Egzamin z algebry liniowej 2003 r.

Część I na ocenę dostateczną

Zadanie 1. Wyznacz wszystkie liczby zespolone z takie, że
a) $z^2 = -8 + 6i$, b) $(-2 + 3i) \cdot z = -21 - i$.

Zadanie 2. Wykonaj podane działania macierzowe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -3 \\ -7 & -6 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiąż nad ciałem $\mathbb{R}$ układ równań:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 9x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 10x_6 = 3 \\ \qquad\quad - 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 2 \\ \qquad\quad - 3x_3 + 2x_4 - 11x_5 - 15x_6 = 1 \end{cases}.$$

Zadanie 4. Stosując rozwinięcie Laplace'a względem drugiej kolumny oblicz wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 3 & a & 5 & 2 \\ 2 & b & 7 & 0 \\ -3 & c & 2 & 0 \\ 5 & d & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Część II na ocenę co najmniej dobrą

Zadanie 5-db. Oblicz rząd macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 7 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & -7 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6-db. Wyznacz macierz odwrotną do macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 7-db. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ dane są podprzestrzenie:
$V = L([1,1,0,0],[0,1,1,0],[0,0,1,1])$ oraz $W = L([1,0,1,0],[0,2,1,1],[1,2,1,2])$.
Wyznacz bazę i wymiar podprzestrzeni:
a) V, b) W, c) $V + W$, d) $V \cap W$.

Zadanie 8-bdb. Znajdź układ jednorodny równań liniowych nad ciałem $\mathbb{R}$, którego przestrzeń rozwiązań jest generowana przez wektory: $[1,-1,1,-1,1]$, $[1,1,0,0,3]$, $[3,1,1,-1,7]$, $[0,2,-1,1,2]$.

Zadanie 9-bdb. Wyznacz wartości i wektory własne nad ciałem $\mathbb{R}$ macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązania zadań

Rozwiązanie Zadania 1. a) Szukaną liczbę z zapiszmy w postaci: $z = x+yi$, gdzie x i y są szukanymi liczbami rzeczywistymi. Wtedy $z^2 = x^2+2xyi-y^2 = (x^2-y^2)+2xyi$. Zatem $x^2-y^2)+2xyi = -8+6i$, skąd $x^2-y^2 = -8$ oraz $2xy = 6$, czyli $\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ xy = 3 \end{cases}$. Poszukujemy rozwiązań naszego układu równań w liczbach całkowitych x, y. Z drugiego równania widzimy, że liczby x, y mają ten sam znak, więc $x = 1$ i $y = 3$ lub $x = 3$ i $y = 1$. Ale po uwzględnieniu pierwszego równania mamy, że $x = 1$ i $y = 3$. Stąd jednym z rozwiąnań równania podanego w treści zadania jest $z_1 = 1+3i$. Zatem drugim rozwiązaniem jest $z_2 = -1-3i$.

Odp. $z = 1+3i$ lub $z = -1-3i$.

b) Mamy, że $z = \frac{-21-i}{-2+3i} = \frac{21+i}{2-3i} = \frac{(21+i)\cdot(2+3i)}{(2-3i)\cdot(2+3i)} == \frac{42+63i+2i-3}{2^2+3^2} = \frac{39+65i}{13} = 3+5i$.

Odp. $z = 3+5i$.

Rozwiązanie Zadania 2. Mamy, że $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, więc $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$. Stąd $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -3 \\ -7 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} +$ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -3 \\ -7 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Odp. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie Zadania 3. B'edziemy wykonywali rachunki na macierzy uzupełniownej naszego układu:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & -9 & 6 & 7 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right] \overset{w_1-3w_3,\ w_2-2w_3}{\equiv} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 40 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right] \overset{x_2 \leftrightarrow x_4}{\equiv}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 40 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 33 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right] \end{array} \overset{w_2 \leftrightarrow w_3}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 40 & 55 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -11 & -15 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 33 & 0 \end{array}\right] \end{array} \overset{x_3 \leftrightarrow x_5}{\equiv}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_4 & x_5 & x_2 & x_3 & x_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 40 & 1 & 0 & 55 & 0 \\ 0 & 2 & -11 & 0 & -3 & -15 & 1 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 33 & 0 \end{array}\right] \end{array} \overset{\frac{1}{2}w_2,\ \frac{1}{24}w_3}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_4 & x_5 & x_2 & x_3 & x_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 40 & 1 & 0 & 55 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{8} & 0 \end{array}\right] \end{array} \overset{w_1-40w_3,\ w_2+\frac{11}{2}w_3}{\equiv}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_4 & x_5 & x_2 & x_3 & x_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{16} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{8} & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Zatem zmiennymi bazowymi są x_2, x_3, x_6 oraz $x_1 = -x_2$, $x_4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{16}x_6$, $x_5 = -\frac{11}{8}x_6$. Stąd mamy następującą odpowiedź:

