zastosowania funkcji tworzących
matematyka, II stopień
lista 4

Definicja 1. *Niech* $(X_n)_{n\geq 1}$ *ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, takich że* $P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = -1) = q = 1 - p$. *Proces stochastyczny* $(S_n)_{n\geq 0}$ *określony następująco*

$$S_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & n \geq 1 \end{cases}$$

nazywamy prostym błądzeniem losowym.
W przypadku gdy $p = q = \frac{1}{2}$ *proces* $(S_n)_{n\geq 0}$ *nazywamy prostym symetrycznym błądzeniem losowym.*

1. Niech $(S_n)_{n\geq 0}$ będzie prostym błądzeniem losowym, takim że $p = 1-q < \frac{1}{2}$. Pokazać, że dla $M = \max\{S_n : n \geq 0\}$ mamy
$$P(M \geq r) = (\frac{p}{q})^r, \quad r \geq 0.$$

2. Stosując funkcje tworzące pokazać, że w przypadku symetrycznego błądzenia losowego zachodzą następujące równości
   a) $2kf_0(2k) = P(S_{2k-2} = 0)$ dla $k \geq 1$;
   b) $P(S_1 S_2 \cdot \ldots \cdot S_{2n} \neq 0) = P(S_{2n} = 0)$ dla $n \geq 1$.

3. Cząsteczka startuje z punktu $(0,0)$ i podlega symetrycznemu błądzeniu losowemu w dwóch wymiarach, tj. w każdym kroku zmienia swoje położeniu o jedną jednostkę w kierunku północnym, południowym, wschodnim albo zachodnim z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$. Cząsteczka poraz pierwszy osiąga linię $x + y = m$ w punkcie (X, Y) w chwili T. Wyznaczyć funkcję tworzącą zmiennych losowych T oraz $X - Y$ oraz określić jej promień zbieżności.

4. Niech $(S_n)_{n\geq 0}$ będzie symetrycznym błądzeniem losowym oraz niech $T = \min\{n > 0 : S_n = 0\}$. Pokazać, że
$$E(\min\{T, 2m\}) = 2E(|S_{2m}|) = 4mP(S_{2m} = 0), \quad m \geq 0.$$

5. Niech liczba potomków w procesie gałązkowym ma rozkład geometryczny G(0). Wyznaczyć funkcję tworzącą liczby potomków w n-tym pokoleniu. Obliczyć prawdopodobieństwo wymarcia procesu.

6. Liczba potomków w procesie gałązkowym ma rozkład Bernoulliego z parametrami $n = 4, p = \frac{1}{2}$. Wyznaczyć prawdopodobieństwo wymarcia w pierwszych dziesięciu pokoleniach oraz samo prawdopodobieństwo wymarcia tego procesu.

7. Obliczyć prawdopodobieństwo wymarcia dla następujących procesów gałązkowych, gdzie dana jest funkcja tworząca G liczby potomków:
   a) $G(s) = p_o + p_1 s, p_o + p_1 = 1, 0 < p_0 < 1$;
   b) $G(s) = p_0 + p_2 s^2, p_0 + p_2 = 1, 0 < p_0 < 1$.

8. Niech Z_n będzie liczbą potomków w n-tym pokoleniu w zwykłym procesie gałązkowym, gdzie $Z_0 = 1, E(Z_1) = \mu, D^2(Z_1) > 0$. Pokazać, że
$$E(ZnZm) = \mu^{n-m} E(Z_m^2), \quad m \leq n.$$
   Ponadto wyznaczyć współczynnik korelacji $\rho(Z_m, Z_n)$ w terminach μ.

9. Niech H_n będzie funkcją tworzącą łącznej liczby potomków w pierwszych n pokoleniach w zwykłym procesie gałązkowym. Pokazać, że
$$H_n(s) = sG(H_{n-1}(s)).$$

10. Niech Z_n będzie liczbą potomków w n-tym pokoleniu w zwykłym procesie gałązkowym. Pokazać, że
$$P(Z_n > N | Z_m = 0) \leq G_m(0)^N, \quad n < m.$$