Zadania o liczbach zespolonych

Zadanie 1. Znaleźć takie liczby rzeczywiste a i b, aby zachodziły równości:
a) $a(2+3i)+b(4-5i)=6-2i$, b) $a(-\sqrt{2}+i)+b(3\sqrt{2}+5i)=8i$, c) $a(4-3i)^2+b(1+i)^2=7-12i$, d) $\frac{a}{2-3i}+\frac{b}{3+2i}=1$, e) $a\frac{2+i}{3-i}+b\left(\frac{4-i}{1-3i}\right)^2=1+i$, f) $\frac{2a-3i}{5-3i}+\frac{3b+2i}{3-5i}=0$.

Rozwiązanie. a) Przedstawiamy lewą stronę równości w postaci algebraicznej: $a(2+3i)+b(4-5i)=(2a+4b)+(3a-5b)i$. Ponieważ $a,b\in\mathbb{R}$, więc z warunku równości liczb zespolonych mamy układ równań: $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2a & + & 4b & = & 6 \\ 3a & - & 5b & = & -2 \end{array}\right.$. Rozwiązujemy go metodą wyznaczników:
$W=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=-10-12=-22$, $W_b=\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}=-30+8=-22$. $W_b=\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-4-18=-22$. Zatem nasz układ ma dokładnie jedno rozwiązanie $a=\frac{W_a}{W}=\frac{-22}{-22}=1$ oraz $b=\frac{W_b}{W}=\frac{-22}{-22}=1$.

Odp. $a=b=1$.

b) Przedstawmy lewą stronę równości w postaci algebraicznej: $a(-\sqrt{2}+i)+b(3\sqrt{2}+5i)=(-\sqrt{2}a+3\sqrt{2}b)+(a+5b)i$, więc z warunku równości liczb zespolonych mamy układ równań: $\left\{\begin{array}{rcrcr} -\sqrt{2}a & + & 3\sqrt{2}b & = & 0 \\ a & + & 5b & = & 8 \end{array}\right.$, który jest równoważny układowi $\left\{\begin{array}{rcrcr} -a & + & 3b & = & 0 \\ a & + & 5b & = & 8 \end{array}\right.$. Z pierwszego równania $a=3b$, więc po podstawieniu do drugiego równania $3b+5b=8$, skąd $b=1$ i $a=3b=3$.

Odp. $a=3$ i $b=1$.

c) Obliczamy $(4-3i)^2=16-24i+9i^2=16-24i-9=7-24i$, $(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i$. Teraz zapisujemy lewą stronę równości w postaci algebraicznej: $a(4-3i)^2+b(1+i)^2=a(7-24i)+b\cdot 2i=7a+(-24a+2b)i$. Zatem z warunku równości liczb zespolonych mamy, że $7a=7$ i $-24a+2b=-12$. Stąd $a=1$ oraz $-24+2b=-12$, czyli $2b=12$ i $b=6$.

Odp. $a=1$ i $b=6$.

d) Obliczamy $\frac{1}{2-3i}=\frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{2+3i}{2^2+3^2}=\frac{2+3i}{13}$, $\frac{1}{3+2i}=\frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{3-2i}{3^2+2^2}=\frac{3-2i}{13}$, więc nasze równanie możemy zapisać w postaci: $a(2+3i)+b(3-2i)=13$, czyli $(2a+3b)+(3a-2b)i=13$, skąd $2a+3b=13$ i $3a-2b=0$. Zatem $b=\frac{3}{2}a$ oraz $2a+\frac{9}{2}a=13$, skąd $\frac{13}{2}a=13$, więc $a=2$ oraz $b=\frac{3}{2}\cdot 2=3$.

Odp. $a=2$ i $b=3$.

e) Obliczamy: $\frac{2+i}{3-i}=\frac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{6+2i+3i+i^2}{3^2+1^2}=\frac{5+5i}{10}=\frac{1+i}{2}$, $\frac{4-i}{1-3i}=\frac{(4-i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{4+12i-i-3i^2}{1^2+3^2}=\frac{7+11i}{10}$, więc $\left(\frac{4-i}{1-3i}\right)^2=\frac{(7+11i)^2}{100}=\frac{49+154i+121i^2}{100}=\frac{-72+154i}{100}=\frac{-18+36i}{25}$. Zatem nasze równanie przybiera postać: $a\frac{1+i}{2}+b\frac{-18+36i}{25}=1+i$. Ale $\frac{-18+36i}{1+i}=\frac{(-18+36i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-18+18i+36i-36i^2}{1^2+1^2}=\frac{18+54i}{2}=9+27i$, więc nasze równanie przybiera postać: $\frac{1}{2}a+b\frac{9+27i}{25}=1$. Zatem $25a+2b(9+27i)=50$, czyli $(25a+18b)+54bi=50$. Ale $a,b\in\mathbb{R}$, więc stąd $25a+18b=50$ i $54b=0$, czyli $b=0$ i $a=2$.

Odp. $a=2$ i $b=0$.

f) Obliczamy: $\frac{2a-3i}{5-3i}=\frac{(2a-3i)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)}=\frac{10a+6ai-15i-9i^2}{5^2+3^2}=\frac{(10a+9)+(6a-15)i}{34}$, $\frac{3b+2i}{3-5i}=\frac{(3b+2i)(3+5i)}{(3-5i)(3+5i)}=\frac{9b+15bi+6i+10i^2}{3^2+5^2}=\frac{(9b-10)+(15b+6)i}{34}$. Zatem nasze równanie przybiera postać: $[(10a+9)+(6a-15)i]+[(9b-10)+(15b+6)i]=0$. Zatem $(10a+9b-1)+(6a+15b-9)i=0$, skąd z tego, że $a,b\in\mathbb{R}$, $10a+9b-1=0$ i $6a+15b-9=0$. Mamy zatem układ równań: $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2a & + & 5b & = & 3 \\ 10a & + & 9b & = & 1 \end{array}\right.$. Po odjęciu od drugiego równania, równania pierwszego pomnożonego przez 5 uzyskamy, że $-16b==-14$, skąd $b=\frac{7}{8}$. Zatem $2a+5\cdot\frac{7}{8}=3$, skąd $a=-\frac{11}{16}$.

Odp. $a=-\frac{11}{16}$ i $b=\frac{7}{8}$.

