zadania z rachunku prawdopodobieństwa
zapożyczone z egzaminów aktuarialnych

1. **[E.A 5.10.1996/zad.4]**
Funkcja gęstości dana jest wzorem
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}x + 2xy + \frac{1}{4}y & \text{dla } (x,y) \in (0,1) \times (0,1) \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$
$P(X > \frac{1}{2} | Y > \frac{1}{2})$ wynosi: a) $\frac{5}{7}$, b) $\frac{3}{4}$, c) $\frac{7}{9}$, d) $\frac{4}{5}$, e) $\frac{9}{11}$.

2. **[E.A 26.10.1996/zad.2]**
Tarczę strzelniczą umieszczamy na płaszczyźnie ze środkiem tarczy w punkcie $(0,0)$. Punkt trafienia przez strzelca w tarczę ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej $(0,0)$, o takiej samej wariancji obu współrzędnych i o zerowej ich kowariancji. Jakie jest prawdopodobieństwo trafienia przez strzelca w punkt odległy od środka tarczy o mniej niż jedno odchylenie standardowe? (A) $1 - \exp(-0,5)$, (B) $(e-1)^{-1}$, (C) $1 - \exp(-1)$, (D) $\exp(-1)$, (E) $\exp(-0,5)$.

3. **[E.A 16.11.1996/zad.6]**
Zmienne losowe X_1, X_2, X_3, X_4 są niezależne i mają jednakowy rozkład normalny $N(0,\sigma)$. Prawdopodobieństwo $P(X_1^2 - 5X_2^2 < 5X_3^2 - X_4^2)$ wynosi:
A) $\frac{4}{5}$, B) $\frac{4}{5}(1 - \frac{1}{\sigma^2})$, C) $\frac{5}{6}$, D) $\frac{1}{2}$, E) $\frac{5+\sigma^2}{6+\sigma^2}$.

4. **[E.A 7.12.1996/zad.4]**
Zmienne losowe X i Y są niezależne. X ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej 0 i wariancji $\frac{1}{2}$. Y ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1. $P(Y > X^2)$ wynosi:
A) $\frac{1}{2}$, B) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, C) $\sqrt{\frac{e}{\pi}}$, D) $\frac{1}{\sqrt{e}}$, E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. **[E.A 18.01.1997/zad.3]**
Załóżmy, że zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots X_{735}$ oraz $Y_1, Y_2, \ldots Y_{880}$ są niezależne o rozkładach:
$P(X_i = 0) = \frac{3}{7}$, $P(X_i = 1) = \frac{4}{7}$, $P(Y_i = 0) = P(Y_i = 1) = \frac{1}{2}$.
Prawdopodobieństwo tego, że
$$\sum_{i=1}^{735} X_i < \sum_{i=1}^{880} Y_i$$
policzone w przybliżeniu przy pomocy aproksymacji rozkładem normalnym wynosi:
A) 0,01; B) 0,99; C) 0,16; D) 0,50; E) 0,84.

6. **[E.A 18.01.1997/zad.4]**
Zmienne losowe X_1, X_2 i X_3 mają łączny rozkład normalny, gdzie $E(X_i) = 0$, $D^2(X_i) = 1$ dla $i = 1,2,3$. Jeśli $Cov(X_1, X_2) = Cov(X_2, X_3) = Cov(X_1 + X_2, X_2 + X_3) = 0$, to
A) wynika stąd, że $P(X_1 = -X_3) = 0$,
B) wynika stąd, że $P(X_1 = X_3) = 1$,
C) wynika stąd, że $P(X_1 > -X_3) = \frac{1}{2}$,
D) wynika stąd, że $P(X_1 = -X_3) = 1$,
E) nie musi stąd wynikać żadne ze stwierdzeń A)-D).

7. **[E.A 21.06.1997/zad.6]**
Zmienne losowe X i Y mają łączny rozkład prawdopodobieństwa o gęstości:
$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x+y} & \text{dla } y > x,\ 0 > x > 1 \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Wartość oczekiwana $E(X+Y)$ wynosi:
A) e; B) $1,5$; C) $0,5$; D) 1; E) 2.

8. **[E.A 24.11.1997/zad.5]**
Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym z parametrami $m = 10, \sigma = 0,1$. Jeśli wiadomo, że $P(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_{20}\} \leq a) = 0,99$, to liczba a wynosi:
A) $14,653$; B) $10,329$; C) $13,291$; D) $16,581$; E) $10,233$.

