

Wartości i wektory własne

Zadanie 1. Wyznaczyć wartości własne oraz odpowiadające im wektory własne podanych macierzy A nad ciałem \mathbb{R} :

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ b) } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ c) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ d) } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ e) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\text{f) } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Odp. a) Wartości własne: 1 i 5. Odpowiadające im wektory własne: $[1, -1]$ i $[3, 1]$. b) Brak rzeczywistych wartości własnych. c) Wartości własne: 1. Wektory własne: $[1, 0]$ i $[0, 1]$. d) Wartości własne: 4, -1, 1. Odpowiadające im wektory własne: $[1, 0, 0]$, $[2, -5, 0]$, $[-8, 3, 6]$. e) Wartości własne: 0 i 6. Odpowiadające im wektory własne: $[-2, 1, 0]$ i $[-3, 0, 1]$, $[1, 1, 1]$. f) Wartości własne: 0. Odpowiadające im wektory własne: $[-3, 1, 0, 0]$, $[0, 0, 1, 0]$, $[4, 0, 0, 1]$.

Zadanie 2. Wyznaczyć wartości własne oraz odpowiadające im wektory własne podanych macierzy A nad ciałem \mathbb{R} :

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ b) } A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \text{ c) } A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix}, \text{ d) } A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\text{e) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odp. a) Wartości własne: 1, 2, 3. Odpowiadające im wektory własne: $[1, 1, 1]$, $[1, 0, 1]$, $[1, 1, 0]$. b) Wartości własne: 3, 6. Odpowiadające im wektory własne: $[0, 1, -1]$, $[3, 4, -2]$. c) Wartości własne: 3, 6. Odpowiadające im wektory własne: $[-7, 5, -6]$ i $[6, -3, 3]$, $[1, 1, -3]$. d) Wartości własne: 0. Odpowiadające im wektory własne: $[1, 1, 0]$, $[0, 1, 2]$. e) Wartości własne: -3, -1, 1, 3. Odpowiadające im wektory własne: $[1, -3, 3, -1]$, $[1, -1, -1, 1]$, $[1, 1, -1, -1]$, $[1, -3, 3, -1]$.