Obliczanie wyznaczników

Zadanie 1. Stosując rozwinięcie Laplace'a względem trzeciego wiersza oblicz wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Rozwiązanie. Mamy, że

$$W = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}a \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}b \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}c \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} +$$
$$(-1)^{3+4}d \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Cztery wyznaczniki stopnia trzy obliczymy stosując regułę Sarrusa:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -3 & 4 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right. = -27 - 8 - 8 - (-3 - 24 - 24) = -43 + 51 = 8,$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right. = 18 + 24 + 16 - (9 + 16 + 48) = 58 - 73 = -15,$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right. = -12 - 18 - 4 - (-6 - 4 - 36) = -34 + 46 = 12,$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 & -1 \end{array}\right. = -16 - 27 - 16 - (-24 - 6 - 48) = -59 + 78 = 19.$$

Stąd $W = 8a - (-15)b + 12c - 19d = 8a + 15b + 12c - 19d$.

Odp. Szukany wyznacznik jest równy $8a - (-15)b + 12c - 19d = 8a + 15b + 12c - 19d$.

Zadanie 2. Obliczyć następujące wyznaczniki:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}, \text{ b)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}, \text{ c)} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & -3 \end{vmatrix}, \text{ d)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Rozwiązanie. a) Po zastosowaniu operacji $w_2 + 3w_1$, $w_3 - w_1$, $w_4 + 2w_1$ uzyskamy, że nasz wyznacznik jest równy

$W = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 25 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & 33 \end{vmatrix}$. Po zastosowaniu rozwinięcia Laplace'a względem pierwszej kolumny uzyskamy, że $W = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & \downarrow \end{array} \\ \begin{vmatrix} 8 & 4 & 25 \\ -4 & 7 & 0 \\ 13 & -2 & 33 \end{vmatrix} \end{array} = (-1)^{1+3} \cdot 25 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 7 \\ 13 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 33 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} =$
$25 \cdot (8 - 91) + 33 \cdot (56 + 16) = -2075 + 2376 = 301$. Zatem $W = 301$.

b) Po zastosowaniu operacji $w_2 + 3w_1$ i $w_3 - w_1$ uzyskamy, że nasz wyznacznik jest równy

$$W = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix} \end{array} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & -8 & -13 \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} 4 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & -8 & -13 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \\ -3 & -8 \end{matrix} =$$

$-156 - 30 - 48 - (27 - 160 + 52) = -234 + 81 = -153$, czyli $W = -153$.

c) Po zastosowaniu operacji $w_1 + 2w_3$ uzyskamy, że nasz wyznacznik jest równy:

$$W = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & -3 \end{vmatrix} \overset{k_3-2k_4}{=} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & & \downarrow \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} \end{array} = (-1)^{1+4} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-3) \cdot \left| \begin{matrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix} =$$

$(-3) \cdot [0 + 20 + 24 - (-8 + 45 + 0)] = (-3) \cdot [44 - 37] = -21$, czyli $W = -21$.

d) Po dodaniu do pierwszej kolumny wszystkich pozostałych kolumn uzyskamy, że nasz wyznacznik jest równy

$$W = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{w_2-w_1,\ w_3-w_1,\ w_4-w_1}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-1)^3 = -3,$$

czyli $W = -3$.

Zadanie 3. Obliczyć następujące wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. c) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

Rozwiązanie. a) Po wykonaniu operacji $w_2 - w_1$, $w_3 - w_1$ i $w_4 - w_1$ uzyskamy, że nasz wyznacznik jest równy

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2)^3 = -8, \text{ czyli } W = -8.$$

b) Po wykonaniu operacji $k_2 - 4k_3$ uzyskamy, że nasz wyznacznik jest równy $W = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ 8 & -17 & 5 & 4 \\ 7 & -14 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Teraz stosujemy rozwinięcie Laplace'a względem czwartej kolumny:

$$W = (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 8 & -17 & 4 \\ 7 & -14 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (8 - 28) = 60, \text{ czyli } W = 60.$$

c) Po wykonaniu operacji $w_4 - w_1$ uzyskamy, że nasz wyznacznik jest równy

$$W = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \overset{k_3-k_1,\ k_4+k_1}{=} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 & 9 & 4 \\ 5 & 9 & 2 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 & 15 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 & 9 & 4 \\ 9 & 2 & 13 & 6 \\ 12 & 7 & 15 & 7 \\ 5 & 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} \overset{k_3-2k_4}{=}$$

$$(-1)\cdot\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 4 \\ 9 & 2 & 1 & 6 \\ 12 & 7 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{w_1-w_4,\ w_2-w_4,\ w_3-w_4}{=} (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{4+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{3+2}\cdot 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-5)\cdot(3-4) = 5, \text{ czyli } W = 5.$$

d) Po wykonaniu operacji $w_1 + 6w_4$ i $w_3 + 8w_4$ uzyskamy, że nasz wyznacznik jest równy

$$W = \begin{vmatrix} 13 & 0 & -3 & 28 & 26 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 15 & 0 & -7 & 31 & 34 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{4+2}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 13 & -3 & 28 & 26 \\ 1 & -2 & 6 & 6 \\ 15 & -7 & 31 & 34 \\ -7 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix} \overset{w_3-w_1}{=} (-1)\cdot\begin{vmatrix} 13 & -3 & 28 & 26 \\ 1 & -2 & 6 & 6 \\ 2 & -4 & 3 & 8 \\ -7 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)\cdot(-1)\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 13 & 3 & 28 & 13 \\ 1 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ -7 & 9 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{k_2-2k_1}{=} 2\cdot\begin{vmatrix} 13 & -23 & 28 & 13 \\ 1 & 0 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ -7 & 23 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{w_1+w_4}{=} 2\cdot\begin{vmatrix} 6 & 0 & 30 & 12 \\ 1 & 0 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ -7 & 23 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot(-1)^{4+2}\cdot 23\cdot\begin{vmatrix} 6 & 30 & 12 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 46\cdot 6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{w_2-w_1,\ w_3-2w_1}{=} 276\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$276\cdot(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} = 276\cdot 7 = 1932, \text{ czyli } W = 1932.$$