9. **[E.A 24.11.1997/zad.6]**
Niech X_1 i X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0,1]$. Rozważmy zmienną losową równą bezwzględnej wartości różnicy pierwotnych zmiennych X_1 i X_2. Wartość oczekiwana μ oraz wariancja σ^2 zmiennej losowej $|X_1 - X_2|$ wynoszą:
A) $\mu = \frac{1}{3}$, $\sigma^2 = \frac{1}{18}$; B) $\mu = \frac{1}{2}$, $\sigma^2 = \frac{1}{12}$; C) $\mu = \frac{1}{2}$, $\sigma^2 = \frac{1}{24}$; D) $\mu = \frac{1}{3}$, $\sigma^2 = \frac{1}{36}$; E) $\mu = \frac{1}{2}$, $\sigma^2 = \frac{1}{6}$.

10. **[E.A 30.05.1998/zad.3]**
Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 5. Zmienna losowa Y ma rozkład jednostajny na pewnym odcinku, przy czym jej wartość oczekiwana wynosi 5, a wariancja wynosi $\frac{25}{3}$. Zmienne losowe X i Y są niezależne. $P(X+Y<6)$ wynosi:
A) $0,1e^{-1,2}$; B) $0,5e^{-1}$; C) $0,1+0,5e^{-1,2}$; D) $0,1+0,1e^{-1,2}$; E) $0,1+0,5e^{-1}$.

11. **[E.A 30.05.1998/zad.7]**
Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną zero i wariancją jeden, i niech

$$S = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2.$$

Wariancja zmiennej S wynosi:
A) $3n(n-1)$, B) $2n$, C) $2n^2$, D) $2n^4$, E) $3n^2$.

12. **[E.A 5.12.1998/zad.6]**
Zmienna losowa Y ma rozkład jednostajny na przedziale $[0,1]$, natomiast zależna od niej zmienna losowa X ma rozkład warunkowy (przy danej wartości $Y=y$) jednostajny na przedziale $[0,y]$. Prawdopodobieństwo (bezwarunkowe): $P(X<0,5)$ wynosi:
A) $0,500$; B) $0,622$; C) $0,750$; D) $0,847$; E) $0,911$.

13. **[E.A 27.03.1999/zad.2]**
Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $(0,2)$, a zmienna losowa Y ma rozkład jednostajny na przedziale $(0,1)$. Zmienne są niezależne. $P(|2Y-X|<\frac{1}{2})$ wynosi:
A) $\frac{7}{16}$, B) $\frac{8}{16}$, C) $\frac{9}{16}$, D) $\frac{10}{16}$, E) $\frac{12}{16}$.

14. **[E.A 19.06.1999/zad.6]**
Mamy dwie niezależne zmienne losowe: X oraz Y. Jedna z nich (nie wiadomo która) ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 1, pozostała zaś ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 2. Iloraz $\frac{E(\max\{X,Y\})}{E(\min\{X,Y\})}$ wynosi:
A) 2, B) $2,5$, C) 3, D) $3,5$, E) 4.

15. **[E.A 19.06.1999/zad.7]**
Mamy dwie niezależne zmienne losowe: X oraz Y. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 1, zmienna losowa Y zaś ma rozkład wykładniczy z wartością

oczekiwaną równą 2. Zdefiniujmy nową zmienną losową Z jako udział zmiennej X w sumie obu zmiennych:

$$Z = \frac{X}{X+Y}.$$

Mediana zmiennej Z wynosi:
A) $\frac{1}{6}$, B) $\frac{1}{5}$, C) $\frac{1}{4}$, D) $\frac{1}{3}$, E) $\frac{1}{2}$.

16. **[E.A 19.06.1999/zad.10]**
Niech dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma gęstość:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 - x - y & \text{dla } (x,y) \in (0,1) \times (0,1) \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo $P((X,Y) \in (\frac{1}{2}, 1) \times (\frac{1}{2}, 1))$ wynosi:
A) $\frac{1}{12}$, B) $\frac{1}{8}$, C) $\frac{9}{64}$, D) $\frac{1}{6}$, E) $\frac{1}{4}$.

17. **[E.A 23.10.1999/zad.1]**
Zmienna X ma rozkład o gęstości $f(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$ określonej na przedziale $(0, +\infty)$. Zmienna Y ma rozkład o gęstości $g(y) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \exp(-\frac{(y-3)^2}{6})$. Kowariancja tych zmiennych wynosi -3. Wariancja zmiennej $X + Y$ wynosi:
A) 0; B) $1,5$; C) 3; D) $4,5$; E) podane informacje o parze zmiennych losowych są sprzeczne.

18. **[E.A 17.06.2000/zad.5]**
Łaczny rozkład zmiennych losowych ma gęstość:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x+y} & \text{dla } y > x,\ 0 > x > 1 \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

$D^2(Y)$ wynosi:
A) 1, B) $\ln 2$, C) e^2, D) $\frac{5}{2}$, E) $\frac{13}{12}$.