Zadanie 2. Przedstaw w postaci algebraicznej następujące liczby zespolone:
a) $(2+i)\cdot(4-i)+(1+2i)\cdot(3+4i)$, b) $\frac{(3+i)\cdot(7-6i)}{3+i}$, c) $(1+2i)\cdot i+\frac{2+3i}{1-4i}$, d) $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$.

Rozwiązanie. a) $(2+i)\cdot(4-i)+(1+2i)\cdot(3+4i)=8-2i+4i-i^2+3+4i+6i+12i^2=12i$.

b)$\frac{(3+i)\cdot(7-6i)}{3+i} = 7-6i$. c) Mamy, że $(1+2i)\cdot i = i+2i^2 = -2+i$, $\frac{2+3i}{1-4i} = \frac{(2+3i)(1-4i)}{(1-4i)(1+4i)} = \frac{2+8i+3i+12i^2}{1^2+4^2} = \frac{-10+11i}{17} = -\frac{10}{17}+\frac{11}{17}i$. Zatem $(1+2i)\cdot i + \frac{2+3i}{1-4i} = -2+i-\frac{10}{17}+\frac{11}{17}i = -\frac{44}{17}+\frac{28}{17}i$. d) Mamy, że $(1+3i)(8-i) = 8-i+24i-3i^2 = 11+23i$, $(2+i)^2 = 4+4i+i^2 = 3+4i$. Zatem $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2} = \frac{11+23i}{3+4i} = \frac{(11+23i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{33-44i+69i-92i^2}{3^2+4^2} = \frac{125+25i}{25} = 5+i$.

Zadanie 3. Przedstawić w postaci algebraicznej rozwiązania następujących równań liniowych z jedną niewiadomą z:
a) $(a-bi)z = a+bi$, b) $(a+bi)^2(1-z)+(a-bi)^2(1+z) = 0$, c) $(a+bi)z = (2a+3b)+(2b-3a)i$, d) $(1-i)z = (2a-b)-(2a+b)i$.

Rozwiązanie. a) $z = \frac{a+bi}{a-bi} = \frac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a^2+2abi+b^2i^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i$. b) Mamy, że $(a+bi)^2 = a^2+2abi+b^2i^2 = a^2-b^2+2abi$, $(a-bi)^2 = a^2-2abi+b^2i^2 = a^2-b^2-2abi$. Zatem nasze równanie przybiera postać: $a^2-b^2+2abi-(a^2-b^2+2abi)z+a^2-b^2-2abi+(a^2-b^2-2abi)z = 0$, czyli $2a^2-2b^2+4abiz = 0$, skąd $z = \frac{a^2-b^2}{4abi} = \frac{(a^2-b^2)(-i)}{4abi(-i)} = \frac{b^2-a^2}{4ab}i$. c) Zauważmy, że $(2a+3b)+(2b-3a)i = 2(a+bi)+3(b-ai) = 2(a+bi)-3i(a+bi)$, skąd $z = 2-3i$. d) Zauważmy, że $(2a-b)-(2a+b)i = 2a(1-i)-bi(1-i)$, więc $z = 2a-bi$.

Zadanie 4. Przedstawić w postaci algebraicznej rozwiązania następujących układów dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

a) $\begin{cases} 2(2+i)z - i(3+2i)w = 5+4i \\ (3-i)z + 2(2+i)w = 2(1+3i) \end{cases}$, b) $\begin{cases} (4-3i)z + (2+i)w = 5(1+i) \\ (2-i)z - (2+3i)w = -(1+i) \end{cases}$,

c) $\begin{cases} (2+i)z + (2-i)w = 6b-a+(2a-3b)i \\ (1-i)z + (3+i)w = a+9b+(a+3b)i \end{cases}$ $(a,b\in\mathbb{R})$, d) $\begin{cases} \frac{z}{2-i} + \frac{w}{1+i} = 2 \\ \frac{5z}{(2-i)^2} + \frac{2w}{(1+i)^2} = 3 \end{cases}$,

e) $\begin{cases} (1+i)z + (1-i)w = 1+i \\ (1-i)z + (1+i)w = 1+3i \end{cases}$.

Rozwiązanie. a) Stosujemy metodę wyznaczników.

$W = \begin{vmatrix} 4+2i & 2-3i \\ 3-i & 4+2i \end{vmatrix} = (4+2i)^2-(3-i)\cdot(2-3i) = 16+16i+4i^2-(6-9i-2i+3i^2) = 16+16i-4-(6-11i-3) = 12+16i-3+11i = 9+27i$.

$W_z = \begin{vmatrix} 5+4i & 2-3i \\ 2+6i & 4+2i \end{vmatrix} = (5+4i)\cdot(4+2i)-(2-3i)\cdot(2+6i) = 20+10i+16i+8i^2-(4+12i-6i-18i^2) = 20+26i-8-(4+6i+18) = 12+26i-22-6i = -10+20i$.

$W_w = \begin{vmatrix} 4+2i & 5+4i \\ 3-i & 2+6i \end{vmatrix} = (4+2i)\cdot(2+6i)-(5+4i)\cdot(3-i) = 8+24i+4i+12i^2-(15-5i+12i-4i^2) = 8+28i-12-(15+7i+4) = -4+28i-19-7i = -23+21i$. Zatem $z = \frac{W_z}{W} = \frac{-10+20i}{9+27i} = \frac{10}{9}\cdot\frac{-1+2i}{1+3i} = \frac{10}{9}\cdot\frac{(-1+2i)\cdot(1-3i)}{(1+3i)\cdot(1-3i)} = \frac{10}{9}\cdot\frac{-1+3i+2i-6i^2}{1^2+3^2} = \frac{10}{9}\cdot\frac{-1+5i+6}{10} = \frac{5+5i}{9} = \frac{5}{9}+\frac{5}{9}i$ oraz $w = \frac{W_w}{W} = \frac{1}{9}\cdot\frac{-23+21i}{1+3i} = \frac{1}{9}\cdot\frac{(-23+21i)\cdot(1-3i)}{(1+3i)\cdot(1-3i)} = \frac{1}{9}\cdot\frac{-23+69i+21i-63i^2}{1^2+3^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{-23+90i+63}{10} = \frac{40+90i}{90} = \frac{40}{90}+\frac{90}{90}i = \frac{4}{9}+i$.

