

## Egzamin poprawkowy z algebry liniowej I 2008

Imię .....

Nazwisko .....

Odpowiedzi należy udzielić bezpośrednio pod pytaniem. Za każdą bezbłędną odpowiedź 1 pkt. Jakikolwiek błąd - 0 pkt.

1. Ciałem nazywamy strukturę algebraiczną  $(K, +, \cdot, 0, 1)$  taką, że zbiór  $K$  ma co najmniej ... .. oraz spełnione są następujące aksjomaty:

2. Ciałem liczb zespolonych nazywamy zbiór ..... z wyróżnionymi elementami ..... i ..... oraz z działaniami  $+$  i  $\cdot$  określonymi wzorami:

3. Sformułuj wzór de Moivre'a.

4. Sformułuj twierdzenie o pierwiastkowaniu liczb zespolonych.

5. Sformułuj zasadnicze twierdzenie algebry.

6. Inwersją permutacji  $f \in S_n$  nazywamy .....
7. Znakiem permutacji  $f \in S_n$  nazywamy liczbę  $\text{sgn}(f) = \dots\dots\dots$
8. Wyznacznikiem macierzy  $A = [c_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} \in M_n(K)$  nazywamy:
9. Jeżeli w wyznaczniku zamienimy miejscami kolumnę pierwszą z drugą, a następnie kolumnę drugą z trzecią, to wyznacznik ....
10. Jeżeli  $A \in M_n(K)$ , to  $\det(A^T) = \dots\dots$
11. Jeżeli  $A \in M_n(K)$  oraz  $a \in K$ , to  $\det(a \cdot A) = \dots\dots$
12. Jeżeli  $A \in M_n(K)$ , to dla  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $A_{ij}$  jest .....
13. Podaj wzór na rozwinięcie Laplace'a względem  $k$ -tego wiersza dla macierzy  $B = [b_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} \in M_n(K)$ .
14. Podaj ogólną postać układu  $m$  - równań liniowych z niewiadomymi  $x_1, \dots, x_n$  nad ciałem  $K$ .

15. Sformułuj twierdzenie Cramera.

16. Macierz  $B$ ..... jest macierzą odwrotną do macierzy  $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} \in M_n(K) \Leftrightarrow$  .....

17. Sformułuj twierdzenie Cauchy'ego.

18. Jeżeli  $A \in M_n(K)$ , to  $A \cdot D(A)^T =$  .....

19. Podaj definicję sprzecznego układu równań liniowych z niewiadomymi  $x_1, \dots, x_n$  nad ciałem  $K$ .

20. Zbiór  $V$  (z działaniem  $+$ , operacją  $\circ$  mnożenia przez skalary z ciała  $K$  oraz wyróżnionym elementem  $\Theta$ ) nazywamy *przestrzenią liniową nad ciałem  $K$* , jeśli spełnione są następujące warunki (*aksjomaty przestrzeni liniowych*):

21. Podaj definicję podprzestrzeni przestrzeni liniowej  $V$  nad ciałem  $K$ .

22. Wektory  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  przestrzeni liniowej  $V$  nad ciałem  $K$  są liniowo niezależne  $\Leftrightarrow$  .....

23. Dla dowolnego ciała  $K$  w przestrzeni  $K^\infty$  podaj przykład nieskończonego zbioru wektorów liniowo niezależnego.

24. Dla dowolnych podprzestrzeni  $V_1$  i  $V_2$  przestrzeni liniowej  $V$  nad ciałem  $K$ ,  
 $V_1 + V_2 =$  .....

25.  $\delta \in \text{lin}(\alpha, \beta, \gamma) \Leftrightarrow$  .....

26. Podaj cztery przykłady przestrzeni liniowych nad dowolnym ciałem  $K$ .