zastosowania funkcji tworzących
matematyka, II stopień
lista 2

1. Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X o rozkładzie:

   a) równomiernym na zbiorze
      – $\{1, 2, \ldots, 6\}$;
      – $\{1, 2, \ldots, n\}$;

   b) Bernoullie'go z parametrami n i p;

   c) Poissona z parametrem λ;

   d) geometrycznym typu G(1)

   wprost z definicji oraz przy użyciu funkcji tworzących.

2. Znaleźć zależność między funkcjami tworzącymi rozkładów geometrycznych typu G(1) i G(0). Wynik uogólnić.

3. Wyznaczyć funkcję tworzącą zmiennej losowej X o rozkładzie Pascala tj. o rozkładzie ujemnym dwumianowym z parametrem $p \in (0, 1)$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Następnie obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję tej zmiennej losowej.

4. Korzystając z funkcji tworzącej wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X o rozkładzie hipergeometrycznym.

5. Niech X będzie zmienną losową przyjmującą wartości w $\mathbb{N}$ o funkcji tworzącej G. Rozważmy ogony rozkładu zmiennej losowej X tj. ciąg o wyrazach
$$t_n = P(X > n).$$
   Pokazać, że funkcja tworząca ciągu $\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ wyraża się wzorem
$$T(s) = \frac{1 - G(s)}{1 - s}, \qquad s \in (-1, 1).$$
   Ponadto pokazać, że

   a) $E(X) = T(1)$;

   b) $E(X(X-1)) = 2T'(1)$;

   c) $D^2(X) = 2T'(1) + T(1) - (T(1))^2$.

6. Wyznaczyć funkcję tworzącą ogonów zmiennej losowej X o rozkładzie geometrycznym.

7. Niech G_1 oraz G_2 będą funkcjami tworzącymi pewnych rozkładów prawdopodobieństwa oraz niech $0 \leq \alpha \leq 1$. Pokazać, że G_1G_2 oraz ${}_1 + (1-\alpha)G_2$ są również funkcjami tworzącymi rozkładów prawdopodobieństwa. Czy tę własność posiada również funkcja $\frac{G(\alpha s)}{G(s)}$?

8. Niech $G_{X,Y}(s,t)$ będzie funkcją tworzącą łącznego rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych X i Y. Pokazać, że $G_X(s) = G_{X,Y}(s, 1)$ oraz $G_Y(t) = G_{X,Y}(1, t)$. Ponadto pokazać, że
$$E(XY) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} G_{X,Y}(s,t)\Big|_{s=t=1}.$$

9. Wyznaczyć funkcję tworzącą łącznego rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej (X, Y)

   a) $P(X = j, Y = k) = \frac{(e-1)e^{-(2k+1)}k^j}{j!}$, $\ j, k \in \mathbb{N}$;

   b) $P(X = j, Y = k) = \frac{\binom{k}{j}p^{j+k}(1-p)^{k-j}}{k \ln \frac{1}{1-p}}$, $\ 0 \leq j \leq k, k \geq 1, p \in (0, 1)$.

   Wyznaczyć rozkłady brzegowe zmiennych losowych X i Y oraz policzyć ich kowariancję.

10. Rzucamy n razy monetą z prawdopodobieństwem wypadnięcia orła równym p. Pokazać, że funkcja tworząca łącznego rozkładu liczby orłów - X i liczby reszek - Y wyraża się wzorem
$$G_{X,Y}(x, y) = (px + (1-p)y)^n.$$