Odp. $z = \frac{5}{9}+\frac{5}{9}i$ oraz $w = \frac{4}{9}+i$.

b) Obliczamy wyznacznik główny W naszego układu:

$W = \begin{vmatrix} 4-3i & 2+i \\ 2-i & -2-3i \end{vmatrix} = (4-3i)\cdot(-2-3i)-(2-i)\cdot(2+i) = -8-12i+6i+9\cdot(-1)-[2^2-(-1)] = -17-6i-5 = -22-6i$. Zatem $W = -22-6i \neq 0$ i z twierdzenia Cramera układ nasz posiada dokładnie jedno rozwiązanie.

$W_z = \begin{vmatrix} 5+5i & 2+i \\ -1-i & -2-3i \end{vmatrix} = (5+5i)\cdot(-2-3i)-(2+i)\cdot(-1-i) = -10-15i-10i-15\cdot(-1)+2+2i+i+(-1) = 6-22i$. Zatem ze wzorów Cramera: $z = \frac{W_z}{W} = \frac{6-22i}{-22-6i} = \frac{i\cdot(-22-6i)}{-22-6i} = i$, czyli $z = i$.

$W_w = \begin{vmatrix} 4-3i & 5+5i \\ 2-i & -1-i \end{vmatrix} = (4-3i)\cdot(-1-i)-(5+5i)\cdot(2-i) = -4-4i+3i+3\cdot(-1)-10+5i-10i+5\cdot(-1) = -22-6i$. Zatem ze wzorów Cramera: $w = \frac{W_w}{W} = \frac{-22-6i}{-22-6i} = 1$, czyli $w = 1$.

Odp. Układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie: $z = i$, $w = 1$.

c) Stosujemy metodę wyznaczników.

$W = \begin{vmatrix} 2+i & 2-i \\ 1-i & 3+i \end{vmatrix} = (2+i)\cdot(3+i)-(1-i)\cdot(2-i) = 6+2i+3i+i^2-(2-i-2i+i^2) = 6+5i-1-(2-3i-1) = 5+5i-1+3i = 4+8i.$

$W_z = \begin{vmatrix} 6b-a+(2a-3b)i & 2-i \\ a+9b+(a+3b)i & 2+i \end{vmatrix} \overset{k_1-3bk_2}{=} \begin{vmatrix} -a+2ai & 2-i \\ a+ai & 3+i \end{vmatrix} = (-a+2ai)\cdot(3+i)-(a+ai)\cdot(2-i) = -3a-ai+6ai+2ai^2-(2a-ai+2ai-ai^2) = -3a+5ai-2a-(2a+ai+a) = -5a+5ai-3a-ai = -8a+4ai.$

$W_w = \begin{vmatrix} 2+i & 6b-a+(2a-3b)i \\ 1-i & a+9b+(a+3b)i \end{vmatrix} \overset{k_2-aik_1}{=} \begin{vmatrix} 2+i & 6b-3bi \\ 1-i & 9b+3bi \end{vmatrix} = (2+i)\cdot(9b+3bi)-(1-i)\cdot(6b-3bi) = 18b+6bi+9bi+3bi^2-(6b-3bi-6bi+3bi^2) = 18b+15bi-3b-(6b-9bi-3b) = 15b+15bi-3b+9bi = 12b+24bi.$

Zatem $z = \frac{W_z}{W} = \frac{-8a+4ai}{4+8i} = \frac{8ai^2+4ai}{4+8i} = \frac{ai(4+8i)}{4+8i} = ai$, $w = \frac{W_w}{W} = \frac{12b+24bi}{4+8i} = \frac{3b(4+8i)}{4+8i} = 3b$.

Odp. $z = ai$ oraz $w = 3b$.

d) Mamy, że $\frac{1}{2-i} = \frac{2+i}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i}{2^2+1^2} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$, $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$, $\frac{5}{(2-i)^2} = \frac{(2-i)(2+i)}{(2-i)^2} = \frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)^2}{(2-i)(2+i)} = \frac{4+4i+i^2}{2^2+1^2} = \frac{4+4i-1}{5} = \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$, $\frac{2}{(1+i)^2} = \frac{2}{1+2i+i^2} = \frac{2}{1+2i-1} = \frac{2}{2i} = \frac{-2i^2}{2i} = -i$. Zatem nasz układ ma postać:

$$\begin{cases} (\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i)z & + & (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)w & = & 2 \\ (\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i)z & - & iw & = & 3 \end{cases}.$$

Rozwiążemy go metodą wyznaczników:

$W = \begin{vmatrix} \frac{2}{5}+\frac{1}{5}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \\ \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i & -i \end{vmatrix} = -\frac{2}{5}i-\frac{1}{5}i^2-(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i)(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i) = -\frac{2}{5}i+\frac{1}{5}-\frac{3}{10}+\frac{3}{10}i-\frac{4}{10}i+\frac{4}{10}i^2 = -\frac{4}{10}i+\frac{2}{10}-\frac{3}{10}+\frac{3}{10}i-\frac{4}{10}i-\frac{4}{10} = -\frac{5}{10}-\frac{5}{10}i = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i,$

$W_z = \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \\ 3 & -i \end{vmatrix} = -2i-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i = -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i,$

$W_w = \begin{vmatrix} \frac{2}{5}+\frac{1}{5}i & 2 \\ \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i)-2\cdot(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i) = \frac{6}{5}+\frac{3}{5}i-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i = -\frac{5}{5}i = -i.$ Zatem $z = \frac{W_z}{W} = \frac{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i} = \frac{3-i}{1+i} = \frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-3i-i+i^2}{1^2+1^2} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$ oraz $w = \frac{W_w}{W} = \frac{-i}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i} = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$.

Odp. $z = 1-2i$ oraz $w = 1+i$.

e) Stosujemy metodę wyznaczników:

$W = \begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{vmatrix} = (1+i)^2-(1-i)^2 = 1+2i+i^2-(1-2i+i^2) = 4i,$

$W_z = \begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 1+3i & 1+i \end{vmatrix} = (1+i)^2-(1+3i)(1-i) = 1+2i+i^2-(1-i+3i-3i^2) = 1+2i-1-(1+2i+3) = -4,$

$W_w = \begin{vmatrix} 1+i & 1+i \\ 1-i & 1+3i \end{vmatrix} = (1+i)(1+3i)-(1+i)(1-i) = (1+i)(1+3i-i+i) = (1+i)\cdot 4i = 4i+4i^2 = -4+4i.$

Zatem $z = \frac{W_z}{W} = \frac{-4}{4i} = \frac{4i^2}{4i} = i$ oraz $w = \frac{W_w}{W} = \frac{-4+4i}{4i} = \frac{4i^2+4i}{4i} = i+1 = 1+i$.

