

Obliczanie rzędu macierzy

Zadanie 1. Nad ciałem liczb rzeczywistych oblicz rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 377 & 259 & 481 & 407 \\ 19 & 133 & 247 & 209 \\ 25 & 175 & 325 & 275 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Stosujemy operacje elementarne:

$$r(A) \stackrel{\frac{1}{25}w_3, \frac{1}{19}w_2}{=} r \begin{bmatrix} 377 & 259 & 481 & 407 \\ 1 & 7 & 13 & 11 \\ 1 & 7 & 13 & 11 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 377 & 259 & 481 & 407 \\ 1 & 7 & 13 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2, \text{ bo } \begin{vmatrix} 377 & 259 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot$$

$$377 - 259 \neq 0.$$

Odp. Rząd macierzy A jest równy 2.

Zadanie 2. Nad ciałem liczb rzeczywistych oblicz rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1241 & 381 & 273 & -165 \\ 134 & -987 & 562 & 213 \\ 702 & 225 & -1111 & 49 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Ponieważ macierz A ma tylko 3 wiersze, więc $r(A) \leq 3$. Ale jej minorem jest

$$\begin{vmatrix} 1241 & 381 & 273 \\ 134 & -987 & 562 \\ 702 & 225 & -1111 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1241 & 381 \\ 134 & -987 \\ 702 & 225 \end{vmatrix} =$$

$$1241 \cdot 987 \cdot 1111 + 381 \cdot 562 \cdot 702 + 273 \cdot 134 \cdot 225 + 702 \cdot 987 \cdot 273 - 225 \cdot 562 \cdot 1241 + 1111 \cdot 134 \cdot 381 > 0,$$

więc ostatecznie $r(A) = 3$.

Zadanie 3. Nad ciałem liczb rzeczywistych oblicz rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Stosujemy operacje elementarne:

$$r(A) \stackrel{w_2-w_1, w_4-2w_1}{=} r \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -9 \end{bmatrix} \stackrel{w_1-2w_2}{=} r \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -9 \end{bmatrix} = 1+r \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & -3 & -5 & -7 \\ 1 & -3 & -5 & -9 \end{bmatrix} \stackrel{w_2+w_1}{=} 1+r \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -5 & -9 \end{bmatrix} \stackrel{w_2+w_1}{=} 2+r \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -3 & -5 & -9 \end{bmatrix} \stackrel{w_2+w_1}{=} 2+r \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 3+r \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$3+1=4.$$

Odp. Rząd macierzy A jest równy 4.

Zadanie 4. Nad ciałem liczb rzeczywistych oblicz rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 4 & -9 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Stosujemy operacje elementarne:

$$r(A) \stackrel{w_2+2w_1, w_3+6w_1}{=} r \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 11 & 0 & 8 & 7 \\ 16 & 31 & 0 & 23 & 17 \\ -2 & 3 & 0 & 4 & -9 \end{bmatrix} = 1 + r \begin{bmatrix} 1 & 11 & 8 & 7 \\ 16 & 31 & 23 & 17 \\ -2 & 3 & 4 & -9 \end{bmatrix} \stackrel{w_2-16w_1, w_3+2w_1}{=} 1 + r \begin{bmatrix} 1 & 11 & 8 & 7 \\ 0 & -145 & -105 & -95 \\ 0 & 25 & 20 & 5 \end{bmatrix} = 2 + r \begin{bmatrix} -145 & -105 & -95 \\ 25 & 20 & 5 \end{bmatrix} \stackrel{w_1+19w_2}{=} 2 + r \begin{bmatrix} 349 & 624 & 0 \\ 25 & 20 & 5 \end{bmatrix} = 3 + r \begin{bmatrix} 349 & 624 \end{bmatrix} = 3 + 1 = 4.$$

Odp. Rząd macierzy A jest równy 4.

