matematyka w ubezpieczeniach
III rok informatyki i ekonometrii
lista 1

1. Czy funkcja $s(x) = \frac{100-x}{100}$ dla $x \in [0, 100]$ może być funkcją przeżycia?

2. Niech zmienna losowa X opisująca przyszły czas życia noworodka ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 100]$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że noworodek dożyje 65 roku życia. Wyznaczyć funkcję przeżycia.

3. Niech $f(x)$ będzie gęstością zmiennej losowej X. Na wykresie funkcji gęstości zaznaczyć pole odpowiadające

   a) $P(X \leq x_2) = F(x_2)$;

   b) $P(X > x_1) = s(x_1)$;

   gdzie $x_1, x_2 > 0$.

4. Niech X bedzie zmienną losową opisującą długość życia losowo wybranego noworodka, rozważmy dwa prawdopodobieństwa

$$P(25 < X < 30) \qquad P(25 < X < 30|X > 20)$$

   a) wyjaśnić jaka jest między nimi różnica;

   b) które z nich jest większe?

   c) wyrazić je za pomocą aktuarialnych symboli.

5. Mając dane następujące wartości funkcji przeżycia dla pewnej populacji

Tabela 1:

x	$s(x)$
20	0.9618
21	0.9608
22	0.9598
23	0.9587

   obliczyć: ${}_2p_{21}$ oraz q_{22}.

6. Niech $s(x) = (1 - \frac{x}{100})^{\frac{1}{2}}$ dla $0 \leq x \leq 100$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że

   a) osoba w wieku 19 lat przeżyje co najmniej 17 lat;

   b) osoba w wieku 36 lat umrze w ciągu 15 lat;

   c) noworodek umrze przed osiągnięciem 55 roku życia;

   d) osoba w wieku 19 lat dożyje 36 roku życia ale umrze przed osiągnięciem 75 roku życia.

7. Uzasadnić, że następujący wzór jest prawdziwy

$${}_{t_1+t_2+\ldots+t_n}p_x = {}_{t_1}p_x \cdot {}_{t_2}p_{x+t_1} \cdot {}_{t_3}p_{x+t_1+t_2} \cdot \cdots \cdot {}_{t_n}p_{x+t_1+t_2+\ldots+t_{n-1}}$$

8. Przedstawić ${}_3q_x$ za pomocą symboli aktuarialnych dotyczących rocznych okresów.

9. Pokazać, że:

$$\mathring{e}_x = E(T(x)) = \int_0^\infty {}_tp_x dt.$$

10. Wiedząc, że

$${}_tp_x = \frac{100-t-x}{100-x} \quad \text{dla} \quad 0 \le x \le 100 \qquad \text{oraz} \quad 0 \le t \le 100-x$$

obliczyć prawdopodobieństwo, że

   a) osoba w wieku 30 lat dożyje 60-tych urodzin;
   b) osoba w wieku 30 lat umrze w ciągu 6 lat;

następnie wyznaczyć funkcję przeżycia oraz policzyć średni czas życia (x).

11. Mając dane ${}_tp_x = 1 - (\frac{t}{100})^{1,5}$ dla $x = 60$ oraz $0 < t < 100$ oblicz $E(T(x))$.

12. Mając dane $G(t) = 1 - (\frac{100-t-x}{100-x})^2$ dla $0 \le t \le 100-x$ oblicz

   a) $E(T(x))$
   b) $Var(T(x))$

13. Niech X będzie zmienna losową o dystrybuancie danej wzorem

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{dla} \quad x > 0$$

   a) jaki rozkład ma zmienna losowa X?;
   b) pokazać, że dystrybuanta zmiennej losowej $T(x)$ jest funkcją zależną jedynie od t (a nie od x) czyli, że posiada własność braku pamięci;

oblicz:

   c) $E(T(x))$
   d) $Var(T(x))$

14. Niech $X \sim U[0, \omega]$

   a) pokazać, że $T(x)$ ma rozkład $U[0, \omega - x]$;
   b) obliczyć $Var(T(x))$.