Odp. $z = i$ oraz $w = 1+i$.

Zadanie 5. Udowodnij tożsamości:

a) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$, b) $|1+z_1\overline{z_2}|^2+|z_1-z_2|^2 = (1+|z_1|^2)\cdot(1+|z_2|^2)$,

c) $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2+2re(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2$, d) $\frac{|1-z^2|^2-|z-\overline{z}|^2}{|1+z^2|^2+|z-\overline{z}|^2} = \left(\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right)^2$.

Rozwiązanie. Będziemy korzystali z tego, że $z\cdot\overline{z} = |z|^2$ dla dowolnej liczby zespolonej z.

a) $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{z_1+z_2} = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}$, $|z_1-z_2|^2 = (z_1-z_2)\overline{z_1-z_2} = (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2}) = z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}$. Zatem $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2(z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}) = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$, cnd.

b) $|1 + z_1\overline{z_2}|^2 = (1 + z_1\overline{z_2})\overline{1 + z_1\overline{z2}} = (1 + z_1\overline{z_2})(1 + \overline{z_1\overline{z2}}) = (1 + z_1\overline{z_2})(1 + \overline{z_1}z_2) = 1 + \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} + z_1\overline{z_2}z_2\overline{z_2} = 1 + \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} + |z_1|^2|z_2|^2$, $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)\overline{z_1 - z_2} = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}$. Zatem $|1+z_1\overline{z_2}|^2+|z_1-z_2|^2 = 1+|z_1|^2+|z_2|^2+|z_1|^2|z_2|^2 = (1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)$, cnd.

c) Dla dowolnej liczby zespolonej z mamy, że $z + \overline{z} = 2re(z)$. Ponadto $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{z_1 + z_2} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$ oraz $\overline{z_1}z_2 = \overline{z_1\overline{z_2}}$, więc $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2$, cnd.

d) Mamy, że $|1 - z^2|^2 = (1 - z^2)\overline{(1 - z^2)} = (1 - z^2)(1 - \overline{z}^2) = 1 - \overline{z}^2 - z^2 + (z\overline{z})^2 = 1 - \overline{z}^2 - z^2 + |z|^4$ oraz $|z - \overline{z}|^2 = (z - \overline{z})\overline{(z - \overline{z})} = (z - \overline{z})(\overline{z} - z) = z\overline{z} - z^2 - \overline{z}^2 + \overline{z}z = 2|z|^2 - z^2 - \overline{z}^2$. Zatem $|1 - z^2|^2 - |z - \overline{z}|^2 = 1 - \overline{z}^2 - z^2 + |z|^4 - 2|z|^2 + z^2 + \overline{z}^2 = 1 - 2|z|^2 + |z|^4 = (1 - |z|^2)^2$. Ponadto $|1 + z^2|^2 = (1 + z^2)\overline{(1 + z^2)} = (1 + z^2)(1 + \overline{z}^2) = 1 + \overline{z}^2 + z^2 + (z\overline{z})^2 = 1 + \overline{z}^2 + z^2 + |z|^4$, więc $|1 + z^2|^2 + |z - \overline{z}|^2 = 1 + \overline{z}^2 + z^2 + |z|^4 + 2|z|^2 - z^2 - \overline{z}^2 = 1 + 2|z|^2 + |z|^4 = (1 + |z|^2)^2$. Stąd $\frac{|1-z^2|^2-|z-\overline{z}|^2}{|1+z^2|^2+|z-\overline{z}|^2} = \frac{(1-|z|^2)^2}{(1+|z|^2)^2} = \left(\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right)^2$, cnd.

Zadanie 6. Rozwiąż równania:

a) $|z| - z = 1 + 2i$, b) $|z| + z = 2 + i$, c) $z\overline{z} + (z - \overline{z}) = 3 + 2i$, d) $i(z + \overline{z}) + i(z - \overline{z}) = 2i - 3$, e) $z^2 = \overline{z}$, f) $|z| + 2iz = 11 + 8i$.

Rozwiązanie. a) Mamy, że $z = x + yi$ dla pewnych $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, więc nasze równanie przybiera postać: $(\sqrt{x^2 + y^2} - x) - yi = 1 + 2i$. Stąd $\sqrt{x^2 + y^2} - x = 1$ oraz $-y = 2$. Zatem $y = -2$ oraz $\sqrt{x^2 + 4} = x + 1$, czyli $x^2 + 4 = x^2 + 2x + 1$, skąd $x = \frac{3}{2}$.

Odp. $x = \frac{3}{2}$ oraz $y = -2$.

b) Mamy, że $z = x + yi$ dla pewnych $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, więc nasze równanie przybiera postać: $(\sqrt{x^2 + y^2} + x) + yi = 2 + i$. Stąd $\sqrt{x^2 + y^2} + x = 2$ oraz $y = 1$. Zatem $\sqrt{x^2 + 1} = 2 - x$, czyli $x^2 + 1 = 4 - 4x + x^2$, skąd $x = \frac{3}{4}$.

Odp. $x = \frac{3}{4}$ oraz $y = 1$.

c) Mamy, że $z = x + yi$ dla pewnych $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy $z\overline{z} = x^2 + y^2$, $z - \overline{z} = x + yi - (x - yi) = 2yi$, wię c nasze równanie przybiera postać: $(x^2 + y^2) + 2xyi = 3 + 2i$. Zatem $x^2 + y^2 = 3$ oraz $2xy == 2$. Zatem $x^2 + 2xy + y^2 = 5$, czyli $(x + y)^2 = 5$, skąd $x + y = \sqrt{5}$ lub $x + y = -\sqrt{5}$. Ale $xy = 1$, więc $y = \sqrt{5} - x$ lub $y = -\sqrt{5} - x$ oraz $x(\sqrt{5} - x) = 1$ lub $x(-\sqrt{5} - x) = 1$. Zatem $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ lub $x^2 + \sqrt{5}x + 1 = 0$. Z pierwszego równania otrzymujemy, że $x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ oraz $y_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $y_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Natomiast z drugiego równania otrzymujemy, że $x_3 = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}$, $x_4 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, czyli $y_3 = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}$, $y_4 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Odp. $z = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{2}i$ lub $z = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}i$ lub $z = \frac{-\sqrt{5}+1}{2} + \frac{-\sqrt{5}+1}{2}i$ lub $z = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}i$.

d) Mamy, że $i(z + \overline{z}) + i(z - \overline{z}) = i(z + \overline{z} + z - \overline{z}) = 2i \cdot z$. Zatem nasze równanie przybiera postać: $2i \cdot z = -3 + 2i$, czyli $z = \frac{-3+2i}{2i} = \frac{(-3+2i)(-i)}{2i(-i)} = \frac{3i-i^2}{2\cdot 1} = \frac{2+3i}{2} = 1 + \frac{3}{2}i$.