Odp. Układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań danych wzorami:
$x_1 = -a$, $x_2 = a$, $x_3 = b$, $x_4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}b - \frac{1}{16}c$, $x_5 = -\frac{11}{8}c$, $x_6 = c$, gdzie a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Rozwiązanie Zadania 4. Mamy, że

$$\begin{vmatrix} 3 & a & 5 & 2 \\ 2 & b & 7 & 0 \\ -3 & c & 2 & 0 \\ 5 & d & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot a \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot b \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot c \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{4+2} \cdot d \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -50a + 16b + 44c + 50d, \text{ bo}$$

$$\left|\begin{matrix} 2 & 7 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 7 \\ -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{matrix} = 8 + 0 + 0 - 0 - 0 + 42 = 50,$$

$$\left|\begin{matrix} 3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 5 \\ -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{matrix} = 12 + 0 - 6 - 20 - 0 + 30 = 16,$$

$$\left|\begin{matrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{matrix} = 42 + 0 + 4 - 70 - 0 - 20 = -44,$$

$$\left|\begin{matrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \\ -3 & 2 \end{matrix} = 0 + 0 + 8 + 42 - 0 - 0 = 50.$$

Odp. $-50a + 16b + 44c + 50d$.

Rozwiązanie Zadania 5. Mamy, że

$$r(A) \overset{w_1-3w_3,\ w_2-5w_3,\ w_4-7w_3}{\equiv} r\begin{bmatrix} 0 & 8 & 18 & 28 & 26 \\ 0 & 12 & 27 & 42 & 39 \\ 1 & -3 & -5 & -7 & -7 \\ 0 & 16 & 36 & 54 & 50 \end{bmatrix} = 1 + r\begin{bmatrix} 8 & 18 & 28 & 26 \\ 12 & 27 & 42 & 39 \\ 16 & 36 & 54 & 50 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}w_1,\ \frac{1}{3}w_2,\ \frac{1}{2}w_3}{\equiv}$$

$$1 + r\begin{bmatrix} 4 & 9 & 14 & 13 \\ 4 & 9 & 14 & 13 \\ 8 & 18 & 27 & 25 \end{bmatrix} = 1 + r\begin{bmatrix} 4 & 9 & 14 & 13 \\ 8 & 18 & 27 & 25 \end{bmatrix} = 1 + 2 = 3,$$ bo ostatnia 2×4 macierz ma niezerowy minor $\begin{vmatrix} 4 & 14 \\ 8 & 27 \end{vmatrix} = 4 \cdot 27 - 8 \cdot 14 = -4.$

Odp. $r(A) = 3$.

Rozwiązanie Zadania 6. Stosując operacje elementarne na wierszach macierzy $[A|I_4]$ przekształcimy ją do postaci $[I_4|A^{-1}]$.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{w_3-w_1,\ w_4-3w_1}{\equiv} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{w_2 \leftrightarrow w_3}{\equiv}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{w_4-w_2}{\equiv} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{(-1)w_4}{\equiv}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{w_1-w_4,\ w_3-w_4}{\equiv} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{2}w_3}{\equiv}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{w_2-w_3}{\equiv} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$. Zatem mamy następującą odpowiedź:

Odp. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie Zadania 7. Ponieważ rząd macierzy układu wektorów generujących podprzestrzeń V jest równy $r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3$, więc bazą V jest $\{[1,1,0,0],[0,1,1,0],[0,0,1,1]\}$ oraz $\dim V = 3$.
Znajdujemy teraz równanie hiperpłaszczyzny V. Jest ono postaci: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$, gdzie $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ jest niezerowym rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \\ a_3 + a_4 = 0 \end{cases}.$$

Wystarczy wziąć: $a_4 = 1$, $a_3 = -1$, $a_2 = 1$, $a_1 = -1$. Zatem równaniem hiperpłaszczyzny V jest

$$-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

Znajdujemy bazę podprzestrzeni W:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{w_3-w_1}{\equiv} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}w_3}{\equiv} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{w_2 \leftrightarrow w_3}{\equiv} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{w_3-2w_2}{\equiv} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$
Zatem bazą W jest $\{[1,0,1,0],[0,1,0,1],[0,0,1,-1]\}$ oraz $\dim W = 3$.

