $V \cap W$, e) \mathbf{R}^5/V .

Zadanie 8. Znajdź układ jednorodny równań liniowych nad ciałem \mathbf{R} , którego przestrzeń rozwiązań jest generowana przez wektory: $[1, -1, 1, -1, 1]$, $[1, 1, 0, 0, 3]$, $[3, 1, 1, -1, 7]$, $[0, 2, -1, 1, 2]$.