Odp. $z = 1 + \frac{3}{2}i$.

e) Mamy, że $z = x + yi$ dla pewnych $x, y \in \mathbb{R}$. Zatem $z^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi + y^2i^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ oraz $\overline{z} = x - yi$, czyli nasze równanie przybiera postać: $(x^2 - y^2) + 2xyi = x - yi$, skąd $x^2 - y^2 = x$ oraz $2xy = -y$. Z drugiego równania $(2x + 1)y = 0$, czyli $2x + 1 = 0$ lub $y = 0$. Jeśli $y = 0$, to z pierwszego równania $x^2 = x$, czyli $x = 0$ lub $x = 1$, skąd $z = 0$ lub $z = 1$. Jeśli zaś $2x + 1 = 0$, to $x = -\frac{1}{2}$ i z pierwszego równania $y^2 = x^2 - x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$, czyli $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, więc $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ lub $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Odp. $z = 0$ lub $z = 1$ lub $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ lub $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

f) Mamy, że $z = x + yi$ dla pewnych $x, y \in \mathbb{R}$. Zatem $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ oraz $2iz = 2i(x + yi) = -2y + 2xi$. Zatem nasze równanie przybiera postać: $(\sqrt{x^2 + y^2} - 2y) + 2xi = 11 + 8i$, skąd $\sqrt{x^2 + y^2} - 2y = 11$ oraz $2x = 8$. Zatem $x = 4$ oraz $\sqrt{16 + y^2} - 2y = 11$. Stąd $\sqrt{16 + y^2} = 11 + 2y$, czyli $16 + y^2 = 121 + 44y + 4y^2$, więc $3y^2 + 44y + 121 = 0$. Stąd $y = -\frac{35}{3}$ lub $y = -3$.

Odp. $z = 4 - \frac{35}{3}i$ lub $z = 4 - 3i$.

Zadanie 7. Niech z_1, z_2, z_3 będą liczbami zespolonymi takimi, że $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$. Udowodnij, że wtedy

$$|z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3| = 2|z_1 + z_2 + z_3|.$$

Rozwiązanie. W dowodzie wykorzystamy, że $|z|^2 = z\overline{z}$ dla dowolnej liczby zespolonej z. Ponieważ $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$, więc $z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2} = z_3\overline{z_3} = 4$. Stąd mamy, że $|z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3|^2 = (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)\overline{(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)} = (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)(\overline{z_1}\,\overline{z_2} + \overline{z_1}\,\overline{z_3} + \overline{z_2}\,\overline{z_3}) = (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2}) + (z_1\overline{z_1})z_2\overline{z_3} + z_1(z_2\overline{z_2})\overline{z_3} + (z_1\overline{z_1})z_3\overline{z_2} + (z_1\overline{z_1})(z_3\overline{z_3}) + z_1\overline{z_2}(z_3\overline{z_3}) + (z_2\overline{z_2})z_3\overline{z_1} + z_2\overline{z_1}(z_3\overline{z_3}) + (z_2\overline{z_2})(z_3\overline{z_3}) = 48 + 4(z_2\overline{z_3} + z_1\overline{z_3} + z_3\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + z_3\overline{z_1} + z_2\overline{z_1})$. Ponadto $4|z_1 + z_2 + z_3|^2 = 4(z_1 + z_2 + z_3)\overline{(z_1 + z_2 + z_3)} = (z_1 + z_2 + z_3)(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) = 4(z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_1\overline{z_3} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1} + z_3\overline{z_2} + z_3\overline{z_3}) = 48 + 4(z_2\overline{z_3} + z_1\overline{z_3} + z_3\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + z_3\overline{z_1} + z_2\overline{z_1})$. Zatem $|z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3|^2 = (2|z_1 + z_2 + z_3|)^2$, skąd $|z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3| = 2|z_1 + z_2 + z_3|$.

Zadanie 8. Przedstawić w postaci algebraicznej pierwiastki kwadratowe z następujących liczb zespolonych:
a) i, b)$-i$, c) $8 + 6i$, d) $8 - 6i$, e) $-8 + 6i$, f) $-8 - 6i$, g) $3 + 4i$, h) $-11 + 60i$, i) $-15 - 8i$,
j) $1 - i\sqrt{3}$, k) $2 + 3i$.

Rozwiązanie. a) Szukamy $x, y \in \mathbb{R}$ takich, że $(x + yi)^2 = i$. Ale $(x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$, więc $x^2 - y^2 = 0$ oraz $2xy = 1$. Z drugiego równania uzyskujemy, że x i y mają ten sam znak, więc po uwzględnieniu równania pierwszego $y = x$ oraz $2x^2 = 1$. Zatem $x^2 = \frac{1}{2}$, czyli $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Odp. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ oraz $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

b) Szukamy $x, y \in \mathbb{R}$ takich, że $(x+yi)^2 = -i$. Ale $(x+yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$, więc $x^2 - y^2 = 0$ oraz $2xy = -1$. Z drugiego równania uzyskujemy, że x i y mają różne znaki, więc po uwzględnieniu równania pierwszego $y = -x$ oraz $-2x^2 = -1$. Zatem $x^2 = \frac{1}{2}$, czyli $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Odp. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ oraz $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

c) Szukamy $x, y \in \mathbb{R}$ takich, że $(x + yi)^2 = 8 + 6i$. Ale $(x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$, więc $x^2 - y^2 = 8$ oraz $2xy = 6$. Zatem $xy = 3$ oraz $x^2 - y^2 = 8$. Szukając rozwiązań tego układu w liczbach całkowitych znajdujemy bez trudu, że $x = 3$ i $y = 1$ lub $x = -3$ i $y = -1$.