Znajdujemy równanie $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0$ hiperpłaszczyzny W:

$$\begin{cases} b_1 + b_3 = 0 \\ b_2 + b_4 = 0 \\ b_3 - b_4 = 0 \end{cases}.$$

Wystarczy wziąć: $b_4 = 1$, $b_3 = 1$, $b_2 = -1$, $b_1 = -1$ i szukane równanie hiperpłaszczyzny W ma postać:

$$-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Stąd podprzestrzeń $V \cap W$ jest zbiorem rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Rozwiązujemy ten układ metodą eliminacji Gaussa:
$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{w_2-w_1}{\equiv} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{(-1)w_1,\, (-\frac{1}{2})w_2}{\equiv} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{w_1+w_2}{\equiv}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$ Zatem zmiennymi bazowymi są x_3 i x_4. Stąd $x_3 = t$, $x_4 = s$, $x_2 = t$, $x_1 = s$, gdzie $t, s \in \mathbb{R}$. Zatem $V \cap W = \{[s,t,t,s] : s,t \in \mathbb{R}\} = \{[s,0,0,s] + [0,t,t,0] : t,s \in \mathbb{R}\} = \{s\circ[1,0,0,1] + t\circ[0,1,1,0] : s,t \in \mathbb{R}\} = L([1,0,0,1],[0,1,1,0])$, czyli bazą $V \cap W$ jest $\{[1,0,0,1],[0,1,1,0]\}$ oraz $\dim(V \cap W) = 2$.

Stąd $\dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W) = 3+3-2 = 4$ i $V+W$ jest podprzestrzenią przestrzeni cztero wymiarowej $\mathbb{R}^4$, więc $V+W = \mathbb{R}^4$ oraz bazą $V+W$ jest $\{[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]\}$.

Rozwiązanie Zadania 8. Znajdujemy najpierw bazę podprzestrzeni V generowanej przez wektory: $[1,-1,1,-1,1]$, $[1,1,0,0,3]$, $[3,1,1,-1,7]$, $[0,2,-1,1,2]$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{w_2-w_1,\ w_3-3w_1}{\equiv} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{w_2+w_4,\ w_3+w_4}{\equiv} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \equiv$$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Zatem bazą V jest $\{[1,1,0,0,3],[0,2,-1,1,2]\}$ oraz $\dim V = 2$. Ponieważ nasze wektory mają 5 współrzędnych, więc szukany układ równań będzie się składał z $5-2=3$ równań. Ponadto bazą przestrzeni $\mathbb{R}^5$ jest $\{[1,1,0,0,3],[0,2,-1,1,2],[0,0,1,0,0],[0,0,0,1,0],[0,0,0,0,1]\}$, więc istnieje przekształcenie liniowe $f:\mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ takie, że

$$f([1,1,0,0,3]) = [0,0,0], \tag{1}$$

$$f([0,2,-1,1,2]) = [0,0,0], \tag{2}$$

$$f([0,0,1,0,0]) = [1,0,0], \tag{3}$$

$$f([0,0,0,1,0]) = [0,1,0], \tag{4}$$

$$f([0,0,0,0,1]) = [0,0,1]. \tag{5}$$

Ponieważ wektory $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz należą do $f(\mathbb{R}^5)$, więc $f(\mathbb{R}^5) = \mathbb{R}^3$, czyli $\dim f(\mathbb{R}^5) = 3$. Ale $5 = \dim\mathbb{R}^5 = \dim Ker(f) + \dim f(\mathbb{R}^5)$, więc $\dim Ker(f) = 5-3 = 2$. Ponato z (1) i (2) mamy, że $V = L([1,1,0,0,3],[0,2,-1,1,2]) \subseteq Ker(f)$ oraz $\dim V = 2$, więc $V = Ker(f)$. Pozostaje zatem wyznaczyć wzór analityczny na takie przekształcenie f. Niech $\epsilon_1 = [1,0,0,0,0]$, $\epsilon_2 = [0,1,0,0,0]$, $\epsilon_3 = [0,0,1,0,0]$, $\epsilon_4 = [0,0,0,1,0]$, $\epsilon_5 = [0,0,0,0,1]$. Wtedy dla dowolnych $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \in \mathbb{R}$: $[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5] = x_1\circ\epsilon_1 + x_2\circ\epsilon_2 + x_3\circ\epsilon_3 + x_4\circ\epsilon_4 + x_5\circ\epsilon_5$. Zatem z liniowości przekształcenia f mamy, że $f([x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]) = x_1\circ f(\epsilon_1) + x_2\circ f(\epsilon_2) + x_3\circ f(\epsilon_3) + x_4\circ f(\epsilon_4) + x_5\circ f(\epsilon_5)$.