19. **[E.A 14.10.2000/zad.4]**
Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 2]$. Niech

$$Y_n = X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n.$$

Która z następujących równości jest prawdziwa?
A) $\lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq 1) = 0$,
B) $\lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq 1) = \frac{1}{2}$,
C) $\lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq (\frac{2}{e})^n) = 0$,
D) $\lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq (\frac{2}{e})^n) = \frac{1}{2}$,
E) $\lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq (\frac{2}{e})^n) = 1$,
Wskazówka: Wykorzystaj Centralne Twierdzenie Graniczne.

20. **[E.A 2.06.2001/zad.2]**
Niech $X = N \cdot e^{tZ}$, gdzie N jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem λ, Z zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$, niezależną od N, t stałą. Oblicz

$$\frac{D^2(X)}{(E(X))^2}.$$

A) $\frac{1}{\lambda}\exp(\sigma^2 t^2) + \exp(\sigma^2 t^2)$,
B) $\lambda \exp(\sigma^2 t^2) + \exp(\sigma^2 t^2) - 1$,
C) $\frac{1}{\lambda}\exp(\sigma^2 t^2) + \exp(\sigma^2 t^2) - 1$,
D) $\frac{1}{\lambda}\exp(\frac{\sigma^2 t^2}{2}) + \exp(\sigma^2 t^2) - 1$,
E) $\frac{1}{\lambda}\exp(\sigma^2 t^2) + \exp(\frac{\sigma^2 t^2}{2}) - 1$

21. **[E.A 2.06.2001/zad.4]**
Niech W_1 i W_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym o gęstości $f(w) = \lambda e^{-\lambda w}$ dla $w > 0$. Oblicz granicę prawdopodobieństwa warunkowego:

$$\lim_{t\to\infty} P(\min\{W_1, W_2\} > \frac{t}{2} | W_1 + W_2 > t).$$

A) $\frac{1}{3}$, B) $\frac{1}{2}$, C) 1, D) $\frac{\lambda}{1+\lambda}$, E) 0.

22. **[E.A 2.06.2001/zad.8]**
Niech K będzie zmienną losową taką, że $P(K = k) = \frac{1}{10}$ dla $k = 1, 2, \ldots, 10$. Niech

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{gdy } K = k \\ 0 & \text{gdy } K \neq k \end{cases}$$

oraz $S_5 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$. Oblicz $Cov(X_1, S_5)$.
A) $\frac{1}{5}$, B) $\frac{1}{10}$, C) 0, D) $-\frac{1}{20}$, E) $\frac{1}{20}$.

23. **[E.A 13.10.2001/zad.2]**
Załóżmy, że zmienne losowe X i Y mają łączny rozkład normalny, $E(X) = E(Y) = 0$, $D^2(X) = D^2(Y) = 1$ i $Cov(X, Y) = \rho$. Oblicz $Cov(X^2, Y^2)$.
A) ρ^2, B) $2\rho^2$, C) $3\rho^2$, D) $|\rho|$, E) 2ρ.

24. **[E.A 25.01.2003/zad.2]**
Wektor losowy (X, Y) ma łączną gęstość prawdopodobieństwa

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{gdy } x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1 \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Podaj gęstość $g(z)$ rozkładu zmiennej losowej $Z = \frac{X}{X+Y}$.
A) $g(z) = 2z$ dla $0 \leq z \leq 1$,
B) $g(z) = 1$ dla $0 \leq z \leq 1$,
C) $g(z) = 2(1 - z)$ dla $0 \leq z \leq 1$,
D) $g(z) = 6z(1 - z)$ dla $0 \leq z \leq 1$,
E) $g(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{z(1-z)}}$ dla $0 \leq z \leq 1$

25. **[E.A 17.05.2003/zad.1]**
Rozważmy następujący model strzelania do tarczy. Współrzędne punktu trafienia (X, Y) są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie $N(0, \sigma)$. Punkt $(0, 0)$ uznajemy za środek tarczy, zatem $\sqrt{X^2 + Y^2}$ jest odległością od środka. Oddano n niezależnych strzałów $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$. Oblicz wartość oczekiwaną odległości od środka najlepszego ze strzałów, czyli

$$E(\min(\sqrt{X_1^2 + Y_2^2}, \ldots, \sqrt{X_n^2 + Y_n^2})).$$

A) $\sqrt{\frac{\pi\sigma}{2n}}$, B) $\sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2} \cdot \frac{1}{n}}$, C) $\sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2n}}$, D) $\sqrt{\frac{\sigma^2}{2n}}$, E) $\sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{n}}$.