Odp. $3 + i$ oraz $-3 - i$.

d) Szukamy $x, y \in \mathbb{R}$ takich, że $(x+yi)^2 = 8-6i$. Ale $(x+yi)^2 = (x^2-y^2)+2xyi$, więc $x^2-y^2 = 8$ oraz $2xy = -6$. Zatem $xy = -3$ oraz $x^2 - y^2 = 8$. Szukając rozwiązań tego układu w liczbach całkowitych znajdujemy bez trudu, że $x = 3$ i $y = -1$ lub $x = -3$ i $y = 1$.

Odp. $3 - i$ oraz $-3 + i$.

e) Szukamy $x, y \in \mathbb{R}$ takich, że $(x+yi)^2 = -8+6i$. Ale $(x+yi)^2 = (x^2 - y^2)+2xyi$, więc $x^2 - y^2 = -8$ oraz $2xy = 6$. Zatem $xy = 3$ oraz $x^2 - y^2 = 8$. Szukając rozwiązań tego układu w liczbach całkowitych znajdujemy bez trudu, że $x = 1$ i $y = 3$ lub $x = -1$ i $y = -3$.

Odp. $1 + 3i$ oraz $-1 - 3i$.

f) Szukamy $x, y \in \mathbb{R}$ takich, że $(x+yi)^2 = -8-6i$. Ale $(x+yi)^2 = (x^2 - y^2)+2xyi$, więc $x^2 - y^2 = -8$ oraz $2xy = -6$. Zatem $xy = -3$ oraz $x^2 - y^2 = -8$. Szukając rozwiązań tego układu w liczbach całkowitych znajdujemy bez trudu, że $x = 1$ i $y = -3$ lub $x = -1$ i $y = 3$.

Odp. $1 - 3i$ oraz $-1 + 3i$.

g) Szukamy $x, y \in \mathbb{R}$ takich, że $(x + yi)^2 = 3 + 4i$. Ale $(x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$, więc $x^2 - y^2 = 3$ oraz $2xy = 4$. Zatem $xy = 2$ oraz $x^2 - y^2 = 3$. Szukając rozwiązań tego układu w liczbach całkowitych znajdujemy bez trudu, że $x = 2$ i $y = 1$ lub $x = -2$ i $y = -1$.

Odp. $2 + i$ oraz $-2 - i$.

h) Szukamy $x, y \in \mathbb{R}$ takich, że $(x + yi)^2 = -11 + 60i$. Ale $(x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$, więc $x^2 - y^2 = -11$ oraz $2xy = 60$. Zatem $xy = 30$ oraz $x^2 - y^2 = -11$. Szukając rozwiązań tego układu w liczbach całkowitych znajdujemy bez trudu, że $x = 5$ i $y = 6$ lub $x = -5$ i $y = -6$.

Odp. $5+6i$ oraz $-5-6i$.

i) Szukamy $x, y \in \mathbb{R}$ takich, że $(x+yi)^2 = -15-8i$. Ale $(x+yi)^2 = (x^2-y^2)+2xyi$, więc $x^2-y^2 = -15$ oraz $2xy = -8$. Zatem $xy = -4$ oraz $x^2-y^2 = -15$. Szukając rozwiązań tego układu w liczbach całkowitych znajdujemy bez trudu, że $x = 1$ i $y = -4$ lub $x = -1$ i $y = 4$.

Odp. $1-4i$ oraz $-1+4i$.

Zadanie 9. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b wszystkie pierwiastki kwadratowe z liczby zespolonej $z = a+bi$ dane są wzorami:

$$\omega = \pm \begin{cases} \sqrt{a} & \text{jeśli} \quad b=0 \text{ i } a \geq 0 \\ \sqrt{-a}\cdot i & \text{jeśli} \quad b=0 \text{ i } a<0 \\ \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + sgn(b)\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\cdot i & \text{jeśli} \quad b\neq 0 \end{cases}. \tag{1}$$

Przy czym

$$sgn(b) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli} \quad b>0 \\ 0 & \text{jeśli} \quad b=0 \\ -1 & \text{jeśli} \quad b<0 \end{cases} \tag{2}$$

Rozwiązanie. Dla $a \geq 0$ i $b = 0$ mamy, że $(\sqrt{a})^2 = a = a+bi$. Dla $a < 0$ i $b = 0$ jest $-a > 0$ oraz $(\sqrt{-a}\cdot i)^2 = (-a)\cdot(-1) = a = a+bi$. Dla $b \neq 0$ mamy, że $\sqrt{a^2+b^2} \pm a > 0$. Oznaczmy $x = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$, $y = sgn(b)\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$. Wtedy $x^2-y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} = a$ oraz $2xy = 2sgn(b)\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} = 2sgn(b)\cdot\frac{\sqrt{b^2}}{2} = sgn(b)\cdot|b| = b$. Zatem $(x+yi)^2 = (x^2-y^2)+2xyi = a+bi$. Kończy to dowód pierwszej części twierdzenia.

Zauważmy, że $(-\omega)^2 = \omega^2 = a+bi$. Jeśli zaś $z \in \mathbb{C}$ jest takie, że $z^2 = a+bi$, to $z^2 = \omega^2$, skąd $0 = z^2-\omega^2 = (z-\omega)\cdot(z+\omega)$, więc $z = \omega$ lub $z = -\omega$. Zatem wzór jest udowodniony.

Zadanie 10. Przedstawić w postaci algebraicznej pierwiastki kwadratowe z następujących liczb zespolonych:
a) $1-i\sqrt{3}$, b) $2+3i$, c)-9, d) $-16i$.

Rozwiązanie. Stosujemy wzór (1). a) $b = -\sqrt{3} < 0$, więc $sgn(b) = -1$. Ponadto $a = 1$, więc $a^2+b^2 = 1+3 = 4$, skąd $\sqrt{a^2 = b^2} = \sqrt{4} = 2$. Zatem $\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + sgn(b)\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\cdot i = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}i = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{sqrt2}{2}i$.

Odp. $\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{sqrt2}{2}i$ oraz $-\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{sqrt2}{2}i$.

b) $b = 3 > 0$, więc $sgn(b) = 1$. Ponadto $a = 2$, więc $a^2+b^2 = 4+9 = 13$. Zatem $\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + sgn(b)\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\cdot i = \sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}i$.