Ze wzoru (2) mamy, że $2\circ f(\epsilon_2) - f(\epsilon_3) + f(\epsilon_4) + 2\circ f(\epsilon_5) = [0,0,0]$, więc $2\circ f(\epsilon_2) - [1,0,0] + [0,1,0] + 2\circ[0,0,1] = [0,0,0]$, skąd $f(\epsilon_2) = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1]$.

Ze wzoru (1) mamy, że $f(\epsilon_1) + f(\epsilon_2) + 3\circ f(\epsilon_5) = [0,0,0]$, czyli $f(\epsilon_1) + [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1] + 3\circ[0,0,1] = [0,0,0]$, skąd $f(\epsilon_1) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2]$.

Stąd $f([x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]) = x_1\circ[-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-2] + x_2\circ[\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1] + x_3\circ[1,0,0] + x_4\circ[0,1,0] + x_5\circ[0,0,1] = [-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3, \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_4, -2x_1 - x_2 + x_5]$.

Zatem $V = Ker(f)$ jest zbiorem rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

Rozwiązanie Zadania 9. Wyznaczamy najpierw wielomian charakterystyczny naszej macierzy:

$$\begin{vmatrix} 7-a & -12 & 6 \\ 10 & -19-a & 10 \\ 12 & -24 & 13-a \end{vmatrix} \overset{k_1+k_2+k_3}{=} \begin{vmatrix} 1-a & -12 & 6 \\ 1-a & -19-a & 10 \\ 1-a & -24 & 13-a \end{vmatrix} \overset{w_2-w_1,\ w_3-w_1}{=} \begin{vmatrix} 1-a & -12 & 6 \\ 0 & -7-a & 4 \\ 0 & -12 & 7-a \end{vmatrix} =$$

$(-1)^{1+1}\cdot(1-a)\cdot\begin{vmatrix} -7-a & 4 \\ -12 & 7-a \end{vmatrix} = (1-a)\cdot[(-7-a)\cdot(7-a)+48] = (1-a)\cdot(a^2-1)$. Zatem pierwiastkami wielomianu charakterystycznego są jedynie liczby : $a_1 = 1$ i $a_2 = -1$. Stąd wartościami własnymi macierzy A są liczby $a_1 = 1$ i $a_2 = -1$.

Znajdujemy wektory własne odpowiadające wartości własnej $a_1 = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 6x_1 & - & 12x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \\ 10x_1 & - & 20x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \\ 12x_1 & - & 24x_2 & + & 12x_3 & = & 0 \end{array}\right. \overset{\frac{1}{6}r_1,\ \frac{1}{10}r_2,\ \frac{1}{12}r_3}{\equiv} \left\{\begin{array}{rcrccl} x_1 & - & 2x_2 & + & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & = & 0 \end{array}\right. \equiv x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

Stąd $x_3 = t$, $x_2 = s$, $x_1 = 2s - t$, $t, s \in \mathbb{R}$. Ogólna postać wektora własnego odpowiadającego wartości własnej $a_1 = 1$: $[2s - t, s, t]$, gdzie $s, t \in \mathbb{R}$ oraz $t \neq 0$ lub $s \neq 0$. Bazą podprzestrzeni generowanej przez wektory własne odpowiadające wartości własnej $a_1 = 1$ jest $\{[2, 1, 0], [-1, 0, 1]\}$.

Znajdujemy wektory własne odpowiadające wartości własnej $a_2 = -1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 8x_1 & - & 12x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \\ 10x_1 & - & 18x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \\ 12x_1 & - & 24x_2 & + & 14x_3 & = & 0 \end{array}\right. \overset{\frac{1}{2}r_1,\ \frac{1}{2}r_2,\ \frac{1}{2}r_3}{\equiv} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ 6x_1 & - & 12x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \end{array}\right. \overset{r_2-r_1,\ r_3-r_1}{\equiv}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array}\right. \overset{r_1\leftrightarrow r_2,\ \frac{1}{2}r_3}{\equiv} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right. \overset{r_2-4r_1}{\equiv}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & 6x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \end{array}\right. \overset{\frac{1}{6}r_2}{\equiv} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & \frac{5}{6}x_3 & = & 0 \end{array}\right. \overset{r_1+3r_2}{\equiv}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & - & \frac{1}{2}x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & \frac{5}{6}x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

. Zatem $x_3 = 6t$, $x_1 = 3t$, $x_2 = 5t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$. Ogólna postać wektora własnego odpowiadającego wartości własnej $a_2 = -1$: $[3t, 5t, 6t]$, gdzie $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Baza podprzestrzeni generowanej przez wektory własne odpowiadające wartości własnej $a_2 = -1$: $\{[3, 5, 6]\}$.