26. **[E.A 16.05.2005/zad.6]**
Niech X_1 i X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$. Rozważmy zmienną losową równą bezwzględnej różnicy tych zmiennych. Wartość oczekiwana μ oraz wariancja σ^2 zmiennej losowej $|X_1 - X_2|$ wynoszą:
A) $\mu = \frac{1}{3}$ i $\sigma^2 = \frac{1}{36}$,
B) $\mu = \frac{1}{2}$ i $\sigma^2 = \frac{1}{12}$,
C) $\mu = \frac{1}{2}$ i $\sigma^2 = \frac{1}{24}$,
D) $\mu = \frac{1}{3}$ i $\sigma^2 = \frac{1}{18}$,
E) $\mu = \frac{1}{3}$ i $\sigma^2 = \frac{1}{6}$.

27. **[E.A 5.12.2005/zad.1]**
W konkursie złożonym z trzech etapów startuje niezależnie n uczestników. Prawdopodobieństwo, że uczestnik odpadnie po pierwszym etapie jest równe θ. Prawdopodobieństwo, że uczestnik, który przeszedł etap pierwszy odpadnie po drugim etapie też jest równe θ. Niech K oznacza liczbę uczestników, którzy odpadli w pierwszym etapie, zaś M liczbę uczestników, którzy odpadli w drugim etapie. Jeżeli $\theta = \frac{3}{5}$, to $P(K + M = k)$ dla $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ jest równe:
A) $\binom{n}{k} \frac{9^k 16^{n-k}}{5^{2n}}$,
B) $\binom{n}{k} \frac{9^{n-k} 16^k}{5^{2n}}$,
C) $\binom{n}{k} \frac{4^k 21^{n-k}}{5^{2n}}$,
D) $\binom{n}{k} \frac{21^k 4^{n-k}}{5^{2n}}$,
E) $\binom{n}{k} \frac{6^k 19^{n-k}}{5^{2n}}$.

28. **[E.A 6.04.2009/zad.1]**
Rzucono niezależnie 80 razy symetryczną monetą. Niech X oznacza łączną liczbę orłów, a Y liczbę orłów w pierwszych 20 rzutach. Wtedy współczynnik korelacji $\rho(X, Y)$ jest równy:
A) 0, B) $\frac{1}{2}$, C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, D) $\frac{1}{4}$, E) 1.

29. **[E.A 26.10.1996/zad.4]**
Funkcja gęstości dana jest wzorem:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{dla} \ \ (x,y) \in (0,1)\times(0,1) \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

$E(X|Y=\frac{1}{2})$ wynosi:
A) $\frac{1}{3}$, B) $\frac{5}{12}$, C) $\frac{1}{2}$, D) $\frac{7}{12}$, E) $\frac{2}{3}$.

30. **[E.A 3.10.1998/zad.4]**
Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 0,5. Niezależna od niej zmienna losowa Y ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 2. Warunkowa wartość oczekiwana: $E(X|X+Y=5)$ wynosi:
A) $0,5$; B) $0,66$; C) $0,83$; D) 1; E) $1,33$.

31. **[E.A 18.01.1997/zad.5]**
Zmienne losowe X i Y są niezależne. X ma rozkład o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla} \ \ 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Y ma rozkład o gęstości:

$$f(y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{dla} \ \ y \ge 0 \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Jeśli $S = X+Y$, to $E(S|X \le \frac{1}{2})$ wynosi:
A) 2, B) $\frac{3}{2}$, C) $\frac{4}{3}$, D) $\frac{1}{3}$, E) $\frac{13}{12}$.

32. **[E.A 5.04.1997/zad.5]**
Zmienne losowe X i Y mają łączny rozkład prawdopodobieństwa o gęstości:

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y-x)} & \text{dla} \ \ y > x, \ 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Jeżeli $\mu(X) = E(Y|X)$, to $P(Y > \mu(X))$ wynosi:
A) $\frac{1}{2}$, B) e^{-1}, C) 1, D) $\frac{1}{1+e}$, E) $\frac{2}{1+e}$.

33. **[E.A 3.12.2007/zad.4]**
Losujemy ze zwracaniem po jednej karcie do gry z talii 52 kart tak długo aż wylosujemy pika. Niech Y oznacza zmienną losową równą liczbie wyciągniętych kart, a X zmienną losową równą liczbie kart, w których uzyskaliśmy karo. Oblicz $E(Y|X=4)$.
A) 10, B) 9, C) 12, D) 6, E) 7.

34. **[E.A 30.11.2009/zad.1]**
Niech (X,Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o gęstości:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{4}{3}xy & \text{dla} \ \ x,y \in (0,1) \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Niech $S = X+Y, V = Y-X$ Wyznacz $E(V|S=1)$.
A) 0, B) $\frac{3}{8}$, C) $-\frac{3}{8}$, D) $\frac{2}{7}$, E) $-\frac{2}{7}$.