Odp. $\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}i$ oraz $-\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}i$.

c) $b = 0$ oraz $a = -9 < 0$, więc ze wzoru (1) mamy od razu następującą

Odp. $3i$ oraz $-3i$.

d) $a = 0$ oraz $b = -16 < 0$, więc $sgn(b) = -1$, $a^2+b^2 = 16^2$, czyli $\sqrt{a^2+b^2} = 16$. Zatem $\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + sgn(b)\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\cdot i = \sqrt{8} - \sqrt{8}i = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$.

Odp. $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ oraz $-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$.

Zadanie 11. Rozwiązać równania kwadratowe:
a) $z^2-3z+3+i = 0$, b) $z^2+(1+4i)z-(5+i) = 0$, c) $(4-3i)z^2-(2+11i)z-(5+i) = 0$, d) $z^2+2(1+i)z+2i = 0$, e) $z^2-5z+4+10i = 0$, f) $z^2-2z = 2i-1$.

Rozwiązanie. a) $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3+i) = 9 - 12 - 4i = -3 - 4i$. Szukamy $x, y \in \mathbb{R}$ takich, że $(x+yi)^2 = -3 - 4i$, czyli $(x^2 - y^2) + 2xyi = -3 - 4i$. Stąd $x^2 - y^2 = -3$ oraz $2xy = -4$. Zatem $xy = -2$ oraz $x^2 - y^2 = -3$. Poszukując rozwiązań tego układu równań w liczbach całkowitych bez trudu znajdujemy, że np. $x = 1$, $y = -2$. Zatem jednym z pierwiastków kwadratowych z liczby $\Delta = -3 - 4i$ jest $1 - 2i$. Stąd $z_1 = \frac{3-(1-2i)}{2\cdot 1} = 1 + i$ oraz $z_2 = \frac{3+(1-2i)}{2\cdot 1} = 2 - i$.

b) $\Delta = (1+4i)^2 + 4(5+i) = 1 + 8i - 16 + 20 + 4i = 5 + 12i$. Szukamy $x, y \in \mathbb{R}$ takich, że $(x+yi)^2 = 5 + 12i$, czyli $(x^2 - y^2) + 2xyi = 5 + 12i$. Stąd $x^2 - y^2 = 5$ oraz $2xy = 12$. Zatem $xy = 6$ oraz $x^2 - y^2 = 5$. Poszukując rozwiązań tego układu równań w liczbach całkowitych bez trudu znajdujemy, że np. $x = 3$, $y = 2$. Zatem jednym z pierwiastków kwadratowych z liczby $\Delta = 5 + 12i$ jest $3 + 2i$. Stąd $z_1 = \frac{-1-4i-(3+2i)}{2\cdot 1} = -2 - 3i$ oraz $z_2 = \frac{-1-4i+(3+2i)}{2\cdot 1} = 1 - i$.

c) $\Delta = (2+11i)^2 + 4(4-3i)(5+i) = 4 + 44i - 121 + 80 + 16i - 60i + 12 = -25$. Zatem jednym z pierwiastków kwadratowych z liczby $\Delta = -25$ jest $5i$. Stąd $z_1 = \frac{2+11i-5i}{2\cdot(4-3i)} = \frac{2+6i}{2\cdot(4-3i)} = \frac{1+3i}{4-3i} = \frac{(1+3i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{4+3i+12i-9}{4^2+3^2} = \frac{-5+15i}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$ oraz $z_2 = \frac{2+11i+5i}{2\cdot(4-3i)} = \frac{2+16i}{2\cdot(4-3i)} = \frac{1+8i}{4-3i} = \frac{(1+8i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{4+3i+32i-24}{4^2+3^2} = \frac{-20+35i}{25} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$.

d) $\Delta = 4(1 = i)^2 - 4 \cdot 2i = 4(1 + 2i - 1) - 8i = 0$. Zatem $z_1 = z_2 = -\frac{2(1+i)}{2\cdot 1} = -1 - i$.

e) $\Delta = (-5)^2 - 4(4+10i) = 25 - 16 - 40i = 9 - 40i$. Szukamy $x, y \in \mathbb{R}$ takich, że $(x+yi)^2 = 9 - 40i$, czyli $(x^2 - y^2) + 2xyi = 9 - 40i$. Stąd $x^2 - y^2 = 9$ oraz $2xy = -40$. Zatem $xy = -20$ oraz $x^2 - y^2 = 9$. Szukając rozwiązań tego układu równań w liczbach całkowitych bez trudu znajdujemy, że np. $x = 5$ i $y = -4$. Zatem jednym z pierwiastków kwadratowych z liczby $\Delta = 9 - 40i$ jest $5 - 4i$. Stąd $z_1 = \frac{5-(5-4i)}{2\cdot 1} = 2i$ oraz $z_2 = \frac{5+(5-4i)}{2\cdot 1} = 5 - 2i$.

f) Nasze równanie możemy zapisać w postaci $(z-1)^2 = 2i$. Ale $2i = (1+i)^2$, więc $z_1 - 1 = 1 + i$ oraz $z_2 - 1 = -1 - i$. Stąd $z_1 = 2 + i$ oraz $z_2 = -i$.

Zadanie 12. Przedstawić w postaci trygonometrycznej (bez pomocy tablic) następujące liczby zespolone:
a) 1, -1, i, $-i$, b) $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$, c) $1+i\sqrt{3}$, $1-i\sqrt{3}$, $-1+i\sqrt{3}$, $-1-i\sqrt{3}$, d) $\sqrt{3}+i$, $\sqrt{3}-i$, $-\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}-i$.

Rozwiązanie. a) $1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$, $-1 = 1 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$, $i = 1 \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2})$, $-i = 1 \cdot (\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$.

b) $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $1 + i = \sqrt{2}\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$, więc $1 + i = \sqrt{2}\cdot(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$. $1 - i = \sqrt{2}\cdot(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$, więc $1 - i = \sqrt{2}\cdot(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}\cdot(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2})$. $-1+i = (-1)\cdot(1-i) = (\cos\pi + i\sin\pi)(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})) = \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{4})$, zatem $-1+i = 1\cdot(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$. $-1-i = (-1)\cdot(1+i) = (\cos\pi + i\sin\pi)(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{4})$, czyli $-1 - i = 1\cdot(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$.

