zastosowania funkcji tworzących
matematyka, II stopień
lista 1 wprowadzenie, które jest powtórzeniem

1. Rzucamy dwoma kostkami i symetryczną monetą, na której znajdują się liczby -1,1. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe sumie liczby wypadłej na monecie i wartości bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek. Wyznaczyć prawdopodobieństwo $P(X = 4)$.

2. Niech $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$, $P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$ dla $\omega = 0, 1, 2, 3$. Definiujemy dwie zmienne losowe $X(\omega) = \sin \frac{\pi\omega}{2}$ oraz $Y(\omega) = \cos \frac{\pi\omega}{2}$. Znaleźć rozkłady i dystrybuanty zmiennych losowych X i Y. Obliczyć $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\})$.

3. Z talii 52 kart wyciągamy 6 i takiemu losowaniu przypisujemy liczbę pików. Znaleźć rozkład określonej w ten sposób zmiennej losowej.

4. Z pęku n kluczy wybierany jest jeden i pasowany do zamka. Klucz, który nie pasuje jest odkładany, a z pozostałych jest losowany kolejny klucz. Wartością zmiennej losowej X jest numer tej próby, w której klucz pasuje do zamka. Wiadomo, że tylko jeden klucz otwiera zamek. Wyznaczyć rozkład X.

5. Zmienna losowa X ma rozkład geometryczny z parametrem $p = \frac{1}{3}$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Y = (-1)^X$.

6. Obliczyć wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennej losowej X o rozkładzie:
   - Poissona z parametrem λ
   - Bernoulliego z parametrami n, p
   - geometryczny z parametrem p

7. Niech X suma oczek w 2 rzutach kostką. Obliczyć $E(X), D^2(X)$.

8. Losujemy n - krotnie (ze zwracaniem) liczbę spośród liczb od 1 do N. X największa spośród liczb uzyskanych w losowaniu. Obliczyć $E(X)$.

9. W urnie jest 8 białych i 2 czarne kule. Losujemy kule bez zwracania. X ilość wyciągniętych do momentu wyciągnięcia pierwszej kuli białej. Jaka jest najbardziej prawdopodobna wartość X?

10. Spośród zbioru par liczb $\{(k, l) : k, l \in \{0, 1, \ldots, 9\}\}$ losowana jest jedna para (m, n). Wartością zmiennej losowej X jest $m + n$. Wyznaczyć $E(X)$.

11. Dany jest rozkład zmiennej losowej $P(\{\omega : X(\omega) = k\}) = \frac{c}{3^k}$, gdzie $k \in N$. Wyznaczyć stała c, wartość oczekiwaną i wariancję.

12. Zmienna losowa X może przyjmować wartości całkowite dodatnie z prawdopodobieństwami tworzącymi ciąg geometryczny malejący. Wybrać pierwszy wyraz i iloraz q tak, aby wartość oczekiwana zmiennej losowej X była równa 10. Obliczyć przy tym warunku prawdopodobieństwo $P(X \leq 10)$.

13. Jeśli dla zmiennej losowej o rozkładzie Poissona mamy:
    $P(N \leq 1) = \frac{8}{9}P(N = 2)$, to:
    A) $E(N) = \frac{17}{9}$, B) $E(N) = 3$, C) $D^2(N) = 2$, D) $E(N^2) = 3$, E) $E(N) = \frac{8}{9}$.

14. Zmienna losowa N ma rozkład z geometrycznym ogonem, tzn. dany wzorem
    $$P(N = k) = \begin{cases} p_0 & \text{dla } k = 0 \\ (1 - p_0)pq^{k-1} & \text{dla } k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$
    gdzie parametry rozkładu $p_0 = 0,5$ oraz $p = 1 - q = 0,25$. Wartość oczekiwana tej zmiennej wynosi:
    A) $1,5$; B) 2; C) $2,5$; D) 3; E) $3,5$.

15. W urnie znajduje się 10 kul białych i 10 czarnych. Wybieramy z urny kolejno bez zwracania po jednej kuli aż do momentu wyciągnięcia po raz pierwszy kuli czarnej. Wartość oczekiwana liczby wyciągniętych kul białych jest równa:
    A) 5, B) $\frac{1}{2}$, C) $\frac{10}{11}$, D) 1, E) $\frac{19}{20}$.

16. W urnie znajduje się 20 kul, w tym 10 kul białych i 10 czarnych. Ciągniemy losowo bez zwracania 18 kul. Niech N oznacza liczbę wyciągniętych kul białych. Wariancja zmiennej losowej N wynosi:
    A) $\frac{13}{19}$, B) $\frac{12}{19}$, C) $\frac{11}{19}$, D) $\frac{10}{19}$, E) $\frac{9}{19}$.

17. Rzucamy symetryczną kostka do gry tak długo, aż uzyskamy każdą liczbę oczek. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.
A) $12,5$; B) $18,5$; C) $12,0$; D) $13,7$; E) $14,7$.

18. Załóżmy, że zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o gęstości:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \mathrm{d}la \;\; x > 0.$$

Niech $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Wartość oczekwiana zmiennej losowej $N = [X + \frac{1}{2}]$ wyraża się wzorem:
A) $[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}]$, B) $[\frac{1}{\lambda}] + \frac{1}{2}$, C) $\frac{1}{[\lambda]} + \frac{1}{2}$, D) $\frac{e^{\frac{1}{2}\lambda}}{e^{\lambda}-1}$, E) $\frac{1}{e^{\lambda}-1}$.