

zastosowania funkcji tworzących
matematyka, II stopień
lista 3

1. Niech N będzie liczbą orłów w trakcie n rzutów monetą. Wykorzystując funkcję tworzącą rozkładu tej zmiennej losowej wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że N jest podzielna przez 2.
2. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o funkcjach tworzących G_X, G_Y . Pokazać, że $P(X - Y = k)$ jest równe współczynnikowi przy s^k w funkcji $G_X(s)G_Y(\frac{1}{s})$.
3. Każda z n niezależnych zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_n może przyjąć z jednakowym prawdopodobieństwem jedną z wartości $1, 2, \dots, m$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że suma $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ będzie
 - a) równa danej liczbie $k, n \leq k \leq mn$;
 - b) większa od danej liczby $k, n \leq k \leq mn$.
4. Rzucamy kostką 10 razy. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek wynosi 27?
5. Obliczmy prawdopodobieństwo, że liczba całkowita wylosowana ze zbioru liczb od 0000 do 9999 będzie miała sumę pierwszych dwóch cyfr równą sumie ostatnich dwóch cyfr.
6. Niech X będzie liczbą zdarzeń, które zajdą spośród zdarzeń A_1, A_2, \dots, A_n . Niech $S_m = E\binom{X}{m}$, pokazać, że

$$P(X \geq i) = \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} S_j, \quad 1 \leq i \leq n,$$

gdzie

$$S_m = \sum_{j=m}^n \binom{j-1}{m-1} P(X \geq j), \quad 1 \leq m \leq n.$$

7. Każda osoba w n -osobowej grupie wybiera jedną osobę w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo, że
 - a) dokładnie k osób nie zostało przez nikogo wybranych;
 - b) przynajmniej k osób nie zostało przez nikogo wybranych.
8. Niech $X \sim Poisson(Y)$, gdzie $Y \sim Poisson(\mu)$. Pokazać, że

$$G_{X+Y}(s) = \exp\{\mu(xe^{x-1} - 1)\}.$$

9. Niech X_1, X_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie logarytmicznym, tj.

$$P(X_i = k) = \frac{(1-p)^k}{k \ln(\frac{1}{p})}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

gdzie $p \in (0, 1)$. Ponadto niech $N \sim Poisson(\mu)$ będzie zmienną losową niezależną od zmiennych X_i . Pokazać, że $y = \sum_{i=1}^N X_i$ jest zmienną losową o rozkładzie ujemnym dwumianowym.