c) $|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$, $1 + i\sqrt{3} = 2\cdot(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$, więc $\cos\phi = \frac{1}{2}$ oraz $\sin\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, skąd można wziąć $\phi = \frac{\pi}{3}$, więc $1 + i\sqrt{3} = 2\cdot(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$. Stąd $1 - i\sqrt{3} = 2\cdot(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}) = 2\cdot(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$, więc $1 - i\sqrt{3} = 2\cdot(\cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) + i\sin(2\pi - \frac{\pi}{3}))$, więc $1 - i\sqrt{3} = 2\cdot(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$. Dalej, $-1 + i\sqrt{3} = (-1)\cdot(1 - i\sqrt{3}) = (\cos\pi + i\sin\pi)(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})) = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{3})$, czyli $-1 + i\sqrt{3} = 2\cdot(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$. Ponadto $-1 - i\sqrt{3} = (-1)\cdot(1 + i\sqrt{3}) = (\cos\pi + i\sin\pi)(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{3})$, czyli $-1 - i\sqrt{3} = 2\cdot(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$.

d) $|\sqrt{3} + i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$, $\sqrt{3} + i = 2\cdot(\frac{sqrt3}{2} + i\frac{1}{2})$, więc $\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $\sin\phi = \frac{1}{2}$, więc można wziąć $\phi = \frac{\pi}{6}$. Zatem $\sqrt{3} + i = 2\cdot(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$. Stąd $\sqrt{3} - i = 2\cdot(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}) = 2\cdot(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$, czyli $\sqrt{3} - i = 2\cdot(\cos(2\pi - \frac{\pi}{6}) + i\sin(2\pi - \frac{\pi}{6}))$, skąd ostatecznie $\sqrt{3} - i = 2\cdot(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})$. Dalej, $-\sqrt{3} + i = (-1)\cdot(\sqrt{3} - i) = (\cos\pi + i\sin\pi)(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})) = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{6}))$, czyli $-\sqrt{3} + i = 2\cdot(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$. W końcu $-\sqrt{3} - i = (-1)\cdot(\sqrt{3} + i) = (\cos\pi + i\sin\pi)(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{6}))$, czyli $-\sqrt{3} - i = 2\cdot(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$.

Zadanie 13. Wykonać działania, stosując przedstawienie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej:
a) $(1+i)^{10}$, b) $(1+i\sqrt{3})^{15}$, c) $\left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{1996}$, d) $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

Rozwiązanie. a) Na mocy zadania 12 b) mamy, że $1+i = \sqrt{2}\cdot(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$. Zatem ze wzoru de Moivre'a $(1+i)^{10} = (\sqrt{2})^{10}\cdot(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}) = 2^5\cdot(\cos(2\pi+\frac{\pi}{2}) + i\sin(2\pi+\frac{\pi}{2})) = 32\cdot(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 32i$.

b) Na mocy zadania 12 c) mamy, że $1+i\sqrt{3} = 2\cdot(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$. Stąd ze wzoru de Moivre'a $(1+i\sqrt{3})^{15} = 2^{15}\cdot(\cos 15\pi + i\sin 15\pi) = 2^{15}\cdot(\cos\pi + i\sin\pi) = -2^{15} = 32768$.

c) Mamy, że $\left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{1996} = \frac{(1+i)^{1996}}{(1+i\sqrt{3})^{1996}}$. Ale $1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ oraz $1+i\sqrt{3} = 2\cdot(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$, więc ze wzoru de Moivre'a $(1+i)^{1996} = (\sqrt{2})^{1996}(\cos 499\pi + i\sin 499\pi) = 2^{998}(\cos\pi + i\sin\pi) = -2^{998}$ oraz $(1+i\sqrt{3})^{1996} = 2^{1996}(\cos\frac{1996\pi}{3} + i\sin\frac{1996\pi}{3}) = 2^{1996}(\cos(664\pi + \frac{4\pi}{4}) + i\sin(664\pi + \frac{4\pi}{3})) = 2^{1996}(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = 2^{1996}(\cos\pi + i\sin\pi)(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2^{1996}\cdot(-1)\cdot(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$. Zatem $\left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{1996} = \frac{-2^{998}}{2^{1996}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})} = \frac{-1}{2^{988}}(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})) = \frac{-1}{2^{988}}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{1}{2^{989}} - \frac{\sqrt{3}}{2^{989}}i$.

d) Oznaczmy $z = \frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$ oraz $z_1 = \frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}$, $z_2 = \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$. Wtedy z własności sprzęgania liczb zespolonych $\overline{z_1} = z_2$. Zatem $z = z_1 + \overline{z_1} = 2re(z_1)$. Ponadto $(1-i)^2 = 1-2i-1 = -2i$, więc $(1-i)^4 = (-2i)^2 = 4i^2 = -4$ oraz $(1-i)^{20} = (-4)^5 = -2^{10}$. Z zadania 12 c) mamy, że $-1+i\sqrt{3} = 2\cdot(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$, więc ze wzoru de Moivre'a $(-1+i\sqrt{3})^{15} = 2^{15}(\cos 10\pi + i\sin 10\pi) = 2^{15}$. Zatem $z_1 = \frac{2^{15}}{-2^{10}} = -2^5 = -32$. Stąd $z = -64$.

Zadanie 14. Obliczyć bez pomocy tablic pierwiastki 3-go stopnia z następujących liczb zespolonych: a) 1, b) -1, c) i, d) $-i$.

Rozwiązanie. a) Należy wyznaczyć wszystkie liczby zespolone z takie, że $z^3 = 1$, czyli takie, że $0 = z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$. Stąd $z = 1$ lub $z^2+z+1 = 0$. $\Delta = 1-4 = -3$, $\sqrt{\Delta} = \sqrt{3}i$, $z_1 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $z_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

Odp. 1, $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Należy wyznaczyć wszystkie liczby zespolone z takie, że $z^3 = -1$, czyli takie, że $0 = z^3 + 1 = (z+1)(z^2-z+1)$. Stąd $z = -1$ lub $z^2 - z + 1 = 0$. $\Delta = 1-4 = -3$, $\sqrt{\Delta} = \sqrt{3}i$. Zatem $z_1 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$, $z_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$.

Odp. -1, $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Ponieważ $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, więc ze wzorów na pierwiastki n-tego stopnia z liczby zespolonej zapisanej w postaci trygonometrycznej uzyskujemy, że szukane liczby to $z_k = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}$, $k = 0,1,2$. Zatem $z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$.

Odp. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $-i$.

d) Dla $z \in \mathbb{C}$ mamy, że $z^3 = -i$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(-z)^3 = i$. Zatem z c) mamy

Odp. $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, i.