Zadanie 5. Nad ciałem liczb rzeczywistych oblicz rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Stosujemy operacje elementarne:

$$r(A) \stackrel{w_1-3w_3, w_4-2w_3}{=} r \begin{bmatrix} 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \end{bmatrix} = 1 + r \begin{bmatrix} -20 & -50 & -5 \\ 4 & 10 & 1 \\ -12 & -30 & -3 \end{bmatrix} \stackrel{w_1+5w_2, w_3+3w_2}{=} 1 + r \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 + r \begin{bmatrix} 4 & 10 & 1 \end{bmatrix} = 1 + 1 = 2.$$

Odp. Rząd macierzy A jest równy 2.

Zadanie 6. Nad ciałem liczb rzeczywistych oblicz rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Stosujemy operacje elementarne:

$$r(A) \stackrel{\frac{1}{4}k_1, \frac{1}{3}k_2, \frac{1}{2}k_4}{=} r \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -7 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -8 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & -6 \end{bmatrix} \stackrel{k_2-k_1, k_3+5k_1, k_4-k_1, k_5-3k_1}{=} r \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & -8 \\ 2 & 0 & 9 & 0 & -12 \end{bmatrix} = 1 + r \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & 9 & 0 & -12 \end{bmatrix} = 1 + r \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 4 \\ 6 & -8 \\ 9 & -12 \end{bmatrix} \stackrel{k_2+\frac{4}{3}k_1}{=} 1 + r \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 0 \\ 6 & 0 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} = 1 + 1 = 2.$$

Odp. Rząd macierzy A jest równy 2.

Zadanie 7. W zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ oblicz nad ciałem \mathbb{R} rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3+2a & 1+3a & a & a-1 \\ 3a & 3+2a & a & a-1 \\ 3a & 3a & 3 & a-1 \\ 3a & 3a & a & a-1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Stosujemy operacje elementarne:

$$r(A) \stackrel{w_1-w_4, w_2 \leftarrow w_4, w_3-w_4}{=} r \begin{bmatrix} 3-a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-a & 0 \\ 3a & 3a & a & a-1 \end{bmatrix}.$$

Możliwe są teraz tylko następujące przypadki:

1. $a = 3$. Wówczas $r(A) = r \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 1 + r \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 + 1 = 2$.

2. $a \neq 1$ i $a \neq 3$. Wtedy $r(A) = 1 + r \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 1 + 3 = 4$.

3. $a = 1$. Wtedy $r(A) = r \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 3$, bo otrzymana macierz ma tylko 3

kolumny i posiada niezerowy minor stopnia 3.

Odp. Dla $a = 3$ rząd macierzy A jest równy 2, dla $a = 1$ $r(A) = 3$, zaś dla $a \neq 1$ i $a \neq 3$ $r(A) = 4$.

Zadanie 8. W zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ oblicz nad ciałem \mathbb{R} rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a+1 & a^2+1 & a^2 \\ 3a-1 & 3a^2-1 & a^2+2a \\ a-1 & a^2-1 & a \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Stosujemy operacje elementarne:

$$r(A) \stackrel{w_1-w_3, w_2-3w_3}{=} r \begin{bmatrix} 2 & 2 & a^2-a \\ 2 & 2 & a^2-a \\ a-1 & a^2-1 & a \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 2 & 2 & a^2-a \\ a-1 & a^2-1 & a \end{bmatrix} \stackrel{k_2 \leftarrow k_1}{=}$$

$$r \begin{bmatrix} 2 & 0 & a^2-a \\ a-1 & a^2-a & a \end{bmatrix}.$$

Możliwe są tylko następujące przypadki:

1. $a = 0$. Wtedy $r(A) = r \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 1$.

2. $a = 1$. Wtedy $r(A) = r \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$.

3. $a \neq 0$ i $a \neq 1$. Wtedy $a^2 - a \neq 0$, więc $r(A) = 1 + r \begin{bmatrix} 2 & a^2-a \end{bmatrix} = 1 + 1 = 2$.

Odp. Dla $a = 1$ rząd macierzy A jest równy 1, zaś dla pozostałych a , $r(A) = 2$.